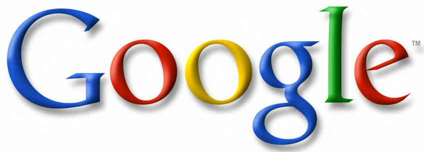
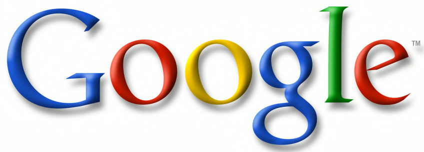



Google







Clif
[illegible]

Grundriß

der

Differential- und Integral-Rechnung.

II. Teil: Integral-Rechnung.

Von

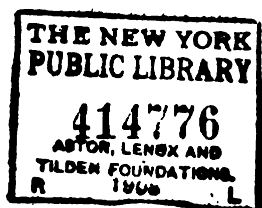
Dr. Ludwig Kiepert,
Geheimer Regierungsrat,
Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Hannover.

Neunte verbesserte und vermehrte Auflage
des gleichnamigen Leitfadens von

weil. **Dr. Max Stegemann.**

Mit 153 Figuren im Texte.

Hannover 1908.
Helwingsche Verlagsbuchhandlung.


THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
414776
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R
L

Vorrede zur ersten Auflage.

In ähnlicher Weise wie bei der Differential-Rechnung habe ich bei der Bearbeitung des vorliegenden, die Integral-Rechnung behandelnden Bandes die didaktische Seite besonders berücksichtigt. Ich bin deshalb bei der Anordnung des Stoffes zuweilen von dem gewöhnlichen Lehrgange abgewichen; so z. B. habe ich zu Anfang das Integral als eine reine Umkehrung des Differentials definiert und erst später den Begriff desselben erweitert.

Nach dieser höchst einfachen und leicht faßlichen Definition habe ich unmittelbar die Methoden vorgetragen, die zur Bestimmung des allgemeinen Integrals führen. Die zahlreichen Übungs-Beispiele, welche hierbei eingeschaltet sind, dürften um so mehr am Platze sein, weil es erfahrungsmäßig feststeht, daß zum weiteren Eindringen in diesen subtilen Teil der Mathematik große Gewandtheit in den arithmetischen Operationen und klare Übersicht über dieselben durchaus notwendig sind, und daß dem Anfänger an einem Beispiele oft manches klar wird, was ihm in der allgemeinen Theorie nur halb verständlich geworden oder ganz unverständlich geblieben ist.

Es liegt in der Natur des Menschen, daß er nur selten eine allgemeine Theorie auf einmal erfaßt; in der Regel steigt er von speziellen Fällen zur allgemeinen Theorie hinauf. Die Geschichte der Wissenschaft gibt hierfür viele Belege; so z. B. waren die Gesetze des freien Falles, des Pendels und der Planeten-Bewegungen schon lange bekannt, als sie in *ein* allgemeines Gesetz, das *Gravitations-Gesetz,* zusammengefaßt wurden.

An die Behandlung des allgemeinen Integrals (Seite 1 bis 134) hätte ich die Behandlung des bestimmten Integrals und der dahin gehörigen Untersuchungen (Seite 162—242) unmittelbar anreihen können. Ich habe jedoch das Kapitel über die Quadratur der Kurven (Seite 135 bis 161) dazwischen eingeschaltet; teils um hieran die Bedeutung der Integrations-Konstanten und die Ermittelung des Wertes derselben zu erläutern; besonders aber, um mir hierdurch ein ausgezeichnetes Mittel zur Behandlung der bestimmten Integrale, der Doppel-Integrale usw. zu verschaffen. Diese Anordnung dürfte schon durch die Paragraphen 45 bis 50 allein gerechtfertigt werden. Die Differential-Gleichungen sind nur soweit behandelt, als sie dem wissenschaftlichen Techniker unentbehrlich sind. Ich konnte mich zu dieser Einschränkung um so eher entschließen, weil ich hoffe, daß den beiden erschienenen Bänden (welche übrigens für sich ein Ganzes bilden sollen), später noch zwei andere Bände über Differential- und Integral-Rechnung folgen werden.

Hannover, den 16. August 1863.

M. Stegemann.

Vorrede zur vierten Auflage.

Der ungewöhnlich starke Absatz, welchen die Integral-Rechnung von *Stegemann* gefunden hat, ist ein Zeichen dafür, daß die darin angewendete Methode für den Lernenden durchaus angemessen ist.

Daneben kann indessen nicht geleugnet werden, daß die drei bisherigen Auflagen eine große Zahl von Ungenauigkeiten und Druckfehlern enthielten, und daß außerdem manche Untersuchungen und Sätze fehlten, welche auch für den Techniker unentbehrlich sind.

Deshalb erschien eine vollständige Umarbeitung und eine durchgreifende Ergänzung des Buches erforderlich. Dies ist nun in der vorliegenden Auflage geschehen; die in großer Zahl bemerkten Fehler sind verbessert, viele Beweise strenger gefaßt und die wesentlichsten Lücken ausgefüllt worden. Trotzdem hat der Umfang des Buches nur eine Erweiterung von wenigen Bogen erfahren, da es möglich war, viele Entwickelungen kürzer zu fassen.

Für die Abgrenzung des Stoffes waren dem Herausgeber die Anforderungen maßgebend, welche von einem billig denkenden Examinator bei der ersten Staats-Prüfung (Bauführer-Prüfung) in Integral-Rechnung gestellt werden dürften.

Es soll jedoch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß das Buch auch für solche Leser geeignet ist, welche an der *Universität* Mathematik studieren.

Im ganzen ist die von *Stegemann* gewählte Anordnung und Behandlung des Stoffes so viel wie möglich beibehalten. Besondere Sorgfalt ist darauf verwendet, das Buch durch-

weg leicht verständlich zu fassen, so daß es bei voller Berücksichtigung der wissenschaftlichen Strenge doch für den *Lernenden,* nicht für den *Gelehrten* berechnet ist.

Hinzugefügt ist auch eine *Tabelle* der hergeleiteten *Formeln,* welche einerseits die Anwendungen sehr erleichtert, andererseits aber ein erprobtes Hilfsmittel bei Repetitionen bietet.

Hannover, den 11. August 1885.

L. Kiepert.

Vorrede zur fünften Auflage.

Als es im Kreise meiner Fachgenossen bekannt wurde, daß ich eine neue Auflage der Differential- und Integral-Rechnung von *Stegemann* herausgegeben hätte, erhielt ich von hochgeschätzter Seite den dringenden Rat, doch lieber ein eigenes Lehrbuch zu schreiben. Dieser Aufforderung bin ich dadurch nachgekommen, daß ich die kürzlich erschienene 6[te] Auflage der Differential-Rechnung und ebenso die hier vorliegende 5[te] Auflage der Integral-Rechnung fast im vollen Umfange *neu abgefaßt* habe. Von dem Texte des *Stegemann*schen Leitfadens habe ich nur wenige Stellen und von den Aufgaben nur eine kleine Zahl beibehalten; dagegen habe ich mich in einem Punkte eng an das ursprüngliche Werk angeschlossen, nämlich in dem Bestreben, die Darstellung und Anordnung so zu wählen, daß der Anfänger dem Lehrgange ohne Schwierigkeit folgen kann. Ich habe deshalb eine möglichst elementare Fassung gewählt und zur Erläuterung zahlreiche Übungs-Beispiele hinzugefügt. Die Reihenfolge ist so getroffen, daß das Neue an Bekanntes angeknüpft wird, damit der Lernende von leichten Aufgaben allmählich zu schwierigeren aufsteigt.

Aus diesem Grunde ist auch die Einteilung des Stoffes in der Weise erfolgt, daß in dem ersten Teile von der Integration der gebrochenen rationalen, der irrationalen und der transzendenten Funktionen nur die einfacheren Fälle behandelt sind, und daß dann sogleich die Anwendungen der Integral-Rechnung auf die Quadratur und Rektifikation der Kurven, auf die Kubatur der Rotationskörper und auf die Komplanation der Rotationsflächen folgen. Wenn der Lernende möglichst früh erkennt, welche Vorteile die Integral-Rechnung bei den Anwendungen auf die Geometrie bietet, wird er mit größerem Interesse und reiferem Verständnisse an die ausführliche Behandlung der Partialbruch-Zerlegung und an die mühsameren Methoden, welche bei der Integration irrationaler und transzendenter Funktionen zu erfassen sind, herantreten. Dagegen würde er leicht ermüden, wenn er die ganze Theorie *vor* den Anwendungen, welche außerdem zur Einübung und Befestigung der bis dahin erklärten Formeln und Sätze dienen, durcharbeiten müßte.

Den theoretischen Erörterungen des zweiten Teiles sind gleichfalls zahlreiche Aufgaben aus der Geometrie beigefügt. Leider mußten die interessanten und äußerst lehrreichen Anwendungen auf die Mechanik ausgeschlossen werden, weil sonst der Umfang des Lehrbuches über Gebühr gewachsen wäre.

Obgleich die früheren Auflagen in erster Linie für die Studierenden an den technischen Hochschulen bestimmt waren, hat das Buch doch auch bei den Lehrern und Studierenden der Mathematik an den Universitäten freundliche Aufnahme und Verbreitung gefunden. Diesem höchst erfreulichem Umstande habe ich Rechnung getragen, indem ich die meisten Erklärungen und Beweise noch strenger gefaßt und den Inhalt wesentlich bereichert habe. Freilich darf man in dieser Beziehung bei einem Buche, mit dessen Hilfe sich der Anfänger vor allen Dingen tüchtige Fertigkeit im Differentiieren und Integrieren aneignen soll, nicht gar zu hohe Anforderungen stellen.

Die Zitate aus der Differential-Rechnung beziehen sich auf die 6te Auflage, welche im November 1892 erschienen, zurzeit aber bereits vergriffen ist. In der alsbald folgenden 7ten Auflage der Differential-Rechnung soll daher dieselbe Anordnung der Abschnitte und Paragraphen beibehalten werden, damit die Zitate auch dafür noch zutreffende sind.

Den Herren *Lampe, von Mangoldt, Franz Meyer, Runge* und *Voß,* die mir auch bei der Umarbeitung der Integral-Rechnung wertvolle Ratschläge erteilt haben, bin ich zu aufrichtigem Danke verpflichtet; ganz besonders Herrn *Voß* für die ausführlichen Mitteilungen über kritische Stellen des Buches. Außerdem muß ich mit dem besten Danke die freundliche Mitwirkung des Herrn *Petzold* beim Lesen der Korrektur hervorheben.

Die Verlagsbuchhandlung ist allen meinen Wünschen auf das Bereitwilligste entgegengekommen, wofür ich auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank ausspreche.

Hannover, den 23. April 1894.

L. Kiepert.

Vorrede zur sechsten Auflage.

Die vorliegende sechste Auflage unterscheidet sich weder dem Umfange noch dem Inhalte nach wesentlich von der fünften Auflage, seit deren Erscheinen ein so kurzer Zeitraum verstrichen ist, daß sich inzwischen nur an wenigen Stellen das Bedürfnis, Veränderungen vorzunehmen, ergeben hatte. Doch habe ich auch bei der Integral-Rechnung die Verbesserungsvorschläge, welche mir von befreundeter Seite zugegangen sind, und für die ich hierdurch meinen aufrichtigen Dank ausspreche, nach Möglichkeit berücksichtigt. Der mir mehrfach erteilte Rat, die Differential-Rechnung

und die Integral-Rechnung nicht getrennt zu behandeln, sondern mit der Integral-Rechnung zu beginnen, sobald die ersten Abschnitte der Differential-Rechnung erledigt sind, konnte aus rein äußerlichen Gründen nicht befolgt werden. Es bleibt aber jedem Leser überlassen, die Anordnung des Unterrichtsstoffes in dem angedeuteten Sinne zu ändern. Davon mache ich auch in meinen eigenen Vorträgen, welche an der hiesigen technischen Hochschule im Oktober eines jeden Jahres ihren Anfang nehmen, Gebrauch, um bis zu Weihnachten diejenigen Abschnitte durchzunehmen, welche in den zu Neujahr einsetzenden Vorträgen über Mechanik als bekannt vorausgesetzt werden. Ich lasse deshalb den Abschnitten I bis IV, VIII bis XI der Differential-Rechnung unmittelbar den ganzen ersten Teil der Integral-Rechnung folgen und kehre erst dann wieder zur Differential-Rechnung zurück.

Wie schon in der Vorrede zur fünften Auflage hervorgehoben wurde, enthält der Leitfaden in seiner jetzigen Form nur wenig von dem *Stegemann*schen Werke, so daß ich nunmehr selbst als Verfasser in der neuen Auflage aufgeführt bin.

Beim Lesen der Korrektur hat mich Herr *Petzold* wieder in freundlicher Weise unterstützt und dadurch zu herzlichem Danke verpflichtet. Ebenso danke ich der Verlagsbuchhandlung bestens für die liebenswürdige Bereitwilligkeit, mit der sie bei der Drucklegung allen meinen Wünschen entgegengekommen ist.

Hannover, den 12. September 1896.

L. Kiepert.

Vorrede zur siebenten Auflage.

Da mir seit dem Erscheinen der sechsten Auflage nur wenige, sich auf Änderungen beziehende Wünsche bekannt geworden sind, so unterscheidet sich die vorliegende siebente Auflage von der vorhergehenden nur in einigen Punkten, von denen ich den Abschnitt über *Gauß*sche Quadratur hervorheben möchte. Ich werde aber jedem, der mir für die späteren Auflagen nützliche Verbesserungs-Vorschläge macht, dankbar sein und rechne dabei insbesondere auf die Mitwirkung der Herren Techniker, die in den letzten Jahren so viel über die notwendige Reform des mathematischen Unterrichts geschrieben haben, deren Ausführungen jedoch *wirklich verwendbare* Vorschläge, wie man es im einzelnen besser machen kann, bisher nicht enthalten. Wenn ich auf das vorliegende weitverbreitete Lehrbuch Bezug nehmen darf, so verlange ich bestimmte Angaben über etwaige Abschnitte, Lehrsätze und Aufgaben, welche sich darin finden, für den Techniker aber entbehrlich sind; ferner bitte ich um Mitteilung von Untersuchungen und Aufgaben, welche in dem Lehrbuche fehlen. Auch Vorschläge über Änderung des ganzen Lehrplanes werde ich mit Dank entgegen nehmen.

Ich hatte schon früher um derartige Mitteilungen gebeten und kann mit Genugtuung feststellen, daß mir von seite der mathematischen Fachgenossen nützliche Winke in großer Zahl zugegangen sind. Für die vorliegende Auflage haben mir besonders die Herren *Rodenberg* in Hannover und *Stäckel* in Kiel gute Ratschläge erteilt und mich dadurch zu bestem Danke verpflichtet. Von den Herren Technikern dagegen habe ich bisher *nur einen einzigen* Verbesserungs-Vorschlag erhalten, der sich auf die Aufnahme der hyperbolischen Funktionen bezieht.

Die Forderung, der mathematische Unterricht an der technischen Hochschule müsse das, was die Techniker später wirklich brauchen, noch mehr, als bisher geschehen ist, berücksichtigen, erscheint mir durchaus berechtigt; dieses Ziel wird aber nicht durch kränkende Vorwürfe erreicht, sondern durch freundschaftliche, gemeinsame Arbeit. Die Kluft, welche zwischen Theorie und Praxis bestanden hat, wird durch die neuerdings beliebten Angriffe auf die Mathematik noch vergrößert; nur durch beiderseitiges Entgegenkommen kann sie überbrückt oder ganz ausgefüllt werden zum Heile der Wissenschaft und zur Förderung der technischen Anwendungen.

Den Fachgenossen, welche an den technischen Hochschulen und Universitäten Differential- und Integral-Rechnung vortragen und an ihre Zuhörer die angehängte Tabelle verteilen wollen, stellt die Verlagsbuchhandlung eine größere Anzahl von Separat-Abzügen *kostenfrei* zur Verfügung. Die Benutzung dieser Tabellen, von denen ich jedem meiner Zuhörer ein Exemplar zu überreichen pflege, hat mir bei meinen Vorträgen stets sehr gute Dienste geleistet; denn erstens brauche ich jede Formel nur einmal herzuleiten und kann bei der späteren Anwendung auf die Tabelle verweisen. Sodann gewinnt der Lernende über das, was er wissen soll, durch die Tabelle einen besseren Überblick. Damit stelle ich jedoch gewiß nicht die Anforderung, daß jemand die ganze Tabelle auswendig lernen soll. Im Gegenteil liegt der Hauptzweck der Tabelle in der Absicht, **das mechanische Auswendiglernen von Formeln möglichst einzuschränken.** Diejenigen Formeln, welche einen wichtigen Satz oder eine häufig verwendete Rechnungsmethode enthalten, muß man sich natürlich merken, aber **nicht durch Auswendiglernen, sondern durch den wiederholten Gebrauch.** Die übrigen Formeln würde man doch sehr bald wieder vergessen, auch wenn man sie noch so sorgfältig auswendig gelernt hätte. Man kann auch um so lieber auf das Auswendiglernen verzichten, wenn man eine Tabelle zur Hand hat, in welcher jede dieser Formeln leicht aufzufinden ist. Ich möchte deshalb ausdrücklich hervorheben, daß die

Tabelle meinem Lehrbuche beigefügt ist, nicht um den Lernenden mit vielem Formelkram zu **belasten**, sondern um eine **Entlastung** herbeizuführen.

Herrn *Petzold* habe ich wieder für die freundliche Unterstützung beim Lesen der Korrektur und der Verlagsbuchhandlung für die wohlwollende Berücksichtigung meiner Wünsche bei Ausführung des Druckes den verbindlichsten Dank abzustatten.

Hannover, den 3. September 1899.

L. Kiepert.

Vorrede zur achten Auflage.

In der vorliegenden achten Auflage sind einige nicht unwesentliche Änderungen vorgenommen und einige neue Abschnitte hinzugefügt worden. Namentlich ist in dem ersten Teile die Anordnung so gewählt, daß die verschiedenen Methoden zur Ermittelung der Integrale (Integration durch Substitution, Integration durch Zerlegung und partielle Integration) sich noch schärfer voneinander abheben.

Von den *hyperbolischen* Funktionen, welche bereits in der neunten Auflage der Differential-Rechnung benutzt worden sind, ist hier ebenfalls zur Vereinfachung zahlreicher Integrationen Gebrauch gemacht, und zwar mit besonderer Rücksicht auf die Gegenüberstellung solcher Integrale mit den verwandten Integralen, welche auf *zyklometrische* Funktionen führen.

Hinzugefügt sind etliche Untersuchungen aus der Theorie der Differential-Gleichungen, insbesondere auch ein Abschnitt über die Behandlung und Integration *simultaner* Differential-Gleichungen.

Am Schluß ist auch noch eine kurze Tabelle für die Werte der elliptischen Normal-Integrale erster und zweiter

Gattung aufgestellt, in der Überzeugung, daß die Anwendung dieser Integrale, die sich in der Technik und in der mathematischen Physik häufig genug einstellen, denen aber die Herren Techniker bisher in der Regel sorgfältig ausgewichen sind, erst dann möglich ist, wenn eine leicht zugängliche, handliche Tabelle vorliegt. Eine solche Tabelle findet sich bereits in der Formel-Sammlung von *Ligowski* (Taschenbuch der Mathematik, dritte vermehrte Auflage, Berlin 1893); es erschien aber erwünscht, die Zahl der berücksichtigten Werte des Moduls und der Amplitude zu vergrößern und die Zahl der Dezimalstellen von vier auf fünf zu erhöhen. Bei Aufstellung der Tafeln wurde das große Werk von *Legendre,* Traité des fonctions elliptiques, t. II, Paris 1826 benutzt, indem aus den dort angegebenen Logarithmen die Werte der Integrale $K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, $E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ selbst berechnet worden sind. Die Werte von $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ auf Seite 623 und 624 sind den *Legendre*schen Tafeln ohne Umrechnung, nur mit Einschränkung der Stellenzahl entnommen.

Den Fachgenossen, welche an den technischen Hochschulen und Universitäten Differential- und Integral-Rechnung vortragen und diese Tafel nebst der angehängten Formel-Tabelle verteilen wollen, stellt die Verlagsbuchhandlung eine größere Anzahl von Separatabzügen *kostenfrei* zur Verfügung.

Die Figuren, deren Anzahl ebenfalls vermehrt ist, sind sämtlich neu hergestellt.

Auch diesmal sind mir von verschiedenen Seiten Anregungen zu Verbesserungen und Ergänzungen zugegangen. In dieser Beziehung bin ich besonders den Herren *Stäckel* in Kiel und *Prandtl* in Hannover zu Dank verpflichtet. Herr *Prandtl* hat mich namentlich auf einige Abschnitte aus der Theorie der Differential-Gleichungen aufmerksam gemacht, deren Behandlung für die Ingenieure von Bedeutung ist.

Den aufrichtigen Dank, den ich bei den früheren Auflagen der Verlagsbuchhandlung für die bereitwillige Gewährung meiner Wünsche und Herrn *Petzold* für die freundliche Mitwirkung beim Lesen der Korrektur zu erstatten hatte, muß ich auch bei dieser Auflage aufs wärmste wiederholen.

Hannover, den 17. Mai 1903.

L. Kiepert.

Vorrede zur neunten Auflage.

Die Gesichtspunkte, die bei den früheren Auflagen dieses Lehrbuches maßgebend gewesen sind, konnten auch für diese neue Auflage festgehalten werden.

Im einzelnen sind aber in der neuen Auflage noch mancherlei wichtige Ergänzungen hinzugetreten.

Vollständig umgearbeitet ist die Untersuchung der Konvergenz-Bedingungen für die Reihen-Entwickelungen, welche zur Integration gewöhnlicher Differential-Gleichungen erster Ordnung benutzt werden. Der neue Beweis, der wesentlich einfacher und kürzer ist als der früher gegebene, wurde dem Verfasser von Herrn *Stäckel* in Hannover mitgeteilt. Auf Anregung von Herrn *Stäckel* ist auch eine wissenschaftliche Erklärung der Grundsätze für den Gebrauch des *Amsler*schen Polarplanimeters in das Lehrbuch aufgenommen worden. Für die Darstellung der Koeffizienten einer trigonometrischen Reihe sind einige charakteristische Beispiele hinzugefügt.

Ferner ist der Zusammenhang zwischen dem *allgemeinen* Integral einer Differential-Gleichung erster Ordnung und der *singulären* Lösung noch eingehender behandelt worden als bisher.

Besonderes Gewicht legt der Verfasser auf den letzten Abschnitt, in welchem die zuerst im Jahre 1894 von Herrn *Runge* in Göttingen ausgeführte Übertragung der *Simpson*schen Regel auf die Integration gewöhnlicher Differential-Gleichungen erläutert ist. Da in der Technik sehr viele Differential-Gleichungen auftreten, die man in geschlossener Form nicht integrieren kann, so wird das durch die

Verallgemeinerung der *Simpson*schen Regel gegebene Näherungsverfahren, das bei richtigem Gebrauch stets hinreichend genaue Resultate liefert, voraussichtlich gute Dienste leisten.

Auf Wunsch einiger Leser sind am Schlusse des Buches noch ein alphabetisches Verzeichnis über die Bedeutung der in den Formeln benutzten Buchstaben und ein alphabetisches Inhaltsverzeichnis aufgestellt worden zum leichteren Verständnis und zur besseren Übersicht über die in dem Werke behandelten Untersuchungen.

Um die Benutzung der den Anhang des Werkes bildenden „Tabelle der wichtigsten Formeln" zu erleichtern, hat die Verlagsbuchhandlung in der äußeren Ausstattung der neuen Auflage insofern eine hoffentlich willkommene Verbesserung eingeführt, als sie die Tabelle in *auslegbarer* Form hat einheften lassen. Hierdurch ist es ermöglicht, die Tabelle während des Gebrauchs *neben* das aufgeschlagene Buch zu legen und so die in den einzelnen Paragraphen des Werkes gegebenen Hinweise auf die Tabelle ohne zeitraubendes Nachschlagen des Gesamtwerkes gleichzeitig zu benutzen.

Auch im übrigen hat die Verlagsbuchhandlung alles aufgeboten, um die Ausstattung des Buches zu verbessern. Namentlich sind für den Druck vollständig neue Typen zur Verwendung gekommen. Ich spreche daher der Verlagsbuchhandlung auch an dieser Stelle für das mir bewiesene Entgegenkommen meinen verbindlichsten Dank aus.

Herr *Petzold* hat mich beim Lesen der Korrektur wiederum in freundlichster Weise unterstützt, wofür ich ihm ebenfalls herzlich danke.

Hannover, den 1. Oktober 1907.

L. Kiepert.

Inhalts-Verzeichnis.

Erster Teil.

I. Abschnitt.

Allgemeine Begriffe und Fundamentalsätze der Integral-Rechnung.

II. Abschnitt.

Integration durch Substitution.

III. Abschnitt.

Integration durch Zerlegung.

XII. Abschnitt.

Theorie der bestimmten Integrale.

Seite

XIII. Abschnitt.

Kubatur der Körper und Komplanation der krummen Oberflächen. Mehrfache Integrale.

XIV. Abschnitt.

Integration der Differentiale der Funktionen von mehreren Veränderlichen.

XV. Abschnitt.

Theorie der gewöhnlichen Differential-Gleichungen erster Ordnung.

XVI. Abschnitt.

Gewöhnliche Differential-Gleichungen höherer Ordnung.

XVII. Abschnitt.

Lineare Differential-Gleichungen m^{ter} Ordnung.

XVIII. Abschnitt.

Simultane Differential-Gleichungen.

XIX. Abschnitt.

Näherungsmethoden zur Integration gewöhnlicher Differential-Gleichungen.



Erster Teil.

I. Abschnitt.
Allgemeine Begriffe und Fundamentalsätze der Integral-Rechnung.

§ 1.
Begriff und geometrische Deutung des Integrals.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 1 und 2.)*)

Die Aufgabe der Integral-Rechnung besteht darin, *daß eine Funktion $F(x)$ gesucht wird, deren Ableitung*

(1.) $$F'(x) = f(x)$$

gegeben ist.

Da das Differential einer Funktion $F(x)$ gleich ist ihrer Ableitung $F'(x)$, multipliziert mit dem Differential von x, da also

(2.) $$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx,$$

so kann man die gestellte Aufgabe auch so fassen: „*Von einer Funktion ist das Differential gegeben, man soll die Funktion selbst aufsuchen.*“

Die Operation, durch welche dies geschieht, nennt man die „*Integration des vorliegenden Differentials*“, und die Wissenschaft, welche von den Integrationen handelt, nennt man „*Integral-Rechnung*“. Das Operationszeichen für das Integral von $F'(x)dx$ ist $\int$ (ein langgezogenes S),**) also

*) Die wichtigsten Formeln sind im Anhange zu einer Tabelle zusammengestellt.

**) Es wird später gezeigt werden, daß man jedes (bestimmte) Integral auch als den Grenzwert einer Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen auffassen kann. Dieser Auffassung entspricht das Operationszeichen $\int$ (erster Buchstabe des Wortes Summa), das von *Leibniz* eingeführt ist.

(3.) $$\int F'(x)dx = F(x).$$

In dieser Hauptformel ist somit ausgesprochen, was man unter dem Integral einer gegebenen Differential-Funktion

$$F'(x)dx = f(x)dx$$

versteht.

Beispiele.

1) Ist

$$F(x) = x^3,$$

so wird

$$F'(x) = 3x^2, \quad \text{also} \quad \int 3x^2dx = x^3.$$

2) Ist

$$F(x) = \sin x,$$

so wird

$$F'(x) = \cos x, \quad \text{also} \quad \int \cos x dx = \sin x.$$

3) Ist

$$F(x) = \operatorname{arctg} x,$$

so wird

$$F'(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \text{also} \quad \int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x.$$

Aus der vorstehenden Erklärung folgt, daß *Integration und Differentiation entgegengesetzte Operationen sind, die sich gegenseitig aufheben.* Setzt man nämlich aus Gleichung (2.) den Wert von $F'(x)dx$ in die Gleichung (3.) ein, so erhält man

(4.) $$\int dF(x) = F(x);$$

und wenn man beide Seiten der Gleichung (3.) differentiiert,

(5.) $$d\int F'(x)dx = dF(x) = F'(x)dx.$$

Darin liegt ein Mittel, um das durch die Integration sich ergebende Resultat zu prüfen. Differentiiert man nämlich dieses Resultat, so muß man den Ausdruck erhalten, der unter dem Integralzeichen steht.

Weil $F'(x)dx$ nicht nur das Differential von $F(x)$, sondern auch das Differential von $F(x) + C$ ist, wo C eine beliebige Konstante bedeutet, so wird ganz allgemein

(6.) $$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Das Integral von $F'(x)dx$ hat daher unendlich viele Werte. Dabei nennt man die Größe C die *„Integrations-Konstante"*.

Dies ist aber die *einzige* Willkür, welche bei der Bestimmung des Integrals auftritt, denn es gelten die folgenden Sätze:

Satz 1. *Ist die Ableitung einer stetigen Funktion* $\varphi(x)$ *für alle Werte von* x *zwischen* a *und* b *gleich* 0, *so ist der Wert von* $\varphi(x)$ *in diesem Intervalle konstant.*

Beweis. Nach dem *Taylor*schen Lehrsatze (D.-R.*), Formel Nr. 87 der Tabelle) ist

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + h \cdot \varphi'(a+\Theta h), \tag{7.}$$

wo Θ zwischen 0 und 1 liegt. Nach Voraussetzung ist $\varphi'(x)$ für alle Werte von x zwischen a und b gleich 0, folglich wird

$$\varphi'(a+\Theta h) = 0,$$

so lange $a + h = x$ in dem angegebenen Intervalle bleibt. Da nun h eine endliche Größe ist, so wird

$$\varphi(a+h) = \varphi(a), \quad \text{oder} \quad \varphi(x) = \varphi(a), \tag{8.}$$

d. h. $\varphi(x)$ behält den konstanten Wert $\varphi(a)$.

Hieraus folgt

Satz 2. *Haben die beiden stetigen Funktionen* $F(x)$ *und* $G(x)$ *in dem betrachteten Intervalle dieselbe Ableitung, so unterscheiden sie sich voneinander nur durch eine Konstante.*

Beweis. Setzt man

$$\varphi(x) = G(x) - F(x), \tag{9.}$$

so ist die Ableitung von $\varphi(x)$ in dem Intervalle beständig gleich Null, also ist $\varphi(x)$ nach Satz 1 eine Konstante C. Dies gibt

$$G(x) = F(x) + C. \tag{10.}$$

Satz 3. *Sind die beiden Funktionen* $F(x)$ *und* $G(x)$ *Integrale derselben Funktion* $f(x)$, *so können sie sich nur durch eine Konstante voneinander unterscheiden.*

---

*) Die Zitate, welche sich auf die zehnte Auflage der Differential-Rechnung beziehen, sollen durch die vorgesetzten Buchstaben: „D.-R." hervorgehoben werden.

Beweis. Nach der Erklärung des Integrals muß

(11.) $$F'(x) = f(x) \quad \text{und auch} \quad G'(x) = f(x)$$

sein, d. h. es muß

(12.) $$F'(x) = G'(x)$$

sein, folglich ist nach dem vorigen Satze

(13.) $$G(x) = F(x) + C.$$

Satz 4. *Zu jeder stetigen Funktion $y = f(x)$, die in dem betrachteten Intervalle eindeutig ist und sich durch eine Kurve geometrisch darstellen läßt, gibt es ein Integral* (während es nicht zu jeder stetigen Funktion eine Ableitung gibt).

Beweis. Es möge zunächst die Voraussetzung gemacht werden, daß die Kurven, so weit ihr Bogen hier in Betracht kommt, *oberhalb* der X-Achse liegen. Ist AP ein solcher Kurvenbogen (Fig. 1) mit der Gleichung

(14.) $$y = f(x),$$

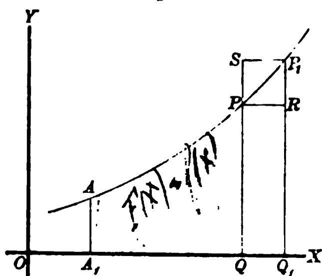


Fig. 1.

so ist der Flächeninhalt F der Figur A_1QPA eine Funktion $F(x)$ von x, denn er ändert sich zugleich mit x. Es ist also

(15.) $$F = A_1QPA = F(x),$$

und wenn man QQ_1 mit Δx, $Q_1P_1 = f(x + \Delta x)$ mit y_1 bezeichnet,

(16.) $$A_1Q_1P_1A = F(x + \Delta x) = F + \Delta F,$$

folglich wird

(17.) $$QQ_1P_1P = \Delta F = \Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Legt man durch P die Gerade PR parallel zur X-Achse, so wird unter der Voraussetzung, daß die Kurve von P bis P_1 *steigt*,

(18.) $$QQ_1RP = y \,.\, \Delta x < \Delta F(x) = QQ_1P_1P;$$

und legt man durch P_1 die Gerade P_1S parallel zur X-Achse, so wird

(19.) $$QQ_1P_1P = \Delta F(x) < QQ_1P_1S = y_1 \,.\, \Delta x.$$

Dies gibt

(20.) $$y \leqq \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \leqq y_1,$$

oder, weil $\lim y_1 = y$ für $\lim \Delta x = 0$ wird,

(21.) $$y = \frac{dF(x)}{dx}, \quad \text{oder} \quad f(x) = F'(x).$$

Deshalb erhält man

(22.) $$F = F(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx,$$

oder

(22a.) $$F = \int y dx.$$

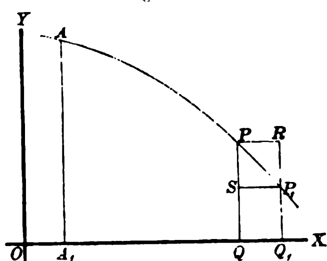


Fig. 2.

Dieselben Schlüsse gelten auch noch, wenn die Kurve vom Punkte P bis zum Punkte P_1 *fällt* (vergl. Fig. 2), nur erhalten dann die Ungleichheitszeichen die entgegengesetzte Richtung. Es wird nämlich in diesem Falle

$$F = A_1QPA = F(x),$$
$$A_1Q_1P_1A = F(x + \Delta x) = F + \Delta F,$$
$$QQ_1P_1P = \Delta F = \Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x),$$
$$QQ_1RP \geqq \Delta F(x) \geqq QQ_1P_1S.$$

oder

(23.) $$y \cdot \Delta x \geqq \Delta F(x) \geqq y_1 \cdot \Delta x,$$

(24.) $$y \geqq \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \geqq y_1,$$

also, da auch hier $\lim y_1 = y$ wird für $\lim \Delta x = 0$,

(25.) $$y = \frac{dF(x)}{dx},$$

oder

(25a.) $$f(x) = F'(x).$$

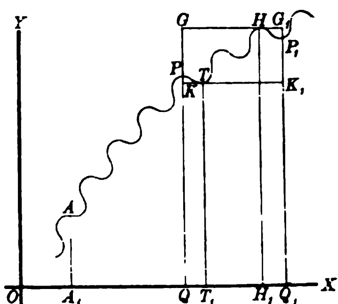


Fig. 3.

Das Resultat bleibt sogar auch dann noch richtig, wenn die Kurve zwischen P und P_1 *abwechselnd steigt und fällt* (Fig. 3). Man legt dann durch den höchsten Punkt H mit

der Ordinate y' und durch den tiefsten Punkt T mit der Ordinate y'' Parallele GG_1 und KK_1 zu der X-Achse. Dadurch erhält man die beiden Rechtecke

$$QQ_1G_1G = y' \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad QQ_1K_1K = y'' \cdot \Delta x, \tag{26.}$$

und zwar wird

$$y' \cdot \Delta x \gtreqless QQ_1P_1P = \Delta F(x) \gtreqless y'' \cdot \Delta x, \tag{27.}$$

oder

$$y' \gtreqless \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \gtreqless y'', \tag{28.}$$

also, da $\lim y' = \lim y'' = y$ für $\lim \Delta x = 0$,

$$y = \frac{dF(x)}{dx}, \quad \text{oder} \quad f(x) = F'(x). \tag{29.}$$

Man findet daher in allen Fällen

$$F = A_1QPA = \int f(x)dx + C = \int y dx + C. \tag{30.}$$

Bei dieser geometrischen Deutung des Integrals erkennt man auch, weshalb zu dem Integral noch eine willkürliche Integrations-Konstante hinzutreten muß. Die Anfangs-Ordinate A_1A, durch welche die ebene Figur F auf der einen Seite begrenzt wird, ist noch beliebig. Einer Verschiebung dieser Anfangs-Ordinate entspricht eine Veränderung der Integrations-Konstanten C.

§ 2.

Einführung der Integrationsgrenzen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 3 bis 6.)

Es gibt Anwendungen der Integral-Rechnung, bei denen die Gleichung

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

für jeden Wert der Integrations-Konstanten C eine Lösung der gestellten Aufgabe gibt. Man nennt dann $F(x) + C$ das *„allgemeine Integral“*, aus dem sich die *„partikulären Integrale“* ergeben, indem man für C besondere (partikuläre) Werte einsetzt.

Bei anderen Anwendungen der Integral-Rechnung aber darf die Integrations-Konstante C nur *einen* bestimmten

Wert haben, der sich im allgemeinen aus der Natur der Aufgabe ohne weiteres ergibt. Gewöhnlich wird die Integrations-Konstante C dadurch ermittelt, daß man den Wert von x aufsucht, für welchen das Integral in der vorgelegten Aufgabe verschwindet.

Ist a dieser besondere Wert von x, so nennt man a „*die untere Grenze*" des Integrals und schreibt

(1.) $$F = \int_a F'(x)dx = F(x) + C.$$

Da nach Voraussetzung das Integral für $x = a$ verschwindet, so findet man hieraus

(2.) $$0 = F(a) + C, \quad \text{oder} \quad C = -F(a),$$

also

(3.) $$F = \int_a F'(x)dx = F(x) - F(a).$$

Dieses Verfahren kommt auch bei der geometrischen Deutung des Integrals in Betracht. In den Figuren 1, 2 und 3 z. B. verschwindet der Flächeninhalt der ebenen Figur A_1QPA, wenn die Ordinate QP mit der Anfangs-Ordinate A_1A zusammenfällt, wenn also

$$x = a = OA_1.$$

In vielen Fällen braucht man den Wert von F nur für einen bestimmten Wert von x, z. B. für $x = b$; man nennt dann b „*die obere Grenze*" und schreibt

(4.) $$F = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

F heißt in diesem Falle ein „*bestimmtes Integral*", während man $F(x)$ das „*unbestimmte Integral*" von $F'(x)dx$ nennt.

Um anzudeuten, in welcher Weise das bestimmte Integral aus dem unbestimmten hergeleitet wird, schreibt man

(5.) $$F = \int_a^b ydx = \int_a^b F'(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Satz 1. *Das bestimmte Integral kann betrachtet werden als Grenzwert einer Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen.*

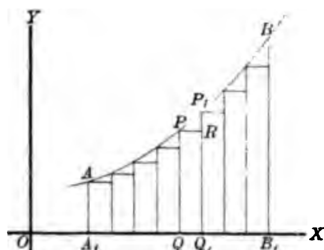
Beweis. Der Flächeninhalt der ebenen Figur A_1B_1BA (Fig. 4) war

$$F = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a), \tag{6.}$$

wenn diese Figur durch die Kurve

$$y = F'(x), \quad \text{oder} \quad y = f(x)$$

Fig. 4.



begrenzt wird. Dabei werde vorausgesetzt, daß $f(x)$ in dem betrachteten Intervalle eine *stetige* und *eindeutige* Funktion sei. Andererseits kann man aber auch den Flächeninhalt dieser Figur dadurch berechnen, daß man sie durch Parallele zur Y-Achse in n Streifen zerlegt, die alle verschwindend klein werden, wenn n ins Unbegrenzte wächst. Ist nun QQ_1P_1P einer der Streifen, und zieht man durch P eine Parallele PR zur X-Achse, so wird dieser Streifen zerlegt in ein Rechteck QQ_1RP mit dem Flächeninhalte $y \,.\, \Delta x$ und in das Dreieck PRP_1, wobei mit Δx die Breite des Streifens bezeichnet ist. Die Summe der Rechtecke QQ_1RP ist daher

$$F_1 = \sum_{x=a}^{x=b-\Delta x} y \,.\, \Delta x = \sum_{x=a}^{x=b-\Delta x} f(x) \,.\, \Delta x = \sum_{x=a}^{x=b-\Delta x} F'(x) \,.\, \Delta x. \tag{7.}$$

Wächst n ins Unbegrenzte, so wird Δx verschwindend klein, und man erhält

$$\lim F_1 = \lim \sum F'(x) \,.\, \Delta x = F, \tag{8.}$$

weil die Dreiecke PRP_1 verschwindend kleine Größen *höherer* Ordnung werden, die neben den verschwindend kleinen Größen *erster* Ordnung vernachlässigt werden dürfen.

Von der Richtigkeit dieses Resultats kann man sich auch auf folgende Weise überzeugen.

Der Flächeninhalt des Dreiecks PRP_1 (Fig. 4) ist kleiner als der Flächeninhalt eines Rechtecks mit der Grundlinie $PR = \Delta x$ und der Höhe $RP_1 = h_x$, also

$$\triangle PRP_1 < h_x \,.\, \Delta x.$$

Dieselbe Ungleichung gilt für die sämtlichen Dreiecke, welche in Figur 4 von den Streifen abgeschnitten sind. Bezeichnet man also die Summe dieser Dreiecke mit ΣPRP_1 und die größte unter den Höhen h_x mit h, so wird

$$\Sigma PRP_1 < \Sigma h_x . \Delta x < h \Sigma \Delta x,$$

oder, da $\Sigma \Delta x$, d. h. die Summe aller Grundlinien gleich A_1B_1 ist,

$$\Sigma PRP_1 < h . A_1B_1 = h(b - a).$$

Nach Voraussetzung ist die Funktion $f(x)$ für die betrachteten Werte von x stetig und endlich, deshalb werden die Größen h_x, also auch h mit Δx zugleich verschwindend klein, folglich auch ΣPRP_1.

In Figur 4 *steigt* die Kurve von A bis B. Das Rechteck QQ_1RP ist deshalb um das Dreieck PRP_1 *kleiner* als

Fig. 5.

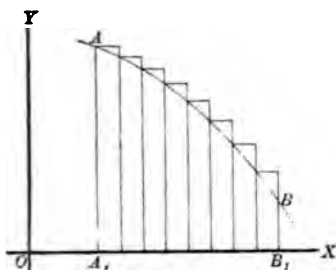
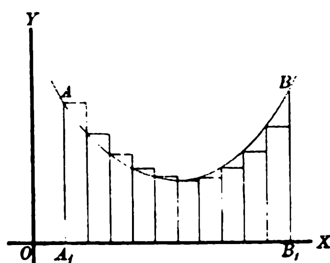


Fig. 6.



der Streifen QQ_1P_1P. Dasselbe gilt für alle anderen Streifen, in welche die Figur zerlegt ist. *Fällt* dagegen die Kurve von A bis B (vergl. Fig. 5), so sind die Rechtecke um die kleinen Dreiecke *größer* als die Streifen der Figur. Es können auch (wie in Figur 6) die Rechtecke teilweise *größer* und teilweise *kleiner* als die Streifen sein. Die in Gleichung (8.) ausgesprochene Schlußfolgerung bleibt aber auch dann noch richtig, weil die Summe der vernachlässigten oder hinzugefügten Dreiecke zugleich mit Δx verschwindend klein wird.

Statt $\lim \Sigma$ schreibt man S und fügt die Grenzen der Summation, nämlich a und $\lim(b - \Delta x) = b$ unten und oben

dem Summenzeichen S, aus welchem das Zeichen $\int$ entstanden ist, hinzu. Dadurch erhält die Gleichung (8.) die Form

$$(8a.)\qquad F = \int_a^b y dx = \int_a^b F'(x) dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a),$$

welche mit Gleichung (6.) übereinstimmt.

Bisher war die Voraussetzung festgehalten worden, daß der betrachtete Kurvenbogen *oberhalb* der X-Achse liegt, d. h. es sollte $y = f(x) \geqq 0$ sein für alle in Betracht kommenden Werte von x. Die vorstehenden Schlüsse gelten aber in gleicher Weise auch dann noch, wenn der Bogen AB *unterhalb* der X-Achse liegt, wenn also $y = f(x) \leqq 0$ ist für die betrachteten Werte von x. In diesem Falle hat aber selbstverständlich

$f(x) . \Delta x = F'(x) . \Delta x$ und deshalb auch $\sum F'(x) . \Delta x$

einen *negativen* Wert.

Es ist auch nicht notwendig, daß $b > a$ ist; setzt man nämlich für Δx *negative* Werte ein, so muß $b < a$ werden.

Bemerkung.*)

Die vorstehenden Untersuchungen gingen von der Voraussetzung aus, daß die Funktion $F(x)$, deren Ableitung $F'(x) = f(x)$ gegeben ist. existiert, oder daß sich wenigstens die *stetige* und *eindeutige* Funktion $y = f(x)$ durch eine Kurve geometrisch darstellen läßt. Man kann aber die Untersuchung auch *unabhängig* von der geometrischen Darstellung durchführen.

Um zu beweisen, daß es immer eine *stetige* und *eindeutige* Funktion $F(x)$ gibt, deren Ableitung $F'(x)$ einer gegebenen *stetigen* und *eindeutigen* Funktion $f(x)$ gleich ist, wobei $F(x)$ noch für $x = a$ einen beliebigen Wert $F(a)$ annehmen darf, beachte man die nach dem *Taylor*schen Satze für jede stetige Funktion geltende Gleichung (D.-R., Formel Nr. 87 der Tabelle)

$$(9.)\qquad F(x + h) - F(x) = h . F'(x + \Theta h).$$

Da nun in dem vorliegenden Falle $F'(x) = f(x)$ sein soll, so würde die Gleichung (9.), nachdem man die Existenz der Funktion $F(x)$ nachgewiesen hat, übergehen in

$$(9a.)\qquad F(x + h) - F(x) = h . f(x + \Theta h).$$

---

*) Der Anfänger darf diese Bemerkung, wenn ihr Inhalt für ihn zu schwer verständlich sein sollte, übergehen.

Teilt man das Intervall von a bis b in n gleiche Teile und nennt die Teilwerte

$$a, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, b,$$

so würde man aus Gleichung (9a.) das folgende System von Gleichungen erhalten

$$(10.)\quad \begin{cases} F(x_1) - F(a) = (x_1 - a)f[a + \Theta_1(x_1 - a)], \\ F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1)f[x_1 + \Theta_2(x_2 - x_1)], \\ F(x_3) - F(x_2) = (x_3 - x_2)f[x_2 + \Theta_3(x_3 - x_2)], \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ F(b) - F(x_{n-1}) = (b - x_{n-1})f[x_{n-1} + \Theta_n(b - x_{n-1})]. \end{cases}$$

(Es ist dabei nicht einmal notwendig, daß das Intervall von a bis b in n *gleiche* Teile geteilt wird, man braucht nur festzusetzen, daß die einzelnen Teil-Intervalle verschwindend klein werden, wenn n ins Unbegrenzte wächst.)

Durch Addition der Gleichungen (10.) erhält man dann

$$(11.)\quad \begin{aligned} F(b) - F(a) = (x_1 - a)f[a + \Theta_1(x_1 - a)] + (x_2 - x_1)f[x_1 + \Theta_2(x_2 - x_1)] \\ + (x_3 - x_2)f[x_2 + \Theta_3(x_3 - x_2)] + \cdots \\ + (b - x_{n-1})f[x_{n-1} + \Theta_n(b - x_{n-1})], \end{aligned}$$

oder, wenn man a mit x_0 und b mit x_n bezeichnet,

$$(11a.)\quad F(b) - F(a) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} (x_\alpha - x_{\alpha-1})f[x_{\alpha-1} + \Theta_\alpha(x_\alpha - x_{\alpha-1})].$$

Durch diese Gleichung möge die Funktion $F(b)$ erklärt werden. Dabei liegen die Größen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n$ sämtlich zwischen 0 und $+1$; im übrigen sind sie aber noch unbestimmt.

Bezeichnet man jetzt mit G_α den *größten* und mit K_α den ***kleinsten*** Wert, welchen $f(x)$ erhält, wenn x das Intervall von $x_{\alpha-1}$ bis x_α durchläuft, so ist

$$(12.)\quad K_\alpha \leqq f[x_{\alpha-1} + \Theta_\alpha(x_\alpha - x_{\alpha-1})] \leqq G_\alpha.$$

Da nun aber $f(x)$ nach Voraussetzung eine stetige Funktion ist, so wird

$$(13.)\quad G_\alpha - K_\alpha = \delta_\alpha$$

beliebig klein, wenn man nur n hinreichend groß macht. Wählt man unter den Differenzen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ die größte aus und bezeichnet sie mit δ, so wird

$$(x_\alpha - x_{\alpha-1})(G_\alpha - K_\alpha) \leqq (x_\alpha - x_{\alpha-1})\delta,$$

oder

$$(14.)\quad (x_\alpha - x_{\alpha-1})G_\alpha \leqq (x_\alpha - x_{\alpha-1})(K_\alpha + \delta)$$

und

$$(15.)\quad \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}(x_\alpha - x_{\alpha-1})G_\alpha \leqq \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}(x_\alpha - x_{\alpha-1})K_\alpha + (b - a)\delta.$$

Deshalb wird mit Rücksicht auf Gleichung (11a.) und Ungleichung (12.)

$$(16.)\quad \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}(x_\alpha - x_{\alpha-1})K_\alpha \leqq F(b) - F(a) \leqq \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}(x_\alpha - x_{\alpha-1})G_\alpha,$$

oder, wenn man der Kürze wegen $\sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})K_\alpha$ mit S bezeichnet und die Ungleichung (15.) beachtet,

$$(17.)\quad S \leqq F(b) - F(a) \leqq S + (b-a)\delta.$$

Da aber $b-a$ eine endliche Größe ist, und δ *beliebig klein* wird für *hinreichend große* Werte von n, so nähert sich $F(b) - F(a)$ dem Grenzwerte

$$\lim S = \lim \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}(x_\alpha - x_{\alpha-1})K_\alpha.$$

Diese Summe hat auch, weil $f(x)$ in dem Intervall von a bis b stetig ist, einen *endlichen* Wert. Bezeichnet man nämlich mit G die *größte* unter den Größen $G_1, G_2, \ldots G_n$ und mit K die *kleinste* unter den Größen $K_1, K_2, \ldots K_n$, so wird

$$\sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})K_\alpha > \sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})K = (b-a)K,$$
$$\sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})G_\alpha < \sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})G = (b-a)G.$$

Die Ungleichung (16.) wird also noch verstärkt, indem man schreibt

$$(18.)\quad (b-a)K < F(b) - F(a) < (b-a)G.$$

Da $(b-a)K$ und $(b-a)G$ endliche Größen sind, so ist auch $F(b) - F(a)$ eine endliche Größe.

In gleicher Weise wie die Ungleichungen (16.) und (17.) kann man auch die Ungleichungen

$$(19.)\quad \sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})K_\alpha \leqq \sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})f(x_{\alpha-1}) \leqq \sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})G_\alpha$$

und

$$(20.)\quad S \leqq \sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})f(x_{\alpha-1}) \leqq S + (b-a)\delta$$

ableiten und daraus schließen, daß

$$(21.)\quad F(b) - F(a) = \lim \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}(x_\alpha - x_{\alpha-1})f(x_{\alpha-1})$$

ist. Vertauscht man noch der Kürze wegen x_α mit x und die verschwindend kleine Differenz $x_\alpha - x_{\alpha-1}$ mit dx, bezeichnet man ferner die Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen nicht mehr mit $\lim \Sigma$, sondern mit $\int$, so geht die Gleichung (21.) über in

$$(22.)\quad F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx,$$

wobei die beiden Grenzen a und b bei dem Summenzeichen $\int$ angeben, daß x alle Werte von a bis b durchlaufen soll.

Bisher war b unveränderlich gedacht, man darf aber für b auch die Veränderliche x setzen und erhält dadurch

(23.) $$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)dx.$$

Um nun noch zu zeigen, daß die Ableitung von $F(x)$ mit $f(x)$ übereinstimmt, beachte man Gleichung (11 a.), nach welcher man

(24.) $$F(x_n) - F(a) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} (x_\alpha - x_{\alpha-1}) f[x_{\alpha-1} + \Theta_\alpha(x_\alpha - x_{\alpha-1})]$$

erhält. Ebenso ist

(25.) $$F(x_{n-1}) - F(a) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n-1} (x_\alpha - x_{\alpha-1}) f[x_{\alpha-1} + \Theta_\alpha(x_\alpha - x_{\alpha-1})],$$

folglich wird

(26.) $$F(x_n) - F(x_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \Theta_n(x_n - x_{n-1})],$$

oder

(27.) $$\frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f[x_{n-1} + \Theta_n(x_n - x_{n-1})]$$

und für $\lim x_n = \lim x_{n-1} = x$

(28.) $$F'(x) = f(x).$$

Aus den Gleichungen

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) \quad \text{und} \quad \int_b^a F'(x)dx = F(a) - F(b)$$

folgt

(29.) $$\int_a^b F'(x)dx = -\int_b^a F'(x)dx,$$

oder in Worten:

Satz 2. *Man darf die obere und die untere Grenze eines bestimmten Integrals miteinander vertauschen, wenn man gleichzeitig das Vorzeichen des Integrals umkehrt.*

Hierbei ist in dem einen Integral die *untere* Grenze größer als die *obere* und infolgedessen dx negativ.

Aus den Gleichungen

$$\int_a^c F'(x)dx = F(c) - F(a) \quad \text{und} \quad \int_c^b F'(x)dx = F(b) - F(c)$$

folgt

(30.) $$\int_a^b F'(x)dx = \int_a^c F'(x)dx + \int_c^b F'(x)dx,$$

oder in Worten:

Satz 3. *Man kann ein bestimmtes Integral in zwei andere zerlegen, indem man zwischen den Grenzen a und b eine beliebige Größe c einschaltet und das erste Integral zwischen den Grenzen a und c, das zweite Integral zwischen den Grenzen c und b berechnet.*

Am anschaulichsten wird der Sinn des Satzes durch die geometrische Deutung des bestimmten Integrals. Ist nämlich

$$y = f(x) = F'(x)$$

die Gleichung einer Kurve, so wird

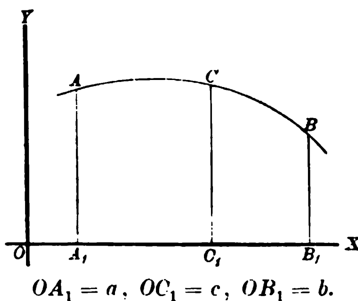


Fig. 7.

$OA_1 = a$, $OC_1 = c$, $OB_1 = b$.

$$F = \int_a^b y dx = \int_a^b F'(x) dx$$

der Flächeninhalt der ebenen Figur A_1B_1BA. Liegt nun c zwischen a und b, so wird die Figur durch die Gerade C_1C, welche im Abstande c parallel zur Y-Achse gezogen ist (vergl. Fig. 7), in zwei Teile zerlegt, nämlich in

$$A_1C_1CA = \int_a^c F'(x) dx \quad \text{und} \quad C_1B_1BC = \int_c^b F'(x) dx.$$

Der Satz bleibt aber auch dann noch richtig, wenn c *nicht* zwischen a und b liegt. Es sei zunächst (vergl. Fig. 8) $a < b < c$, so ist unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen

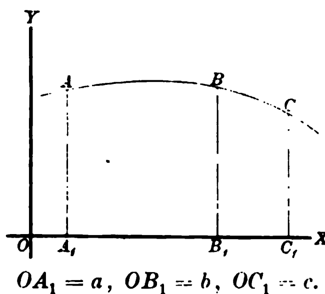


Fig. 8.

$OA_1 = a$, $OB_1 = b$, $OC_1 = c$.

$$A_1C_1CA = \int_a^c F'(x) dx,$$

$$B_1C_1CB = \int_b^c F'(x) dx,$$

also

$$A_1B_1BA = A_1C_1CA - B_1C_1CB = \int_a^c F'(x) dx - \int_b^c F'(x) dx,$$

oder nach Satz 2

$$A_1B_1BA = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^c F'(x)dx + \int_c^b F'(x)dx.$$

Ist endlich (vergl. Fig. 9) $c < a < b$, so ist unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen

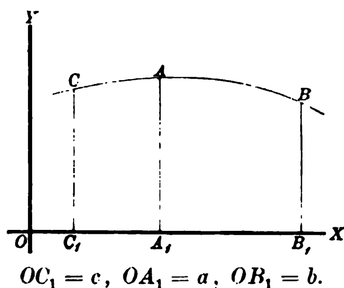


Fig. 9.

$OC_1 = c$, $OA_1 = a$, $OB_1 = b$.

$$C_1B_1BC = \int_c^b F'(x)dx,$$

$$C_1A_1AC = \int_c^a F'(x)dx,$$

also

$$A_1B_1BA = C_1B_1BC - C_1A_1AC = \int_c^b F'(x)dx - \int_c^a F'(x)dx,$$

oder mit Rücksicht auf Satz 2

$$\int_a^b F'(x)dx = \int_a^c F'(x)dx + \int_c^b F'(x)dx.$$

Der Satz läßt sich noch in der Weise verallgemeinern, daß man zwischen den Grenzen a und b nicht *eine*, sondern *beliebig viele* Grenzen einschaltet. Dadurch erhält man z. B.

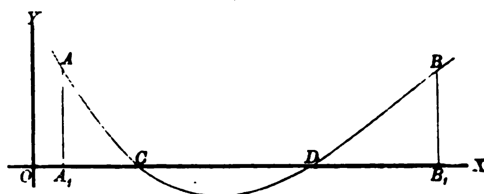
$$(31.)\quad \int_a^b F'(x)dx = \int_a^c F'(x)dx + \int_c^d F'(x)dx + \int_d^e F'(x)dx + \int_e^b F'(x)dx,$$

wobei c, d und e ganz beliebige Zahlen sind.

Voraussetzung ist dabei, daß die Funktion $F'(x)$ in den einzelnen Intervallen a bis c, c bis d, d bis e, e bis b eindeutig und stetig ist.

Bei der geometrischen Deutung des bestimmten Integrals war bisher vorausgesetzt worden, daß der Bogen AB der Kurve, welche der Gleichung $y = F'(x)$, oder $y = f(x)$ entspricht, entweder seiner ganzen Länge nach *oberhalb*, oder seiner ganzen Länge nach *unterhalb* der X-Achse liegt. Jetzt kann man aber die geometrische Deutung auch auf den

Fig. 10.



Fall übertragen, wo der Bogen AB teilweise *über*, teilweise *unter* der X-Achse liegt. Schneidet der Bogen die X-Achse z. B. in den Punkten C und D (Fig. 10), und setzt man

$$OA_1 = a\,,\quad OC = c\,,\quad OD = d\,,\quad OB_1 = b\,,$$

so wird

$$(32.)\qquad \int\limits_a^b F'(x)dx = \int\limits_a^c F'(x)dx + \int\limits_c^d F'(x)dx + \int\limits_d^b F'(x)dx,$$

wobei für die einzelnen Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung die frühere Voraussetzung gilt, so daß man für das erste und dritte Integral einen *positiven* Wert, für das zweite Integral dagegen einen *negativen* Wert erhält.

§ 3.

Einige Hilfssätze für die Ausführung der Integration.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 7 und 8.)

Satz 1. *Ist die Differential-Funktion unter dem Integralzeichen mit einem konstanten Faktor multipliziert, so darf man diesen konstanten Faktor vor das Integralzeichen setzen*, d. h. es ist

$$\int AF'(x)dx = A\int F'(x)dx.$$

Beweis. Es ist

$$(1.)\qquad d[AF(x) + C] = AF'(x)dx,$$

hieraus folgt

$$(2.)\qquad \int AF'(x)dx = AF(x) + C.$$

Ferner ist

$$(3.)\qquad \int F'(x)dx = F(x) + C_1,$$

also

$$(4.)\qquad A\int F'(x)dx = AF(x) + A\,.\,C_1.$$

Da nun die Werte der Integrations-Konstanten ganz beliebig sind, so darf man $A \cdot C_1 = C$ machen und erhält demnach aus den Gleichungen (2.) und (4.)

$$\int AF'(x)dx = A\int F'(x)dx. \tag{5.}$$

Satz 2. *Das Integral einer Summe von Differential-Funktionen ist gleich der Summe der Integrale dieser einzelnen Differential-Funktionen*; es ist also

$$\int [F'(x)dx + G'(x)dx] = \int F'(x)dx + \int G'(x)dx.$$

Beweis. Weil

$$d[F(x) + G(x) + C] = F'(x)dx + G'(x)dx, \tag{6.}$$

so ist

$$\int [F'(x)dx + G'(x)dx] = F(x) + G(x) + C. \tag{7.}$$

Ferner ist

$$\int F'(x)dx = F(x) + C_1, \tag{8.}$$

$$\int G'(x)dx = G(x) + C_2. \tag{9.}$$

Durch Addition der Gleichungen (8.) und (9.) erhält man

$$\int F'(x)dx + \int G'(x)dx = F(x) + G(x) + C_1 + C_2. \tag{10.}$$

Die Integrations-Konstanten C, C_1, C_2 haben auch hier *ganz beliebige Werte*, so daß man $C_1 + C_2 = C$ machen darf. Man erhält demnach aus den Gleichungen (7.) und (10.)

$$\begin{aligned} \int [F'(x)dx + G'(x)dx] &= \int [F'(x) + G'(x)]dx \\ &= \int F'(x)dx + \int G'(x)dx. \end{aligned} \tag{11.}$$

Dieser Satz läßt sich unmittelbar erweitern auf Summen von beliebig vielen Gliedern, so daß man erhält

$$\begin{aligned} \int [F'(x) + G'(x) + H'(x) + \cdots]dx \\ = \int F'(x)dx + \int G'(x)dx + \int H'(x)dx + \cdots; \end{aligned} \tag{12.}$$

sodann läßt er sich auch übertragen auf das Integral einer Differenz, so daß man erhält

$$\int [F'(x) - G'(x)]dx = \int F'(x)dx - \int G'(x)dx. \tag{13.}$$

§ 4.
Unmittelbare Integration einiger Funktionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 9 bis 25a.)

Aus der Erklärung des Integrals, nämlich aus der Formel

(1.) $$\int F'(x) = F(x) + C$$

ergibt sich ganz von selbst, wie man eine große Anzahl von Differential-Funktionen integrieren kann. Denn nimmt man die Funktion $F(x)$ beliebig an und bildet $F'(x)$, so erhält man durch Einsetzen in Gleichung (1.) sofort $\int F'(x)dx$.

Indem man für $F(x)$ besonders oft vorkommende Funktionen einsetzt, findet man ohne weiteres die folgenden Formeln:

(2.) $$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Hierbei darf m jeden beliebigen *positiven* oder *negativen*, *ganzzahligen* oder *gebrochenen* Wert haben. Eine *scheinbare* Ausnahme bildet nur der Wert $m = -1$, von welchem nachher noch ausführlich die Rede sein wird.

Besonders hervorgehoben sei noch der Fall $m = 0$, nämlich

(2a.) $$\int dx = x + C,$$

ein Resultat, das sich auch aus Formel Nr. 1 der Tabelle ergibt.

Mit Hilfe von Gleichung (2.) ist jetzt die Integration *jeder ganzen rationalen* Funktion ausführbar, denn nach den Sätzen des vorhergehenden Paragraphen wird

$$\int (ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)dx$$

$$= a\int x^n dx + a_1\int x^{n-1}dx + a_2\int x^{n-2}dx + \cdots + a_{n-1}\int x dx + a_n\int dx$$

$$= a\frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1\frac{x^n}{n} + a_2\frac{x^{n-1}}{n-1} + \cdots + a_{n-1}\frac{x^2}{2} + a_n x + C.$$

(3.) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

(3a.) $$\int e^x dx = e^x + C.$$

(4.) $$\int\frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Diese Formel bildet die *scheinbare* Ausnahme von Gleichung (2.), aus der man für $m = -1$

(5.) $$\int x^{-1}dx = \int\frac{dx}{x} = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + C,$$

oder

(6.) $$\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{0} + C = \infty + C$$

erhält. Das Integral selbst braucht deshalb aber nicht unendlich groß zu werden, weil man die Integrations-Konstante gleich $-\infty$ setzen kann. Dadurch bringt man das Integral auf die unbestimmte Form $\infty - \infty$, zu deren Ermittelung man in Gleichung (2.)

(7.) $$C = -\frac{1}{m+1} + C'$$

setzen kann. Dadurch erhält man

(8.) $$\int x^m dx = \frac{x^{m+1} - 1}{m+1} + C'.$$

Für $\lim m = -1$ wird

(9.) $$\lim\frac{x^{m+1} - 1}{m+1} = \frac{0}{0},$$

und wenn man Zähler und Nenner einzeln nach m differentiiert (vergl. D.-R. § 65),

(10.) $$\lim\frac{x^{m+1} - 1}{m+1} = \lim\frac{x^{m+1}\ln x}{1} = \ln x,$$

also in Übereinstimmung mit Gleichung (4.)

(11.) $$\int\frac{dx}{x} = \ln x + C'.$$

(12.) $$\int\cos x dx = \sin x + C.$$

(13.) $$\int\sin x dx = -\cos x + C.$$

(14.) $$\int\frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C.$$

(15.) $$\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

(16.) $$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'.$$

(17.) $$\int\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C'.$$

(18.) $$\int \mathfrak{Cos}\, x dx = \mathfrak{Sin}\, x + C.$$

(19.) $$\int \mathfrak{Sin}\, x dx = \mathfrak{Cos}\, x + C.$$

(20.) $$\int\frac{dx}{\mathfrak{Cos}^2 x} = \mathfrak{Tg}\, x + C.$$

(21.) $$\int\frac{dx}{\mathfrak{Sin}^2 x} = -\mathfrak{Ctg}\, x + C.$$

(22.) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\, x + C = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$$

(23.) $$\pm\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cos}\, x + C = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) + C$$
$$= \pm\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C^{*}).$$

(24.) $$\int\frac{dx}{1-x^2} = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\, x + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C.$$

(25.) $$\int\frac{dx}{1-x^2} = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Ctg}\, x + C' = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C''.$$

Es erscheint auffallend, daß man für $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zwei Werte, nämlich

$$\arcsin x + C \quad \text{und} \quad -\arccos x + C'$$

*) Man kann sich leicht davon überzeugen, daß

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1}) = -\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

wird, denn es ist

$$x-\sqrt{x^2-1} = \frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}},$$

folglich ist

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1}) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) = -\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

findet. Die Richtigkeit beider Resultate kann man zunächst durch Differentiation prüfen, wobei sich

$$d(\arcsin x + C) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

und

$$d(-\arccos x + C') = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ergibt. Nach Satz 3 in § 1 können sich daher die Funktionen $\arcsin x$ und $-\arccos x$ nur durch eine Konstante voneinander unterscheiden. In der Tat, ist in einem Kreise mit dem Halbmesser 1

$$OF = ED = x$$

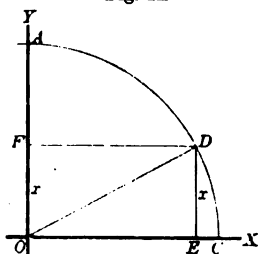


Fig. 11.

(vergl. Fig. 11), so wird

(26.) $CD = \arcsin x, \quad DA = \arccos x,$

also

(27.) $\arcsin x + \arccos x = CD + DA = \frac{\pi}{2},$

oder

(28.) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$

Dies kann man auch unabhängig von der Figur zeigen, indem man

(29.) $\arcsin x = t, \quad \text{also} \quad x = \sin t$

setzt; dann wird

(30.) $x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \quad \text{oder} \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - t,$

folglich ist

(31.) $t = \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$

Ebenso findet man

(32.) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x,$

wodurch man erkennt, daß Gleichung (17.) richtig ist.

Schließlich erkennt man aus den Gleichungen

(33.) $\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\, x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right),$

$$(34.)\quad \mathfrak{ArCtg}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \ln(-1)\right],$$

daß

$$(35.)\quad \mathfrak{ArTg}\,x = \mathfrak{ArCtg}\,x + \tfrac{1}{2}\ln(-1)$$

wird, daß also die Gleichungen (24.) und (25.) richtig sind. Beschränkt man aber die Untersuchung auf reelle Größen, so muß man schreiben

$$(36.)\quad \int\frac{dx}{1-x^2} = \mathfrak{ArTg}\,x + C, \quad \text{wenn} \quad |x| < +1,$$

$$(37.)\quad \int\frac{dx}{1-x^2} = \mathfrak{ArCtg}\,x + C', \quad \text{wenn} \quad |x| > +1.$$

§ 5.

Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll x^3dx integrieren.

Auflösung. Setzt man in Formel Nr. 9 der Tabelle $m = 3$, so folgt ohne weiteres

$$\int x^3dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C.$$

Aufgabe 2. Man soll $7x^3dx$ integrieren.

Auflösung. Nach Formel Nr. 7 und 9 der Tabelle erhält man

$$\int 7x^3dx = 7\int x^3dx = 7\frac{x^4}{4} + C.$$

Aufgabe 3. Man soll $\sqrt[3]{x}\,dx$ integrieren.

Auflösung. Es ist

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}};$$

hieraus ergibt sich, daß

$$\int\sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C,$$

oder

$$\int\sqrt[3]{x}\,dx = \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C.$$

Aufgabe 4. Man soll folgende Differential-Funktionen integrieren.

$$\frac{dx}{x^3},\quad \sqrt[3]{x^5}\,dx,\quad \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}},\quad 4\sqrt[3]{x}\,dx,\quad \frac{4\,dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

Auflösung. Es wird

$$\text{I.}\quad \int\frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}dx=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C.$$

$$\text{II.}\quad \int\sqrt[3]{x^5}\,dx=\int x^{\frac{5}{3}}\,dx=\frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}+C=\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}+C=\tfrac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}+C.$$

$$\text{III.}\quad \int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}=\int x^{-\frac{5}{3}}dx=\frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1}+C=\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}+C,$$

oder

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}=-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}+C.$$

$$\text{IV.}\quad \int 4\sqrt[3]{x}\,dx=4\int\sqrt[3]{x}\,dx=4\int x^{\frac{1}{3}}\,dx=4\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C,$$

$$\int 4\sqrt[3]{x}\,dx=4\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C=3\sqrt[3]{x^4}+C.$$

$$\text{V.}\quad \int\frac{4}{\sqrt[3]{x}}\,dx=4\int x^{-\frac{1}{3}}dx=4\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=4\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C,$$

$$\int\frac{4}{\sqrt[3]{x}}\,dx=4\cdot\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C=6\sqrt[3]{x^2}+C.$$

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Funktion

$$\left(x^4+7\sqrt[2]{x}-\frac{11}{\sqrt[3]{x^5}}+\frac{5}{x^6}\right)dx$$

integrieren.

Auflösung. Nach Formel Nr. 8 der Tabelle ergibt sich

$$\int\left(x^4+7\sqrt[2]{x}-\frac{11}{\sqrt[3]{x^5}}+\frac{5}{x^6}\right)dx$$

$$=\int x^4dx+\int 7\sqrt[2]{x}\,dx-\int\frac{11}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx+\int\frac{5}{x^6}\,dx$$

$$=\int x^4dx+7\int x^{\frac{1}{2}}\,dx-11\int x^{-\frac{5}{3}}\,dx+5\int x^{-6}dx.$$

Wenn man die Integrationen, welche auf der rechten Seite dieser Gleichung angedeutet sind, nach Formel Nr. 9 der Tabelle ausführt und dabei die vier auftretenden Integrations-Konstanten in eine einzige Konstante zusammenfaßt, so findet man

$$\int\left(x^4 + 7\sqrt[2]{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6}\right)dx$$

$$= \frac{x^{4+1}}{4+1} + 7\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 11\frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} + 5\frac{x^{-6+1}}{-6+1} + C$$

$$= \frac{x^5}{5} + 7\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 11\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + 5\frac{x^{-5}}{-5} + C$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{14}{3}\sqrt{x^3} + \frac{33}{2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^5} + C.$$

Aufgabe 6. Man soll den Ausdruck

$$\int\left(\frac{x^3}{4} - 7\sqrt[5]{x^9} + \frac{4}{7}x^4 - \frac{4}{3x^2}\right)dx$$

berechnen.

Auflösung. Man erhält zunächst

$$\int\left(\frac{x^3}{4} - 7\sqrt[5]{x^9} + \frac{4}{7}x^4 - \frac{4}{3x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int x^3 dx - 7\int x^{\frac{9}{5}}dx + \frac{4}{7}\int x^4 dx - \frac{4}{3}\int x^{-2}dx$$

$$= \frac{1}{4}\frac{x^{3+1}}{3+1} - 7\frac{x^{\frac{9}{5}+1}}{\frac{9}{5}+1} + \frac{4}{7}\frac{x^{4+1}}{4+1} - \frac{4}{3}\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C.$$

Dies gibt

$$\int\left(\frac{x^3}{4} - 7\sqrt[5]{x^9} + \frac{4}{7}x^4 - \frac{4}{3x^2}\right)dx = \frac{x^4}{16} - \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^{14}} + \frac{4}{35}x^5 + \frac{4}{3x} + C.$$

Aufgabe 7. Man soll den Ausdruck

$$\int(a\sin x + b\cos x + ce^x)dx$$

berechnen.

Auflösung. Durch Anwendung der Formeln Nr. 11, 13 und 14 der Tabelle erhält man

$$\int(a\sin x + b\cos x + ce^x)dx = -a\cos x + b\sin x + ce^x + C.$$

Aufgabe 8. Man soll den Ausdruck

$$\int\left(ma^x dx + n\frac{dx}{x} + p\frac{dx}{\cos^2 x}\right)$$

berechnen.

Auflösung. Durch Anwendung der Formeln Nr. 11, 12 und 15 der Tabelle erhält man

$$\int\left(ma^x dx + n\frac{dx}{x} + p\frac{dx}{\cos^2 x}\right) = m\frac{a^x}{\ln a} + n\ln x + p\,\mathrm{tg}\,x + C.$$

Aufgabe 9. Man soll den Ausdruck

$$\int\left(\frac{dx}{1+x^2} + a\frac{dx}{\mathfrak{Sin}^2 x} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

berechnen.

Auflösung. Durch Anwendung der Formeln Nr. 18, 22 und 17 der Tabelle erhält man

$$\int\left(\frac{dx}{1+x^2} + a\frac{dx}{\mathfrak{Sin}^2 x} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \mathrm{arctg}\,x - a\,\mathfrak{Ctg}\,x + \arcsin x + C.$$

$$= -\mathrm{arcctg}\,x - a\,\mathfrak{Ctg}\,x - \arccos x + C.$$

§ 6.

Allgemeine Bemerkungen.

Im allgemeinen wird bei Anwendung der Hauptformel

(1.) $$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

nicht die Funktion $F(x)$ gegeben sein, sondern nur ihre Ableitung

(2.) $$F'(x) = f(x).$$

Dann wird man in den meisten Fällen $F(x)$ nicht unmittelbar angeben können; man wird vielmehr zur Ermittelung von $F(x)$ Kunstgriffe anwenden, von denen zunächst die folgenden erläutert werden mögen:

1.) *Integration durch Substitution,*

2.) *Integration durch Zerlegung,*

3.) *partielle Integration.*

II. Abschnitt.

Integration durch Substitution.

§ 7.

Erklärung der Substitutions-Methode.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 26.)

Häufig kann man das vorgelegte Integral auf ein bekanntes zurückführen, indem man statt der ursprünglichen Integrations-Veränderlichen x durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt \tag{1.}$$

eine andere Veränderliche t als *neue Integrations-Veränderliche* einführt. Die gesuchte Funktion $F(x)$ geht dadurch über in

$$F(x) = F[\varphi(t)] = G(t), \tag{2.}$$

d. h. in eine *Funktion von einer Funktion*, für welche nach D.-R. Formel Nr. 36 der Tabelle

$$\frac{dG(t)}{dt} = G'(t) = \frac{dF(x)}{dt} = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = F'(x)\varphi'(t), \tag{3.}$$

oder

$$\begin{aligned} dG(t) = G'(t)dt = F'(x)dx &= F'[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt \\ &= f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt \end{aligned} \tag{4.}$$

wird. Deshalb findet man die gesuchte Funktion $G(t)$ aus der Gleichung

$$\int f(x)dx = G(t) = \int G'(t)dt = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt. \tag{5.}$$

In vielen Fällen wird man die Funktion $\varphi(t)$ passend so wählen können, daß sich die Funktion $G(t)$ leichter ermitteln läßt als die Funktion $F(x)$. Drückt man dann in

dem gefundenen Resultate die Größe t, der Gleichung (1.) entsprechend, durch x aus, so ist die Integration vollzogen.

Dieses Verfahren, welches man *„Integration durch Substitution“* nennt, wird am besten durch Beispiele erläutert.

§ 8.

Beispiele für die Substitutions-Methode.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 27 bis 30.)

Aufgabe 1. $\int \frac{dx}{x + a} = ?$

Auflösung. Setzt man

(1.) $x + a = t, \quad \text{also} \quad x = t - a, \quad dx = dt,$

so wird nach Formel Nr. 12 der Tabelle

(2.) $\int \frac{dx}{x + a} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(x + a).$ *)

In ähnlicher Weise findet man

(3.) $\int \frac{dx}{x - a} = \ln(x - a).$

Aufgabe 2. $\int \cos(x + a)dx = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei Aufgabe 1 findet man nach Formel Nr. 13 der Tabelle

(4.) $\int \cos(x + a)dx = \sin(x + a).$

Aufgabe 3. $\int \sin(a + bx)dx = ?$

Auflösung. Setzt man

(5.) $a + bx = t, \quad \text{also} \quad x = \frac{t - a}{b}, \quad dx = \frac{dt}{b},$

so erhält man nach Formel Nr. 14 der Tabelle

(6.) $\int \sin(a + bx)dx = \frac{1}{b}\int \sin t\, dt = -\frac{1}{b}\cos t = -\frac{1}{b}\cos(a + bx).$

*) Die Integrations-Konstante möge hier und bei den folgenden Aufgaben der Kürze wegen fortgelassen werden.

Aufgabe 4. $\int \frac{dx}{\cos^2(4-3x)} = ?$

Auflösung. Indem man

(7.) $4 - 3x = t, \quad \text{also} \quad -3dx = dt$

setzt, erhält man nach Formel Nr. 15 der Tabelle

(8.) $\int \frac{dx}{\cos^2(4-3x)} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\frac{1}{3}\operatorname{tg} t = -\frac{1}{3}\operatorname{tg}(4-3x).$

Aufgabe 5. $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = ?$

Auflösung. Indem man

(9.) $x = 2t, \quad \text{also} \quad dx = 2dt$

setzt, erhält man

(10.) $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int \cos t\, dt = 2\sin t = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right).$

In ähnlicher Weise gelangt man zu den folgenden Resultaten:

(11.) $\int e^{a+bx}dx = \frac{1}{b}\int e^{a+bx}.\, d(a+bx) = \frac{1}{b}e^{a+bx}.$

(12.) $\int e^{\frac{x}{a}}dx = a\int e^{\frac{x}{a}}d\left(\frac{x}{a}\right) = ae^{\frac{x}{a}}.$

(13.) $\int e^{-\frac{x}{a}}dx = -a\int e^{-\frac{x}{a}}d\left(-\frac{x}{a}\right) = -ae^{-\frac{x}{a}}.$

(14.) $\int \mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right)dx = a\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right).$

(15.) $\int \mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right)dx = a\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right).$

(16.) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)} = n\int \frac{d\left(\frac{x}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)} = -n\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{n}\right).$

(17.) $\int \frac{dx}{1+(a+bx)^2} = \frac{1}{b}\int \frac{d(a+bx)}{1+(a+bx)^2} = \frac{1}{b}\operatorname{arctg}(a+bx).$

(18.) $\int (a+bx)^3dx = \frac{1}{b}\int (a+bx)^3d(a+bx) = \frac{(a+bx)^4}{4b}.$

$$(19.)\quad \int\sqrt[5]{(a+bx)^3}\,dx = \frac{1}{b}\int(a+bx)^{\frac{3}{5}}d(a+bx) = \frac{5\sqrt[5]{(a+bx)^8}}{8b}.$$

$$(20.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt[7]{(a+bx)^4}} = \frac{1}{b}\int(a+bx)^{-\frac{4}{7}}d(a+bx) = \frac{7\sqrt[7]{(a+bx)^3}}{3b}.$$

Aufgabe 6. $\int\frac{dx}{a^2+x^2} = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(21.)\quad x = at,\quad \text{also}\quad dx = adt,\quad t = \frac{x}{a},$$

so erhält man nach Formel Nr. 18 der Tabelle

$$(22.)\quad \int\frac{dx}{a^2+x^2} = \int\frac{adt}{a^2+a^2t^2} = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Aufgabe 7. $\int\frac{dx}{x^2-a^2} = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 25 und 25a der Tabelle

$$(23.)\quad \int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2-1} = -\frac{1}{a}\,\mathfrak{ArTg}\,t$$

$$= -\frac{1}{a}\,\mathfrak{ArTg}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right),\quad \text{wenn}\quad |x| < a,$$

oder

$$(24.)\quad \int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2-1} = -\frac{1}{a}\,\mathfrak{ArCtg}\,t$$

$$= -\frac{1}{a}\,\mathfrak{ArCtg}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right),\quad \text{wenn}\quad |x| > a > 0.$$

Aufgabe 8. $\int\frac{xdx}{a^2+x^2} = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(25.)\quad a^2+x^2 = t,\quad \text{also}\quad 2xdx = dt,$$

so findet man

$$(26.)\quad \int\frac{xdx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t = \frac{1}{2}\ln(a^2+x^2).$$

Durch Vertauschung von $+a^2$ mit $-a^2$ erhält man aus Gleichung (26.)

(27.) $$\int\frac{xdx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2-a^2).$$

§ 9.

Integration von einigen irrationalen Funktionen durch Substitution.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 31 bis 42.)

Aufgabe 1. $$\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=?$$

Auflösung. Setzt man

(1.) $$\sqrt{a^2-x^2}=t,\quad \text{also}\quad a^2-x^2=t^2,$$

so wird

$$-xdx=tdt,$$

und

(2.) $$\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{-tdt}{t}=-\int dt=-t=-\sqrt{a^2-x^2}.$$

Aufgabe 2. $$\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}=?$$

Auflösung. Setzt man

(3.) $$\sqrt{a^2+x^2}=t,\quad \text{also}\quad a^2+x^2=t^2,$$

so wird

$$xdx=tdt$$

und

(4.) $$\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\int\frac{tdt}{t}=\int dt=t=+\sqrt{a^2+x^2}.$$

Durch Vertauschung von $+a^2$ mit $-a^2$ findet man aus Gleichung (4.)

(5.) $$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}}=+\sqrt{x^2-a^2}.$$

Die in den Gleichungen (2.), (4.) und (5.) enthaltenen Resultate hätte man auch leicht durch *unmittelbare* Integration finden können, wenn man von den Formeln Nr. 31

bis 33 der Tabelle für die Differential-Rechnung ausgegangen wäre.

Aufgabe 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ?$

Auflösung. Setzt man

(6.) $$x = at, \quad \text{also} \quad dx = adt, \quad t = \frac{x}{a},$$

so erhält man nach Formel Nr. 17 der Tabelle

(7.) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{adt}{\sqrt{a^2 - a^2t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Aufgabe 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man hier mit Rücksicht auf Formel Nr. 23 der Tabelle

(8.) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\,t = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right).$$

Ebenso findet man mit Rücksicht auf Formel Nr. 24 der Tabelle

(9.) $$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left(\frac{x \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)$$
$$= \pm \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)^{*)}.$$

Aufgabe 5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = ?$

Auflösung. Setzt man

(10.) $$x = \frac{a}{t}, \quad \text{also} \quad dx = -\frac{adt}{t^2},$$
$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{t^2}} = \frac{a}{t}\sqrt{t^2 - 1}, \quad t = \frac{a}{x},$$

---

*) Vergl. die Anmerkung auf Seite 20.

dann wird

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{-adt\,.\,t\,.\,t}{t^2\,.\,a\,.\,a\sqrt{t^2-1}}=-\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}\,;$$

dies gibt nach Formel Nr. 24 der Tabelle

$$(11.)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{a}\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cos}\,t=-\frac{1}{a}\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right),$$

oder

$$(12.)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{a}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\left(\frac{a}{x}\right)=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right).$$

Aufgabe 6. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man

$$(13.)\quad \int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{-adt\,.\,t^2\,.\,t}{t^2\,.\,a^2\,.\,a\sqrt{t^2-1}}=-\frac{1}{a^2}\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}},$$

also nach Gleichung (5.)

$$(14.)\quad \int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{a^2}\sqrt{t^2-1}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}.$$

Aufgabe 7. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=?$

Auflösung. Setzt man wieder

$$(15.)\quad x=\frac{a}{t},\quad\text{also}\quad dx=-\frac{adt}{t^2},$$

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{t^2}}=\frac{a}{t}\sqrt{t^2+1},\quad t=\frac{a}{x},$$

so wird

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\int\frac{-adt\,.\,t\,.\,t}{t^2\,.\,a\,.\,a\sqrt{t^2+1}}=-\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}};$$

dies gibt nach Formel Nr. 23 der Tabelle

$$(16.)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=-\frac{1}{a}\mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\,t=-\frac{1}{a}\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right),$$

oder

$$17.)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right).$$

Aufgabe 8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der orhergehenden Aufgabe findet man

$$18.)\quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{-adt\,.\,t^2\,.\,t}{t^2\,.\,a^2\,.\,a\sqrt{t^2+1}} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}},$$

lso nach Gleichung (4.)

$$9.)\quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a^2}\sqrt{t^2+1} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}.$$

Aufgabe 9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = ?$

Auflösung. Setzt man wieder

$$).)\qquad x = \frac{a}{t},\quad \text{also}\quad dx = -\frac{adt}{t^2},$$

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{t^2}-a^2} = \frac{a}{t}\sqrt{1-t^2},\quad t = \frac{a}{x},$$

wird

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{-adt\,.\,t\,.\,t}{t^2\,.\,a\,.\,a\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}};$$

s gibt nach Formel Nr. 17 der Tabelle

$$.)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a}\arcsin t = -\frac{1}{a}\arcsin\left(\frac{a}{x}\right).$$

Aufgabe 10. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der rhergehenden Aufgabe findet man

$$2.)\quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{-adt\,.\,t^2\,.\,t}{t^2\,.\,a^2\,.\,a\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}},$$

o nach Gleichung (2.)

(23.) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}} = +\frac{1}{a^2}\sqrt{1 - t^2} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x}.$$

§ 10.

Integrale von der Form $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 43 bis 52.)

Aufgabe 1. $$\int \frac{dx}{x \ln x} = ?$$

Auflösung. Setzt man

(1.) $$t = \ln x, \quad \text{also} \quad dt = \frac{dx}{x},$$

so erhält man

(2.) $$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(\ln x).$$

Aufgabe 2. $$\int \frac{(8x - 7)dx}{4x^2 - 7x + 11} = ?$$

Auflösung. Setzt man

(3.) $$4x^2 - 7x + 11 = t, \quad \text{also} \quad (8x - 7)dx = dt,$$

so erhält man

(4.) $$\int \frac{(8x - 7)dx}{4x^2 - 7x + 11} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(4x^2 - 7x + 11).$$

Aufgabe 3. $$\int \frac{(12x^3 + 15x^2 - 4x + 8)dx}{3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 8x - 7} = ?$$

Auflösung. Setzt man

(5.) $$3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 8x - 7 = t,$$

also

$$(12x^3 + 15x^2 - 4x + 8)dx = dt,$$

so erhält man

(6.) $$\int \frac{(12x^3 + 15x^2 - 4x + 8)dx}{3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 8x - 7} = \int \frac{dt}{t} = \ln t$$

$$= \ln(3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 8x - 7$$

Die in den letzten Aufgaben angewendete Methode bestand darin, daß man das Integral auf die Form $\int \frac{dt}{t}$ brachte. Dieses Verfahren ist immer anwendbar, wenn unter dem Integralzeichen ein Bruch steht, dessen Zähler das Differential des Nenners ist. Setzt man nämlich

(7.) $$f(x) = t, \quad \text{also} \quad f'(x)dx = dt,$$

so erhält man

(8.) $$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln[f(x)]$$

und damit den

Satz. *Steht unter dem Integralzeichen ein Bruch, dessen Zähler das Differential des Nenners ist, so ist das Integral gleich dem natürlichen Logarithmus des Nenners.*

Bei den Anwendungen dieses Satzes wird man allerdings häufig mit der Funktion unter dem Integralzeichen erst eine Umformung vornehmen müssen, um sie auf die beschriebene Form zu bringen, wie man aus den hier folgenden Aufgaben ersehen kann.

Aufgabe 4. $\int \text{tg} x dx = ?$

Auflösung. Bekanntlich ist $\text{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, so daß man erhält

(9.) $$\int \text{tg} x dx = -\int \frac{-\sin x dx}{\cos x}.$$

Jetzt steht unter dem Integralzeichen ein Bruch, dessen Zähler das Differential des Nenners ist, folglich ist das Integral der natürliche Logarithmus des Nenners, und man erhält

(10.) $$\int \text{tg} x dx = -\ln(\cos x).$$

In ähnlicher Weise findet man

(11.) $$\int \text{ctg} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \ln(\sin x).$$

Aufgabe 5. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = ?$

Auflösung. Dividiert man Zähler und Nenner des Bruches unter dem Integralzeichen durch $\cos^2 x$, so erhält man

(12.) $$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x},$$

folglich wird

(13.) $$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln(\operatorname{tg} x) = -\ln(\operatorname{ctg} x).$$

Aufgabe 6. $\int \frac{dx}{\sin x} = ?$

Auflösung. Diese Aufgabe läßt sich leicht auf die vorhergehende zurückführen, indem man

(14.) $$x = 2t$$

setzt und die bekannte Formel

$$\sin x = \sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

beachtet. Dadurch erhält man

(15.) $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{\sin t \cos t} = \ln(\operatorname{tg} t) = \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right] = -\ln\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Aufgabe 7. $\int \frac{dx}{\cos x} = ?$

Auflösung. Diese Aufgabe wird auf die vorhergehende zurückgeführt, indem man

(16.) $$x = \frac{\pi}{2} - t, \quad \text{also} \quad \cos x = \sin t, \quad dx = -dt$$

setzt; dann erhält man

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{dt}{\sin t} = -\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)\right],$$

oder

(17.) $$\int \frac{dx}{\cos x} = -\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right] = +\ln\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right].$$

Durch die Substitution

$$x = \frac{\pi}{2} - t$$

gehen die trigonometrischen Funktionen

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \mathrm{tg}\, x, \quad \mathrm{ctg}\, x$$

bezw. in die komplementären Funktionen von t über, nämlich in

$$\cos t, \quad \sin t, \quad \mathrm{ctg}\, t, \quad \mathrm{tg}\, t.$$

Bezeichnet man irgend eine Funktion von $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$ mit $f(\sin x, \cos x, \mathrm{tg}\, x, \mathrm{ctg}\, x)$, so wird

(18.) $\int f(\sin x, \cos x, \mathrm{tg}\, x, \mathrm{ctg}\, x)dx = -\int f(\cos t, \sin t, \mathrm{ctg}\, t, \mathrm{tg}\, t)dt.$

Hat man also das eine von diesen beiden Integralen gefunden, so ist damit auch das andere ermittelt. Hieraus erkennt man, daß gerade die Substitution $x = \frac{\pi}{2} - t$ sehr häufig mit gutem Erfolge verwendet werden kann.

Aufgabe 8. $\int \mathfrak{Tg}\, x dx = ?$

Auflösung. Hier ist

(19.) $\int \mathfrak{Tg}\, x dx = \int \frac{\mathfrak{Sin}\, x dx}{\mathfrak{Cof}\, x} = \int \frac{d(\mathfrak{Cof}\, x)}{\mathfrak{Cof}\, x} = \ln(\mathfrak{Cof}\, x).$

Aufgabe 9. $\int \mathfrak{Ctg}\, x dx = ?$

Auflösung. Hier ist

(20.) $\int \mathfrak{Ctg}\, x dx = \int \frac{\mathfrak{Cof}\, x dx}{\mathfrak{Sin}\, x} = \int \frac{d(\mathfrak{Sin}\, x)}{\mathfrak{Sin}\, x} = \ln(\mathfrak{Sin}\, x).$

Aufgabe 10. $\int \frac{dx}{\mathfrak{Sin}\, x\, \mathfrak{Cof}\, x} = ?$

Auflösung. Dividiert man Zähler und Nenner des Bruches unter dem Integralzeichen durch $\mathfrak{Cof}^2 x$, so erhält man

(21.) $\int \frac{dx}{\mathfrak{Sin}\, x\, \mathfrak{Cof}\, x} = \int \frac{\frac{dx}{\mathfrak{Cof}^2 x}}{\mathfrak{Tg}\, x} = \int \frac{d(\mathfrak{Tg}\, x)}{\mathfrak{Tg}\, x} = \ln(\mathfrak{Tg}\, x) = -\ln(\mathfrak{Ctg}\, x).$

Aufgabe 11. $\int\frac{dx}{\mathfrak{Sin}\,x} = ?$

Auflösung. Setzt man

(22.) $$x = 2t, \quad \text{also} \quad dx = 2dt,$$

so wird nach D.-R., Formel Nr. 53 der Tabelle

(23.) $$\mathfrak{Sin}\,x = \mathfrak{Sin}(2t) = 2\mathfrak{Sin}\,t\,\mathfrak{Cos}\,t,$$

also mit Rücksicht auf Gleichung (21.)

(24.) $$\int\frac{dx}{\mathfrak{Sin}\,x} = \int\frac{2dt}{2\mathfrak{Sin}\,t\,\mathfrak{Cos}\,t} = \int\frac{dt}{\mathfrak{Sin}\,t\,\mathfrak{Cos}\,t}$$
$$= \ln(\mathfrak{Tg}\,t) = \ln\left[\mathfrak{Tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right] = -\ln\left[\mathfrak{Ctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Aufgabe 12. $\int\frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}dx = ?$

Auflösung. Multipliziert man Zähler und Nenner des Bruches unter dem Integralzeichen mit e^x, so wird der Zähler, nämlich $(e^x+1)dx$, das Differential des Nenners e^x+x, folglich wird das Integral gleich dem Logarithmus des Nenners; d. h. es wird

(25.) $$\int\frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}dx = \int\frac{(e^x+1)dx}{e^x+x} = \ln(e^x+x).$$

§ 11.

Integrale von der Form $\int F'(t)dt$, wenn $t = f(x)$ irgend eine transzendente Funktion von x ist.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 53 bis 83.)

Aufgabe 1. $\int(\sin^4 x - 3\sin^3 x + 4\sin^2 x + 11\sin x)\cos x dx = ?$

Auflösung. Setzt man

(1.) $$\sin x = t, \quad \text{also} \quad \cos x dx = dt,$$

so erhält man

(2.) $$\int(\sin^4 x - 3\sin^3 x + 4\sin^2 x + 11\sin x)\cos x dx =$$
$$\int(t^4 - 3t^3 + 4t^2 + 11t)dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{3}{4}t^4 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{11}{2}t^2 =$$
$$\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{3}{4}\sin^4 x + \frac{4}{3}\sin^3 x + \frac{11}{2}\sin^2 x.$$

Man erkennt sofort, daß diese Substitution immer eine Vereinfachung herbeiführt, wenn unter dem Integralzeichen eine Funktion $F'(\sin x)$ von $\sin x$ steht, welche mit $\cos x dx$ multipliziert ist; denn man erhält dann

(3.) $$\int F'(\sin x)\cos x dx = \int F'(t)dt = F(\sin x).$$

Aufgabe 2. $$\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} = ?$$

Auflösung. Indem man die soeben angegebene Substitution benutzt, findet man

(4.) $$\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}dt = \frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2\sin^2 x}.$$

Häufig wird man die Funktion unter dem Integralzeichen erst umformen müssen, ehe man die in Gleichung (3.) angedeutete Substitution anwenden kann. Wie dies geschieht, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

Aufgabe 3. $$\int \cos^3 x dx = ?$$

Auflösung. Durch Anwendung der bekannten Formel

(5.) $$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

erhält man

(6.) $$\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x)\cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)\, d(\sin x)$$
$$= \int (1 - t^2)dt = t - \frac{1}{3}t^3 = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x.$$

Aufgabe 4. $$\int \cos^{2n+1} x dx = ?$$

Auflösung. In gleicher Weise wie bei Aufgabe 3 findet man hier

(7.) $$\int \cos^{2n+1} x dx = \int (1 - \sin^2 x)^n . \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^n . d(\sin x).$$

Durch den Faktor $d(\sin x)$ soll angedeutet werden, daß $\sin x$ zur neuen Integrations-Veränderlichen gewählt wird. Dadurch erhält man

$$(8.)\quad \int \cos^{2n+1} x dx = \int (1-t^2)^n dt$$
$$= \int \Big[1 - \binom{n}{1} t^2 + \binom{n}{2} t^4 - \binom{n}{3} t^6 + - \cdots$$
$$\pm \binom{n}{1} t^{2n-2} \mp t^{2n}\Big] dt$$
$$= t - \binom{n}{1}\frac{t^3}{3} + \binom{n}{2}\frac{t^5}{5} - \binom{n}{3}\frac{t^7}{7} + - \cdots$$
$$\pm \binom{n}{1}\frac{t^{2n-1}}{2n-1} \mp \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

Steht unter dem Integralzeichen eine Funktion von $\cos x$, multipliziert mit $\sin x dx$, so wird man durch die Substitution

$$(9.)\quad \cos x = t, \quad \text{also} \quad -\sin x dx = dt$$

eine Vereinfachung herbeiführen; denn es wird

$$(10.)\quad \int F'(\cos x) . \sin x dx = -\int F'(t) dt = -F(\cos x).$$

Hieraus ergibt sich ohne weiteres die Lösung der beiden folgenden Aufgaben.

Aufgabe 5. $\int (\cos^3 x + 2\cos^2 x + 3\cos x - 4)\sin x dx =$
$$+\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{3}{2}\cos^2 x + 4\cos x.$$

Aufgabe 6. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^4 x} = + \frac{1}{3\cos^3 x}.$

Aufgabe 7. $\int \sin^5 x dx = ?$

Auflösung. Durch Anwendung der bekannten Formel

$$(11.)\quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

erhält man

$$(12.)\quad \int \sin^5 x dx = \int (1-\cos^2 x)^2 . \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 d(\cos x)$$
$$= -\int (1 - 2t^2 + t^4) dt = -\Big(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\Big)$$
$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x.$$

Aufgabe 8. $\int \sin^{2n+1} x dx = ?$

Auflösung. In gleicher Weise wie bei Aufgabe 7 findet man hier

$$(13.)\quad \int \sin^{2n+1}x dx = \int (1 - \cos^2 x)^n . \sin x dx$$
$$= -\int (1 - \cos^2 x)^n . d(\cos x).$$

Auch hier soll durch den Faktor $d(\cos x)$ angedeutet werden, daß $\cos x$ zur neuen Integrations-Veränderlichen gewählt wird. Dadurch erhält man

$$(14.)\quad \int \sin^{2n+1}x dx = -\int (1 - t^2)^n dt,$$

also, abgesehen vom Vorzeichen und von der Bedeutung der Veränderlichen t, dasselbe Integral wie bei Aufgabe 4.

Aufgabe 9. $\int \sin^m x \cos^{2n+1} x dx = ?$

Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei Aufgabe 4 findet man hier

$$(15.)\quad \int \sin^m x \cos^{2n+1} x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^n . d(\sin x),$$

wo durch den Faktor $d(\sin x)$ angedeutet werden soll, daß $\sin x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird. Hierdurch erhält man z. B.

$$(16.)\quad \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x} = \int \frac{(1 - t^2)dt}{t^4} = \int (t^{-4} - t^{-2})dt$$
$$= -\frac{t^{-3}}{3} + \frac{t^{-1}}{1} = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x}.$$

Aufgabe 10. $\int \cos^m x \sin^{2n+1} x dx = ?$

Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei Aufgabe 8 findet man hier

$$(17.)\quad \int \cos^m x \sin^{2n+1} x dx = -\int \cos^m x (1 - \cos^2 x)^n d(\cos x),$$

wo durch den Faktor $d(\cos x)$ angedeutet werden soll, daß $\cos x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird. Hierdurch erhält man z. B.

$$(18.)\quad \int \cos^2 x \sin^3 x dx = -\int t^2(1 - t^2)dt = -\int (t^2 - t^4)dt$$
$$= -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5}.$$

Aufgabe 11. $\int(\text{tg}^3 x - 8\text{tg}^2 x + 5\text{tg}x - 7)\frac{dx}{\cos^2 x} = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(19.)\qquad \text{tg}x = t, \quad \text{also} \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt,$$

so erhält man

$$(20.)\quad \int(\text{tg}^3 x - 8\text{tg}^2 x + 5\text{tg}x - 7)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int(t^3 - 8t^2 + 5t - 7)dt$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{8t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} - 7t = \frac{\text{tg}^4 x}{4} - \frac{8\text{tg}^3 x}{3} + \frac{5\text{tg}^2 x}{2} - 7\text{tg}x.$$

Dieselbe Substitution kann man immer anwenden, wenn unter dem Integralzeichen eine Funktion von $\text{tg}x$, multipliziert mit $\frac{dx}{\cos^2 x}$, steht, d. h. es wird ganz allgemein

$$(21.)\qquad \int F'(\text{tg}x)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int F'(\text{tg}x) \,.\, d(\text{tg}x) = F(\text{tg}x),$$

wo durch den Faktor $d(\text{tg}x)$ angedeutet werden soll, daß $\text{tg}x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird.

Häufig wird man erst eine Umformung vornehmen müssen, ehe man auf die in Aufgabe 11 vorausgesetzte Form der Differential-Funktion geführt wird. Wie dies geschieht, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

Aufgabe 12. $\int(\text{tg}^3 x - 7\text{tg}^2 x + 2\text{tg}x + 9)dx = ?$

Auflösung. Damit die Funktion unter dem Integralzeichen eine Funktion von $\text{tg}x$, multipliziert mit $\frac{dx}{\cos^2 x}$, wird, muß man sie durch $\cos^2 x$ dividieren und deshalb auch mit

$$(22.)\qquad \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x}$$

multiplizieren. Dadurch erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (19.)

$$(23.)\quad \int(\mathrm{tg}^3x - 7\,\mathrm{tg}^2x + 2\,\mathrm{tg}x + 9)dx$$
$$= \int\frac{\mathrm{tg}^3x - 7\,\mathrm{tg}^2x + 2\,\mathrm{tg}x + 9}{\mathrm{tg}^2x + 1}\cdot\frac{dx}{\cos^2x}$$
$$= \int\frac{t^3 - 7t^2 + 2t + 9}{t^2 + 1}dt.$$

Nun ist, wie man durch Division findet,

$$(24.)\quad t^3 - 7t^2 + 2t + 9 = (t^2 + 1)(t - 7) + t + 16,$$

folglich wird mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 9, 30 und 18 der Tabelle

$$(25.)\quad \int\frac{t^3 - 7t^2 + 2t + 9}{t^2 + 1}dt = \int(t - 7)dt + \int\frac{tdt}{t^2 + 1} + 16\int\frac{dt}{1 + t^2}$$
$$= \frac{t^2}{2} - 7t + \tfrac{1}{2}\ln(t^2+1) + 16\,\mathrm{arctg}t,$$

oder, wenn man beachtet, daß

$$(26.)\quad t = \mathrm{tg}x,\quad 1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2x},\quad x = \mathrm{arctg}t$$

ist,

$$(27.)\quad \int(\mathrm{tg}^3x - 7\,\mathrm{tg}^2x + 2\,\mathrm{tg}x + 9)dx = \frac{\mathrm{tg}^2x}{2} - 7\,\mathrm{tg}x - \ln(\cos x) + 16x.$$

Dieses Verfahren führt zu der allgemeinen Formel

$$(28.)\quad \int f(\mathrm{tg}x)\,.\,dx = \int\frac{f(\mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}^2x + 1}\cdot d(\mathrm{tg}x).$$

Aufgabe 13. $\int\mathrm{tg}^nx\,.\,dx = ?$

Auflösung. Nach Gleichung (28.) erhält man, indem man $\mathrm{tg}x$ zur Integrations-Veränderlichen macht und mit t bezeichnet,

$$(29.)\quad \int\mathrm{tg}^nx\,dx = \int\frac{\mathrm{tg}^nx}{\mathrm{tg}^2x + 1}\cdot d(\mathrm{tg}x) = \int\frac{t^ndt}{t^2 + 1}.$$

Bei der weiteren Behandlung des Integrals muß man zwei Fälle unterscheiden, je nachdem *n gerade* oder *ungerade* ist.

I. Fall. $n = 2m$.

(30.) $$\int \mathrm{tg}^{2m}x\,.\,dx = \int \frac{t^{2m}}{t^2+1}dt = \int\Big(t^{2m-2} - t^{2m-4} + - \cdots \pm 1 \mp \frac{1}{1+t^2}\Big)dt$$
$$= \frac{\mathrm{tg}^{2m-1}x}{2m-1} - \frac{\mathrm{tg}^{2m-3}x}{2m-3} + - \cdots \pm \mathrm{tg}x \mp x.$$

Es ist z. B.

(31.) $$\int \mathrm{tg}^6 x dx = \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} - \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \mathrm{tg}x - x.$$

II. Fall. $n = 2m+1$.

(32.) $$\int \mathrm{tg}^{2m+1}x\,.\,dx = \int \frac{t^{2m+1}}{t^2+1}dt$$
$$= \int\Big(t^{2m-1} - t^{2m-3} + - \cdots \pm t \mp \frac{t}{t^2+1}\Big)dt$$
$$= \frac{\mathrm{tg}^{2m}x}{2m} - \frac{\mathrm{tg}^{2m-2}x}{2m-2} + - \cdots \pm \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} \mp \tfrac{1}{2}\ln(1+\mathrm{tg}^2 x),$$

wobei man noch

$$\tfrac{1}{2}\ln(1+\mathrm{tg}^2 x) = \tfrac{1}{2}\ln\Big(\frac{1}{\cos^2 x}\Big) = -\ln(\cos x)$$

setzen darf. Es ist z. B.

(33.) $$\int \mathrm{tg}^7 x\,.\,dx = \frac{\mathrm{tg}^6 x}{6} - \frac{\mathrm{tg}^4 x}{4} + \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + \ln(\cos x).$$

Aufgabe 14. $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = ?$

Auflösung. Bekanntlich ist

(34.) $$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x \quad \text{und} \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\mathrm{tg}x),$$

folglich wird

(35.) $$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\mathrm{tg}^2 x)d(\mathrm{tg}x)$$
$$= \mathrm{tg}x + \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}.$$

Dasselbe Verfahren führt zu der allgemeinen Formel

(36.) $$\int \frac{dx}{\cos^{2m}x} = \int (1+\mathrm{tg}^2 x)^{m-1}d(\mathrm{tg}x),$$

wo durch den Faktor $d(\operatorname{tg}x)$ angedeutet werden soll, daß $\operatorname{tg}x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird.

Aufgabe 15. $\int(\operatorname{ctg}^4x - 3\operatorname{ctg}^2x + 5)\frac{dx}{\sin^2x} = ?$

Auflösung. Setzt man

(37.) $$\operatorname{ctg}x = t, \quad \text{also} \quad -\frac{dx}{\sin^2x} = dt,$$

so erhält man

(38.) $$\int(\operatorname{ctg}^4x - 3\operatorname{ctg}^2x + 5)\frac{dx}{\sin^2x} = -\int(t^4 - 3t^2 + 5)dt$$
$$= -\frac{t^5}{5} + \frac{3t^3}{3} - 5t = -\frac{\operatorname{ctg}^5x}{5} + \operatorname{ctg}^3x - 5\operatorname{ctg}x.$$

Dieselbe Substitution kann man immer anwenden, wenn unter dem Integralzeichen eine Funktion von $\operatorname{ctg}x$, multipliziert mit $\frac{dx}{\sin^2x}$, steht, d. h. es wird ganz allgemein

(39.) $$\int F'(\operatorname{ctg}x)\frac{dx}{\sin^2x} = -\int F'(\operatorname{ctg}x)\,.\,d(\operatorname{ctg}x) = -F(\operatorname{ctg}x),$$

wo durch den Faktor $d(\operatorname{ctg}x)$ angedeutet werden soll, daß $\operatorname{ctg}x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird.

Aufgabe 16. $\int(\operatorname{ctg}^4x + 3\operatorname{ctg}^2x - 7)dx = ?$

Auflösung. Damit die Funktion unter dem Integralzeichen eine Funktion von $\operatorname{ctg}x$, multipliziert mit $\frac{dx}{\sin^2x}$, wird, muß man sie durch $\sin^2x$ dividieren und deshalb auch mit

(40.) $$\sin^2x = \frac{\sin^2x}{\sin^2x + \cos^2x} = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2x}$$

multiplizieren. Dadurch erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (37.)

(41.) $$\int(\operatorname{ctg}^4x + 3\operatorname{ctg}^2x - 7)dx = -\int\frac{t^4 + 3t^2 - 7}{t^2 + 1}dt$$
$$= -\int\left(t^2 + 2 - \frac{9}{1 + t^2}\right)dt = -\left(\frac{t^3}{3} + 2t + 9\operatorname{arcctg}t\right),$$

oder, da $\operatorname{ctg}x = t$ und $\operatorname{arcctg}t = x$ ist,

(42.) $\int (\operatorname{ctg}^4 x + 3\operatorname{ctg}^2 x - 7)dx = -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - 2\operatorname{ctg} x - 9x.$

Dieses Verfahren führt zu der allgemeinen Formel

(43.) $$\int f(\operatorname{ctg} x)\,.\,dx = -\int \frac{f(\operatorname{ctg} x)}{\operatorname{ctg}^2 x + 1}\cdot d(\operatorname{ctg} x).$$

Aufgabe 17. $\int \operatorname{ctg}^n x\,.\,dx = ?$

Auflösung. Nach Gleichung (43.) erhält man, indem man $\operatorname{ctg} x$ zur Integrations-Veränderlichen macht und mit t bezeichnet,

(44.) $$\int \operatorname{ctg}^n x\,.\,dx = -\int \frac{t^n dt}{t^2 + 1}.$$

Die weitere Behandlung dieser Aufgabe ergibt sich sodann aus Aufgabe 13.

Aufgabe 18. $\int \frac{dx}{\sin^6 x} = ?$

Auflösung. Bekanntlich ist

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x \quad \text{und} \quad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x),$$

folglich wird

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^2 d(\operatorname{ctg} x)$$

$$= -\operatorname{ctg} x - \frac{2\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}.$$

Dasselbe Verfahren führt zu der allgemeinen Formel

(45.) $$\int \frac{dx}{\sin^{2m} x} = -\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^{m-1} d(\operatorname{ctg} x),$$

wo durch den Faktor $d(\operatorname{ctg} x)$ angedeutet werden soll, daß $\operatorname{ctg} x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird.

Was in den vorstehenden Aufgaben für die trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ gezeigt worden ist, kann in gleicher Weise auch für die hyperbolischen Funktionen $\mathfrak{Sin}\, x$, $\mathfrak{Cos}\, x$, $\mathfrak{Tg}\, x$, $\mathfrak{Ctg}\, x$ ausgeführt werden. Dadurch findet man die folgenden Formeln:

$$(46.)\quad \int F'(\mathfrak{Sin}\,x)\mathfrak{Cos}\,x dx = \int F'(\mathfrak{Sin}\,x) \,.\, d(\mathfrak{Sin}\,x) = F(\mathfrak{Sin}\,x).$$

$$(47.)\quad \int \mathfrak{Cos}^{2n+1} x dx = \int (1 + \mathfrak{Sin}^2 x)^n \,.\, d(\mathfrak{Sin}\,x).$$

$$(48.)\quad \int F'(\mathfrak{Cos}\,x)\mathfrak{Sin}\,x dx = \int F'(\mathfrak{Cos}\,x) \,.\, d(\mathfrak{Cos}\,x) = F(\mathfrak{Cos}\,x).$$

$$(49.)\quad \int \mathfrak{Sin}^{2n+1} x dx = \int (\mathfrak{Cos}^2 x - 1)^n \,.\, d(\mathfrak{Cos}\,x).$$

$$(50.)\quad \int F'(\mathfrak{Tg}\,x) \cdot \frac{dx}{\mathfrak{Cos}^2 x} = \int F'(\mathfrak{Tg}\,x) \,.\, d(\mathfrak{Tg}\,x) = F(\mathfrak{Tg}\,x).$$

$$(51.)\quad \int f(\mathfrak{Tg}\,x) dx = \int \frac{f(\mathfrak{Tg}\,x)}{1 - \mathfrak{Tg}^2 x} \cdot d(\mathfrak{Tg}\,x).$$

$$(52.)\quad \int \frac{dx}{\mathfrak{Cos}^{2m} x} = \int (1 - \mathfrak{Tg}^2 x)^{m-1} \,.\, d(\mathfrak{Tg}\,x).$$

$$(53.)\quad \int F'(\mathfrak{Ctg}\,x) \cdot \frac{dx}{\mathfrak{Sin}^2 x} = -\int F'(\mathfrak{Ctg}\,x) \,.\, d(\mathfrak{Ctg}\,x) = -F(\mathfrak{Ctg}\,x).$$

$$(54.)\quad \int f(\mathfrak{Ctg}\,x) dx = \int \frac{f(\mathfrak{Ctg}\,x)}{1 - \mathfrak{Ctg}^2 x} \cdot d(\mathfrak{Ctg}\,x).$$

$$(55.)\quad \int \frac{dx}{\mathfrak{Sin}^{2m} x} = -\int (\mathfrak{Ctg}^2 x - 1)^{m-1} \,.\, d(\mathfrak{Ctg}\,x).$$

In ähnlicher Weise kann man durch Substitution ganz allgemein eine Vereinfachung des Integrals herbeiführen, wenn unter dem Integralzeichen das Produkt einer Funktion $F'[f(x)]$ der transzendenten Funktion $f(x)$ und des Differentials von $f(x)$ steht. Dann findet man, indem man

$$t = f(x)$$

zur neuen Integrations-Veränderlichen macht,

$$(56.)\quad \int F'[f(x)] \,.\, f'(x) dx = \int F'(t) dt = F(t) = F[f(x)].$$

Dies gibt ohne weiteres die folgenden Formeln:

$$(57.)\quad \int F'(a^x) \,.\, a^x dx = \frac{1}{\ln a} \int F'(a^x) \,.\, d(a^x) = \frac{1}{\ln a} F(a^x),$$

$$(58.)\quad \int F'(e^x) \,.\, e^x dx = \int F'(e^x) \,.\, d(e^x) = F(e^x),$$

$$(59.)\quad \int F'(\ln x) \cdot \frac{dx}{x} = \int F'(\ln x) \,.\, d(\ln x) = F(\ln x),$$

$$(60.)\quad \int F'(\arcsin x)\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int F'(\arcsin x)\,.\,d(\arcsin x)$$
$$=F(\arcsin x),$$

$$(61.)\quad \int F'(\arccos x)\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int F'(\arccos x)\,.\,d(\arccos x)$$
$$=-F(\arccos x),$$

$$(62.)\quad \int F'(\operatorname{arctg} x)\cdot\frac{dx}{1+x^2}=\int F'(\operatorname{arctg} x)\,.\,d(\operatorname{arctg} x)=F(\operatorname{arctg} x),$$

$$(63.)\quad \int F'(\operatorname{arcctg} x)\cdot\frac{dx}{1+x^2}=-\int F'(\operatorname{arcctg} x)\,.\,d(\operatorname{arcctg} x)$$
$$=-F(\operatorname{arcctg} x).$$

Hierbei soll durch die Faktoren $d(a^x)$, $d(e^x)$, $d(\ln x)$, $d(\arcsin x)$, $d(\arccos x)$, $d(\operatorname{arctg} x)$, $d(\operatorname{arcctg} x)$ angedeutet werden, daß bezw. die Größen a^x, e^x, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ zu Integrations-Veränderlichen gewählt werden.

Zur Einübung dieser Formeln mögen die folgenden Aufgaben gelöst werden.

Aufgabe 19. $\int(a^{2x}+3a^x-7)dx=?$

Auflösung. Bezeichnet man a^x mit t, so wird

$$(64.)\quad \int(a^{2x}+3a^x-7)dx=\int(a^x+3-7a^{-x})\,.\,a^x dx$$
$$=\frac{1}{\ln a}\int(t+3-7t^{-1})dt=\frac{1}{\ln a}\left(\frac{t^2}{2}+3t-7\ln t\right)$$
$$=\frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{2}a^{2x}+3a^x-7x\ln a\right).$$

Aufgabe 20. $\int\frac{\cos(\ln x)\,.\,dx}{x}=?$

Auflösung. Bezeichnet man $\ln x$ mit t, so wird

$$(65.)\quad \int\frac{\cos(\ln x)\,.\,dx}{x}=\int\cos t\,dt=\sin t=\sin(\ln x).$$

Aufgabe 21. $\int\frac{\arcsin x\,.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=?$

Auflösung. Bezeichnet man $\arcsin x$ mit t, so wird

$$(66.)\quad \int\frac{\arcsin x\,.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}=\frac{1}{2}\arcsin^2 x.$$

Aufgabe 22. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} = ?$

Auflösung. Bezeichnet man $\operatorname{arctg} x$ mit t, so wird

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(\operatorname{arctg} x). \tag{67.}$$

Steht unter dem Integralzeichen irgend eine rationale Funktion von $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, so kann man diese transzendenten Funktionen durch die Substitution

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t \tag{68.}$$

fortschaffen, so daß man unter dem Integralzeichen nur noch eine *rationale* Funktion von t behält. Es folgt nämlich aus Gleichung (68.)

$$\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner dieser Brüche durch $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ dividiert,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}, \tag{69.}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{70.}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}. \tag{71.}$$

Aus Gleichung (68.) findet man sodann noch

$$(72.)\qquad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad \text{also} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

und erhält dadurch die Formel

$$(73.)\qquad \int f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)dx =$$

$$\int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}, \frac{1-t^2}{2t}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man z. B. die folgende Aufgabe lösen:

Aufgabe 23. $\displaystyle\int\frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)} = ?$

Auflösung. Nach Gleichung (73.) wird

$$\int\frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)} = \int\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} : \frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$$

$$= \int\frac{(1+t^2+2t)dt}{t(1+t^2+1-t^2)} = \frac{1}{2}\int(t+2+t^{-1})dt,$$

also

$$(74.)\qquad \int\frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}+2t+\ln t\right)$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Ist $f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$ eine *rationale* Funktion der vier Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, so erreicht man durch die in Gleichung (73.) angegebene Substitution, daß unter dem Integralzeichen eine *rationale* Funktion der einzigen Veränderlichen t steht. Wie aber die Integration rationaler Funktionen auszuführen ist, wird an einer späteren Stelle gezeigt werden.

Steht unter dem Integralzeichen eine *rationale* Funktion der vier *hyperbolischen* Funktionen $\operatorname{Sin} x$, $\operatorname{Cos} x$, $\operatorname{Tg} x$, $\operatorname{Ctg} x$, so beachte man, daß diese Funktionen selbst wieder *rationale* Funktionen von e^x sind. Es ist nämlich

$$\mathfrak{Sin}\,x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \mathfrak{Cof}\,x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$\mathfrak{Tg}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \mathfrak{Ctg}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Deshalb erreicht man es auch in diesem Falle durch die Substitution

(75.) $$e^x = t, \quad dx = \frac{dt}{t},$$

daß unter dem Integralzeichen eine *rationale* Funktion von t steht, die nach den später folgenden Regeln integriert werden kann.

Beispiel. $$\int\frac{dx}{\mathfrak{Cof}\,x} = 2\int\frac{dx}{e^x + e^{-x}} = 2\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}.$$

Setzt man also

$$e^x = t, \quad e^x dx = dt,$$

so wird

(76.) $$\int\frac{dx}{\mathfrak{Cof}\,x} = 2\int\frac{dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arctg}t = 2\operatorname{arctg}(e^x).$$

Man kann in diesem Falle die Funktion unter dem Integralzeichen auch dadurch rational machen, daß man

(77.) $$\mathfrak{Tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$$

als neue Integrations-Veränderliche einführt, denn es wird dann nach D.-R., Formel Nr. 57, 58 und 79 der Tabelle

(78.) $$\mathfrak{Sin}\,x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \mathfrak{Cof}\,x = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

(79.) $$\mathfrak{Tg}\,x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \mathfrak{Ctg}\,x = \frac{1+t^2}{2t},$$

(80.) $$x = 2\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\,t, \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2},$$

also

(81.) $$\int f(\mathfrak{Sin}\,x, \mathfrak{Cof}\,x, \mathfrak{Tg}\,x, \mathfrak{Ctg}\,x)dx =$$
$$\int f\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1+t^2}{2t}\right)\cdot\frac{2dt}{1-t^2}.$$

$$(7.)\quad \int f(x,\ \sqrt{a^2 - x^2})dx = \int f\left(a\,\mathfrak{Tg}t,\ \frac{a}{\mathfrak{Cos}\,t}\right)\cdot\frac{a\,dt}{\mathfrak{Cos}^2 t},$$

wobei

$$(8.)\quad \left|\begin{array}{ll} \mathfrak{Sin}\,t = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & \mathfrak{Cos}\,t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \\ \mathfrak{Tg}\,t = \dfrac{x}{a}, & \mathfrak{Ctg} = \dfrac{a}{x}. \end{array}\right.$$

Übungs-Beispiele.

1) $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a^2}\operatorname{ctg}t = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x}.$$

oder

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a^2}\int\frac{\mathfrak{Cos}\,t\,dt}{\mathfrak{Sin}^2 t} = \frac{1}{a^2}\int(\mathfrak{Sin}\,t)^{-2}d(\mathfrak{Sin}\,t)$$

$$= -\frac{1}{a^2\,\mathfrak{Sin}\,t} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x}.$$

(Vergl. Formel Nr. 38 der Tabelle.)

2) $$\int\frac{dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a^2}\operatorname{tg}t = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}},$$

oder

$$\int\frac{dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \int\frac{a\,dt\,\mathfrak{Cos}^3 t}{\mathfrak{Cos}^2 t\,.\,a^3} = \frac{1}{a^2}\int\mathfrak{Cos}\,t\,dt = \frac{\mathfrak{Sin}\,t}{a^2}$$

$$= \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

3) $$\int\frac{(a^2 - 2x^2)dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2\int(1 - 2\sin^2 t)dt = a^2\int\cos(2t)dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\cos(2t)\,.\,d(2t) = \frac{a^2}{2}\sin(2t)$$

$$= a^2\sin t\cos t = x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Bei Integralen von der Form

$$\int f(x,\ \sqrt{a^2 + x^2})dx$$

kann man häufig die Substitution

§ 12.

Integration durch Einführung trigonometrischer oder hyperbolischer Funktionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 84 bis 86a.)

Während in den vorhergehenden Paragraphen gezeigt wurde, wie man die Funktion unter dem Integralzeichen, wenn sie trigonometrische oder andere transzendente Funktionen enthält, durch Substitution so umzuformen sucht, daß sie diese transzendenten Funktionen nicht mehr enthält, so gibt es auch Fälle, wo die Integration dadurch erleichtert wird, daß man für die Integrations-Veränderliche x eine trigonometrische oder hyperbolische Funktion der neuen Integrations-Veränderlichen t einführt. Man wendet eine solche Substitution namentlich dann mit gutem Erfolge an, wenn unter dem Integralzeichen eine der Irrationalitäten $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ auftritt.

So werden Integrale von der Form

$$\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$$

häufig durch die Substitution

$$x = a\sin t \tag{1.}$$

auf einfachere zurückgeführt. Es wird dann nämlich

$$dx = a\cos t dt, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t, \tag{2.}$$

also

$$\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx = \int f(a\sin t, a\cos t) \,.\, a\cos t dt, \tag{3.}$$

wobei

$$\left\{\begin{array}{ll} \sin t = \dfrac{x}{a}, & \cos t = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}, \\ \operatorname{tg} t = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & \operatorname{ctg} t = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}. \end{array}\right. \tag{4.}$$

Die gleichen Dienste leistet die Substitution

$$x = a\mathfrak{Tg}t; \tag{5.}$$

dann wird

$$dx = \frac{a\,dt}{\mathfrak{Cof}^2 t}, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \mathfrak{Tg}^2 t)} = \frac{a}{\mathfrak{Cof}\, t}, \tag{6.}$$

also

$$(7.)\qquad \int f(x,\ \sqrt{a^2-x^2})dx = \int f\left(a\,\mathfrak{Tg}\,t,\ \frac{a}{\mathfrak{Cos}\,t}\right)\cdot\frac{a\,dt}{\mathfrak{Cos}^2 t},$$

wobei

$$(8.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{Sin}\,t = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, & \mathfrak{Cos}\,t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}, \\ \mathfrak{Tg}\,t = \dfrac{x}{a}, & \mathfrak{Ctg} = \dfrac{a}{x}. \end{cases}$$

Übungs-Beispiele.

1) $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a^2}\operatorname{ctg} t = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}.$$

oder

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a^2}\int\frac{\mathfrak{Cos}\,t\,dt}{\mathfrak{Sin}^2 t} = \frac{1}{a^2}\int(\mathfrak{Sin}\,t)^{-2}d(\mathfrak{Sin}\,t)$$

$$= -\frac{1}{a^2\,\mathfrak{Sin}\,t} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}.$$

(Vergl. Formel Nr. 38 der Tabelle.)

2) $$\int\frac{dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a^2}\operatorname{tg} t = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}},$$

oder

$$\int\frac{dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{a\,dt\,\mathfrak{Cos}^3 t}{\mathfrak{Cos}^2 t\,.\,a^3} = \frac{1}{a^2}\int\mathfrak{Cos}\,t\,dt = \frac{\mathfrak{Sin}\,t}{a^2}$$

$$= \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}.$$

3) $$\int\frac{(a^2-2x^2)dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2\int(1-2\sin^2 t)dt = a^2\int\cos(2t)dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\cos(2t)\,.\,d(2t) = \frac{a^2}{2}\sin(2t)$$

$$= a^2\sin t\cos t = x\sqrt{a^2-x^2}.$$

Bei Integralen von der Form

$$\int f(x,\ \sqrt{a^2+x^2})dx$$

kann man häufig die Substitution

$$(9.)\qquad x = a\,\mathrm{tg}\,t$$

mit gutem Erfolge anwenden. Man erhält dabei

$$(10.)\qquad dx = \frac{a\,dt}{\cos^2 t}, \quad \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t},$$

also

$$(11.)\qquad \int f(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx = \int f\left(a\,\mathrm{tg}\,t, \frac{a}{\cos t}\right)\cdot\frac{a\,dt}{\cos^2 t},$$

wobei

$$(12.)\qquad \begin{cases} \sin t = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, & \cos t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \\[2ex] \mathrm{tg}\,t = \dfrac{x}{a}, & \mathrm{ctg}\,t = \dfrac{a}{x}. \end{cases}$$

Die gleichen Dienste leistet die Substitution

$$(13.)\qquad x = a\,\mathfrak{Sin}\,t;$$

dann wird

$$(14.)\qquad dx = a\,\mathfrak{Cos}\,t\,.\,dt, \quad \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2(1 + \mathfrak{Sin}^2 t)} = a\,\mathfrak{Cos}\,t$$

also

$$(15.)\qquad \int f(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx = \int f(a\,\mathfrak{Sin}\,t, a\,\mathfrak{Cos}\,t)\,.\,a\,\mathfrak{Cos}\,t\,.\,dt,$$

wobei

$$(16.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{Sin}\,t = \dfrac{x}{a}, & \mathfrak{Cos}\,t = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}, \\[2ex] \mathfrak{Tg}\,t = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, & \mathfrak{Ctg}\,t = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}. \end{cases}$$

Übungs-Beispiele.

1) $$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int\frac{a^3\sin^3 t\,.\,a\,dt\,.\,\cos t}{\cos^3 t\,.\,\cos^2 t\,.\,a} = a^3\int\frac{\sin^3 t\,dt}{\cos^4 t},$$

oder, wenn man

$$(17.)\qquad \cos t = z, \quad \text{also} \quad \sin t\,dt = -dz$$

setzt,

$$(18.)\qquad \int\frac{x^3dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = -a^3\int\frac{(1 - z^2)dz}{z^4} = -a^3\int(z^{-4} - z^{-2})dz$$

$$= -a^3\left(\frac{z^{-3}}{-3} - \frac{z^{-1}}{-1}\right) = \frac{a^3}{3}\left(\frac{1}{z^3} - \frac{3}{z}\right).$$

Indem man schließlich noch

$$z = \cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

einsetzt, findet man

$$(19.)\quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{a^3}{3}\left(\frac{(\sqrt{a^2 + x^2})^3}{a^3} - \frac{3\sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + x^2}(x^2 - 2a^2).$$

Einfacher findet man dieses Resultat durch die Substitution $x = a\mathfrak{Sin}\,t$, denn dadurch wird

$$(20.)\quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = a^3 \int \mathfrak{Sin}^3 t \,.\, dt = a^3 \int (\mathfrak{Cos}^2 t - 1) d(\mathfrak{Cos}\, t)$$

$$= a^3 \left[\frac{1}{3}\mathfrak{Cos}^3 t - \mathfrak{Cos}\, t\right] = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + x^2}(x^2 - 2a^2).$$

$$2)\quad \int \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a^4}\int \frac{a dt \,.\, \cos^4 t \,.\, \cos t}{\cos^2 t \,.\, \sin^4 t \,.\, a} = \frac{1}{a^4}\int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t} dt$$

$$= \frac{1}{a^4}\int\left(\frac{1}{\sin^4 t} - \frac{1}{\sin^2 t}\right) d(\sin t) = \frac{1}{a^4}\left(-\frac{1}{3\sin^3 t} + \frac{1}{\sin t}\right).$$

Nun ist

$$(21.)\quad \sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \frac{1}{\sin t} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x},$$

folglich wird

$$(22.)\quad \int \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a^4}\left(-\frac{(\sqrt{a^2 + x^2})^3}{3x^3} + \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{3a^4 x^3}(2x^2 - a^2).$$

Auch hier führt die Substitution $x = a\mathfrak{Sin}\,t$ schneller zum Ziele, denn es wird

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a^4}\int \frac{dt}{\mathfrak{Sin}^4 t} = \frac{1}{a^4}\int (\mathfrak{Ctg}^2 t - 1)\frac{dt}{\mathfrak{Sin}^2 t},$$

oder, wenn man $\mathfrak{Ctg}\, t = z$ setzt,

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a^4}\int (z^2-1)dz = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{z^3}{3}-z\right)$$

$$= \frac{\mathfrak{Ctg}\, t}{3a^4}(3-\mathfrak{Ctg}^2 t) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{3a^4x}\left(3-\frac{a^2+x^2}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{3a^4x^3}(2x^2-a^2).$$

3) $$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{adt\,.\cos^3 t}{\cos^2 t\,.\,a^3} = \frac{1}{a^2}\int \cos t dt$$

$$= \frac{\sin t}{a^2} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}},$$

oder

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\mathfrak{Cof}^2 t} = \frac{1}{a^2}\mathfrak{Tg}\, t = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Bei Integralen von der Form

$$\int f(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$$

kann man häufig die Substitution

(23.) $$x = \frac{a}{\cos t}$$

mit gutem Erfolge anwenden. Dabei wird

(24.) $$dx = \frac{a\sin t dt}{\cos^2 t}, \quad \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2} = a\,\mathrm{tg}\, t,$$

also

(25.) $$\int f(x, \sqrt{x^2-a^2})dx = \int f\left(\frac{a}{\cos t}, a\,\mathrm{tg}\, t\right)\cdot\frac{a\sin t dt}{\cos^2 t},$$

wobei

(26.) $$\begin{cases} \sin t = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}, & \cos t = \dfrac{a}{x}, \\ \mathrm{tg}\, t = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}, & \mathrm{ctg}\, t = \dfrac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}. \end{cases}$$

Die gleichen Dienste leistet die Substitution

(27.) $$x = a\,\mathfrak{Cof}\, t:$$

dann wird

(28.) $dx = a\mathfrak{Sin}t\,.\,dt,\quad \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\mathfrak{Cof}^2t - 1)} = a\mathfrak{Sin}t,$

also

(29.) $\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx = \int f(a\mathfrak{Cof}t,\ a\mathfrak{Sin}t)\,.\,a\mathfrak{Sin}t\,.\,dt,$

wobei

$$(30.)\quad \begin{cases} \mathfrak{Sin}t = \dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}, & \mathfrak{Cof}t = \dfrac{x}{a}, \\[2ex] \mathfrak{Tg}t = \dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}, & \mathfrak{Ctg}t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}. \end{cases}$$

Übungs-Beispiele.

1) $$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - a^2}} = \int\frac{a\sin t dt\cos^4 t\,.\,\cos t}{\cos^2 t\,.\,a^4\,.\,a\sin t} = \frac{1}{a^4}\int\cos^3 t dt$$
$$= \frac{1}{a^4}\int(1 - \sin^2 t)d(\sin t) = \frac{1}{a^4}\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right),$$

also

$$(31.)\quad \int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{3a^4}\left(\frac{3\sqrt{x^2 - a^2}}{x} - \frac{(\sqrt{x^2 - a^2})^3}{x^3}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{3a^4x^3}(2x^2 + a^2).$$

Setzt man $x = a\mathfrak{Cof}t$, so erhält man

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a^4}\int\frac{dt}{\mathfrak{Cof}^4 t} = \frac{1}{a^4}\int(1 - \mathfrak{Tg}^2 t)\frac{dt}{\mathfrak{Cof}^2 t},$$

oder wenn man $\mathfrak{Tg}t$ mit z bezeichnet,

$$(32.)\quad \int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a^4}\int(1 - z^2)dz = \frac{1}{a^4}\left(z - \frac{z^3}{3}\right)$$
$$= \frac{\mathfrak{Tg}t}{3a^4}(3 - \mathfrak{Tg}^2 t) = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{3a^4x^3}(2x^2 + a^2).$$

2) $$\int\frac{dx}{(x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2}} = \int\frac{dx}{(\sqrt{x^2 - a^2})^3} = \int\frac{a\sin t dt\,.\,\cos^3 t}{\cos^2 t\,.\,a^3\sin^3 t}$$
$$= \frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a^2\sin t},$$

also

$$(33.)\quad \int\frac{dx}{(x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2 - a^2}},$$

oder

$$(34.)\quad \int\frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\mathfrak{Sin}^2 t}=-\frac{1}{a^2}\mathfrak{Ctg}\,t$$
$$=-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}.$$

$$3)\quad \int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sin t\,dt\,.\cos t}{\cos^2 t\left(\frac{a^2}{\cos^2 t}+a^2\right)\cdot a\sin t}$$
$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t\,dt}{1+\cos^2 t}=\frac{1}{a^2}\int\frac{d(\sin t)}{2-\sin^2 t}.$$

Setzt man

$$(35.)\qquad \sin t=z,$$

so kann man zur Berechnung dieses Integrals Formel Nr. 29 der Tabelle anwenden und findet

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2-a^2}}=-\frac{1}{a^2}\int\frac{dz}{z^2-2}=-\frac{1}{2a^2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-z}{\sqrt{2}+z}\right)$$
$$=-\frac{1}{2a^2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-\sin t}{\sqrt{2}+\sin t}\right)=\frac{1}{2a^2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-a^2}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-a^2}}\right).$$

Man beachte, daß in den drei hier behandelten Fällen die trigonometrische oder hyperbolische Funktion, welche für x substituiert wird, jedesmal so zu wählen ist, daß unter dem Wurzelzeichen ein vollständiges Quadrat steht, daß sich also die Wurzel ausziehen läßt.

Für $x=a\sin t$ wird nämlich

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=a\cos t,$$

für $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ wird $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2(1+\mathrm{tg}^2 t)}=\frac{a}{\cos t}$,

„ $x=\frac{a}{\cos t}$ „ $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t}}=a\,\mathrm{tg}\,t$;

und für $x=a\,\mathfrak{Tg}\,t$ wird $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\mathfrak{Tg}^2 t)}=\frac{a}{\mathfrak{Cof}\,t}$,

„ $x=a\,\mathfrak{Sin}\,t$ „ $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2(1+\mathfrak{Sin}^2 t)}=a\,\mathfrak{Cof}\,t$,

„ $x=a\,\mathfrak{Cof}\,t$ „ $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\mathfrak{Cof}^2 t-1)}=a\,\mathfrak{Sin}\,t$.

Kennt man die trigonometrischen Funktionen, die dabei zu substituieren sind, so ergeben sich die entsprechenden hyperbolischen Funktionen ohne weiteres aus dem, was über die Beziehung zwischen den hyperbolischen und den trigonometrischen Funktionen in § 30 der Differential-Rechnung gesagt ist. (Vergl. auch daselbst Formel Nr. 81 der Tabelle.)

Bei der Integration durch Substitution ist die neue Integrations-Veränderliche t im allgemeinen so zu wählen, daß jedem Werte von x innerhalb der Integrationsgrenzen nur *ein* Wert von t zugeordnet ist; und umgekehrt darf jedem Werte von t innerhalb der Integrationsgrenzen nur *ein* Wert von x entsprechen. Wenn diese Regel nicht beachtet wird, so können leicht Fehler entstehen. In einem späteren Abschnitte soll dieser Fall noch besonders untersucht werden.

III. Abschnitt.

Integration durch Zerlegung.

§ 13.

Integration von einigen gebrochenen rationalen Funktionen durch Zerlegung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 29a, 87 bis 92.)

In vielen Fällen kann man die Differential-Funktion $f(x)dx$ unter dem Integralzeichen in zwei oder mehrere Summanden zerlegen, die dann einzeln sehr leicht integriert werden können. Wie dies namentlich bei gebrochenen rationalen Funktionen geschieht, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

Aufgabe 1. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = ?$

Auflösung. Die Aufgabe ist schon in § 8 (Aufgabe 7) behandelt worden; dabei ergab sich

$$(1.)\qquad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = -\frac{1}{a} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{x}{a}\right).$$

(Vergl. Formel Nr. 29a der Tabelle.)

Dasselbe Resultat findet man auch durch folgende Überlegung. Die beiden Unbekannten A und B lassen sich immer so bestimmen, daß

$$(2.)\qquad \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

wird. In der Tat, schafft man in Gleichung (2.) die Nenner fort, indem man beide Seiten mit

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

multipliziert, so erhält man

(3.) $$1 = A(x + a) + B(x - a).$$

Diese Gleichung soll für alle Werte von x gelten, folglich auch für $x = +a$ und für $x = -a$. Für $x = +a$ findet man aber

(4.) $$1 = 2Aa, \quad \text{oder} \quad A = \frac{1}{2a},$$

und für $x = -a$

(5.) $$1 = -2Ba, \quad \text{oder} \quad B = -\frac{1}{2a}.$$

Setzt man diese Werte in Gleichung (2.) ein, so erhält man

(6.) $$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right).$$

Von der Richtigkeit dieser Gleichung kann man sich überzeugen, indem man die beiden Glieder in der Klammer auf gleichen Nenner bringt. Aus Gleichung (6.) folgt dann ohne weiteres nach Formel Nr. 27 der Tabelle

(7.) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2a}[\ln(x - a) - \ln(x + a)] = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x - a}{x + a}\right).$$

Aufgabe 2. $$\int \frac{dx}{x^2 + 10x + 16} = ?$$

Auflösung. Diese Aufgabe kann man auf die vorhergehende zurückführen. Ergänzt man nämlich die beiden ersten Glieder des Nenners zu einem vollständigen Quadrate, indem man 25 addiert und dann wieder subtrahiert, so erhält man

(8.) $$x^2 + 10x + 16 = (x^2 + 10x + 25) + (16 - 25) = (x + 5)^2 - 9.$$

Indem man jetzt noch

(9.) $$x + 5 = t, \quad \text{also} \quad dx = dt$$

setzt, wird

(10.) $$\int \frac{dx}{x^2 + 10x + 16} = \int \frac{dx}{(x + 5)^2 - 9} = \int \frac{dt}{t^2 - 3^2},$$

oder nach Gleichung (7.), wenn man x mit t und a mit 3 vertauscht,

$$(11.)\quad \int\frac{dx}{x^2+10x+16}=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{t-3}{t+3}\right)=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{x+2}{x+8}\right).$$

Aufgabe 3. $\int\frac{dx}{x^2+6x+13}=?$

Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe wird man hier den Nenner auf die Form

$$(12.)\quad x^2+6x+13=(x^2+6x+9)+(13-9)=(x+3)^2+4$$

bringen und

$$(13.)\qquad x+3=t,\quad \text{also}\quad dx=dt$$

setzen; dadurch erhält man

$$(14.)\quad \int\frac{dx}{x^2+6x+13}=\int\frac{dx}{(x+3)^2+4}=\int\frac{dt}{t^2+2^2}.$$

Wollte man jetzt die Integration nach der in Aufgabe 1 gefundenen Formel ausführen, so müßte man

$$a^2=-4,\quad \text{also}\quad a=2\sqrt{-1}=2i$$

setzen, so daß man für das Resultat eine *komplexe Form* erhalten würde. Dies kann man vermeiden, indem man Formel Nr. 28 der Tabelle, nämlich

$$\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right)$$

für $a=2$ anwendet. Dadurch findet man

$$(15.)\quad \int\frac{dx}{x^2+6x+13}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right).$$

Aufgabe 4. $\int\frac{dx}{x^2+2bx+c}=?$

Auflösung. Wie man schon aus den beiden vorhergehenden Aufgaben erkennt, muß man bei dieser Aufgabe drei Fälle unterscheiden, je nachdem b^2-c positiv, negativ oder gleich Null ist.

I. Fall. $b^2 - c > 0$.

Setzt man in diesem Falle der Kürze wegen

(16.) $b^2 - c = + a^2$, also $\sqrt{b^2 - c} = + a$,

so wird a eine reelle Größe, und man erhält

(17.) $$x^2 + 2bx + c = (x^2 + 2bx + b^2) + (c - b^2)$$
$$= (x + b)^2 - a^2.$$

Dies gibt, wenn man $x + b$ mit t bezeichnet, nach Aufgabe 1

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{t - a}{t + a}\right),$$

oder

(18.) $$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - c}} \ln\left(\frac{x + b - \sqrt{b^2 - c}}{x + b + \sqrt{b^2 - c}}\right).$$

Man erkennt ohne weiteres den Zusammenhang dieses Verfahrens mit der Auflösung der quadratischen Gleichungen. Um nämlich die quadratische Gleichung

$$x^2 + 2bx + c = 0$$

aufzulösen, bringt man die Gleichung auf die Form

$$x^2 + 2bx + b^2 = b^2 - c$$

und zieht dann auf beiden Seiten dieser letzten Gleichung die Quadratwurzel aus. Dadurch erhält man

$$x + b = \pm \sqrt{b^2 - c},$$

oder

$$x_1 = - b + \sqrt{b^2 - c}, \quad x_2 = - b - \sqrt{b^2 - c},$$

$$x_1 + x_2 = - 2b, \quad x_1 . x_2 = c, \quad x_1 - x_2 = 2\sqrt{b^2 - c},$$

$$x^2 + 2bx + c = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = (x - x_1)(x - x_2),$$

wo x_1 und x_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung sind. Setzt man diese Werte in die Gleichung (18.) ein, so nimmt dieselbe die Form an

(18a.) $$\int \frac{dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2} \ln\left(\frac{x - x_1}{x - x_2}\right).$$

Von der Richtigkeit dieses Resultates kann man sich in folgender Weise überzeugen. Die beiden Unbekannten A und B lassen sich immer so bestimmen, daß

(19.) $$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

wird. In der Tat, schafft man in Gleichung (19.) die Nenner fort, indem man beide Seiten mit $(x-x_1)(x-x_2)$ multipliziert, so erhält man

(20.) $$1 = A(x-x_2) + B(x-x_1).$$

Diese Gleichung soll für alle Werte von x gelten, folglich gilt sie auch für $x = x_1$ und für $x = x_2$. Für $x = x_1$ findet man aber

(21.) $$1 = A(x_1 - x_2), \quad \text{oder} \quad A = \frac{1}{x_1 - x_2},$$

und für $x = x_2$

(22.) $$1 = B(x_2 - x_1), \quad \text{oder} \quad B = \frac{1}{x_2 - x_1}.$$

Setzt man diese Werte in Gleichung (19.) ein, so erhält man

(23.) $$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right).$$

Daß die rechte Seite dieser Gleichung der linken wirklich gleich ist, ergibt sich ohne weiteres, indem man die Glieder in der Klammer auf gleichen Nenner bringt.

Aus Gleichung (23.) folgt dann in Übereinstimmung mit Gleichung (18a.)

$$\int \frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2}\int\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_2}[\ln(x-x_1) - \ln(x-x_2)] = \frac{1}{x_1 - x_2}\ln\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right).$$

II. Fall. $b^2 - c < 0.$

Setzt man in diesem Falle der Kürze wegen

(24.) $$b^2 - c = -a^2, \quad \text{oder} \quad \sqrt{c - b^2} = a,$$

so wird a eine reelle Größe, und man erhält

$$x^2 + 2bx + c = (x^2 + 2bx + b^2) + (c - b^2) = (x+b)^2 + a^2.$$

Dies gibt, wenn man wieder $x + b$ mit t bezeichnet,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \int \frac{dx}{(x + b)^2 + a^2} = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right),$$

also

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{1}{\sqrt{c - b^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x + b}{\sqrt{c - b^2}}\right). \tag{25.}$$

Es ist noch hervorzuheben, daß die Gleichungen (18.) und (25.) richtig bleiben, gleichviel ob $b^2 - c$ positiv oder negativ ist, die rechte Seite von Gleichung (18.) erhält aber eine komplexe Form, wenn $b^2 - c < 0$ ist, und auf der rechten Seite von Gleichung (25.) wird die Größe $\sqrt{c - b^2}$ imaginär, wenn $b^2 - c > 0$ ist. Der Zusammenhang beider Gleichungen ergibt sich aus D.-R., Formel Nr. 188 der Tabelle, nämlich aus

$$\ln\left(\frac{1 + \varphi i}{1 - \varphi i}\right) = 2i \operatorname{arctg}\varphi. \tag{26.}$$

Setzt man nämlich

$$\varphi = \frac{x}{a},$$

so folgt aus Gleichung (26.)

$$\ln\left(\frac{1 + \varphi i}{1 - \varphi i}\right) = \ln\left(\frac{a + xi}{a - xi}\right) = 2i \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right),$$

oder

$$\ln\left(\frac{-i(a + xi)}{(-1)i(a - xi)}\right) = \ln\left(\frac{x - ai}{x + ai}\right) - \ln(-1) = 2i \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Dies gibt, wenn man beide Seiten der Gleichung durch $2ai$ dividiert und beachtet, daß nach D.-R., Formel Nr. 187 der Tabelle $\ln(-1)$ den Wert $(2h + 1)\pi i$ hat,

$$\frac{1}{2ai} \ln\left(\frac{x - ai}{x + ai}\right) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{(2h + 1)\pi}{2a}, \tag{27.}$$

wobei h noch eine beliebige, positive oder negative ganze Zahl ist.

Vertauscht man also in der Formel

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x - a}{x + a}\right)$$

die Größe a mit ai, so erhält man

(28.) $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{(2h+1)\pi}{2a}.$$

Setzt man noch

$$a = \sqrt{c - b^2}, \quad \text{also} \quad ai = i\sqrt{c - b^2} = \sqrt{b^2 - c}$$

und vertauscht x mit $x + b$, so geht Gleichung (27.) über in

(29.) $$\frac{1}{2\sqrt{b^2 - c}} \ln\left(\frac{x + b - \sqrt{b^2 - c}}{x + b + \sqrt{b^2 - c}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c - b^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x + b}{\sqrt{c - b^2}}\right) + \frac{(2h+1)\pi}{2\sqrt{c - b^2}};$$

die beiden Werte, welche man in den Gleichungen (18.) und (25.) für $\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c}$ gefunden hat, unterscheiden sich also voneinander nur durch die Konstante $\frac{(2h+1)\pi}{2\sqrt{c - b^2}}$.

III. Fall. $b^2 - c = 0$, oder $c = b^2$.

Hier wird, wenn man wieder $x + b$ mit t bezeichnet,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + b^2} = \int \frac{dx}{(x+b)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = -\frac{1}{t},$$

oder

(30.) $$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + b^2} = -\frac{1}{x + b}.$$

Beispiele.

I. Fall. $$\int \frac{dx}{(x + 3)(x + 4)} = \ln\left(\frac{x+3}{x+4}\right);$$

II. Fall. $$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 20} = \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+2}{4}\right);$$

III. Fall. $$\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 16} = -\frac{1}{x + 4}.$$

Aufgabe 5. $$\int \frac{(Px + Q)dx}{x^2 + 2bx + c} = ?$$

Auflösung. Wäre bei dem Bruche unter dem Integralzeichen der Zähler dem Differential des Nenners gleich oder wenigstens proportional, so könnte die Integration

nach Formel Nr. 43 der Tabelle ausgeführt werden, nämlich nach der Formel

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln[f(x)].$$

In dem vorliegenden Falle ist

$$f'(x) = 2x + 2b,$$

deshalb nimmt man mit dem gesuchten Integrale die folgende Umformung vor. Es ist

$$Px + Q = (Px + Pb) + (Q - Pb) = \frac{P}{2}(2x + 2b) + (Q - Pb),$$

folglich wird

$$\int \frac{(Px + Q)dx}{x^2 + 2bx + c} = \int \frac{\frac{1}{2}P(2x + 2b) + (Q - Pb)}{x^2 + 2bx + c} dx$$

$$= \frac{P}{2}\int \frac{(2x + 2b)dx}{x^2 + 2bx + c} + (Q - Pb)\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c},$$

also

$$(31.)\quad \int \frac{(Px+Q)dx}{x^2+2bx+c} = \frac{P}{2}\ln(x^2+2bx+c)+(Q-Pb)\int \frac{dx}{x^2+2bx+c}.$$

Das Integral, welches auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen geblieben ist, findet man nach Aufgabe 4. So ist z. B. für $b^2 - c > 0$

$$(31\text{a.})\quad \int \frac{(Px + Q)dx}{x^2 + 2bx + c}$$

$$= \frac{P}{2}\ln(x^2 + 2bx + c) + \frac{Q - Pb}{2\sqrt{b^2 - c}}\ln\left(\frac{x + b - \sqrt{b^2 - c}}{x + b + \sqrt{b^2 - c}}\right),$$

oder, da $x_1 + x_2 = -2b$ und $x_1 - x_2 = 2\sqrt{b^2 - c}$ ist,

$$\int \frac{(Px + Q)dx}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

$$= \frac{P}{2}\ln[(x - x_1)(x - x_2)] + \frac{2Q + P(x_1 + x_2)}{2(x_1 - x_2)}\ln\left(\frac{x - x_1}{x - x_2}\right).$$

Aus den bekannten Formeln

$$\ln[(x - x_1)(x - x_2)] = \ln(x - x_1) + \ln(x - x_2),$$

$$\ln\left(\frac{x - x_1}{x - x_2}\right) = \ln(x - x_1) - \ln(x - x_2)$$

ergibt sich daher

$$\int\frac{(Px+Q)dx}{(x-x_1)(x-x_2)}=\left(\frac{P}{2}+\frac{2Q+P(x_1+x_2)}{2(x_1-x_2)}\right)\ln(x-x_1)$$
$$+\left(\frac{P}{2}-\frac{2Q+P(x_1+x_2)}{2(x_1-x_2)}\right)\ln(x-x_2),$$

oder

$$(32.)\quad \int\frac{(Px+Q)dx}{(x-x_1)(x-x_2)}$$
$$=\frac{1}{x_1-x_2}[(Px_1+Q)\ln(x-x_1)-(Px_2+Q)\ln(x-x_2)].$$

Die Richtigkeit dieses Resultates kann man in folgender Weise bestätigen. Die beiden Unbekannten A und B lassen sich immer so bestimmen, daß

$$(33.)\quad \frac{Px+Q}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$$

wird. Schafft man nämlich in Gleichung (33.) die Nenner fort, indem man beide Seiten mit $(x-x_1)(x-x_2)$ multipliziert, so erhält man

$$(34.)\quad Px+Q=A(x-x_2)+B(x-x_1).$$

Diese Gleichung soll für alle Werte von x gelten, folglich gilt sie auch für $x=x_1$ und für $x=x_2$. Für $x=x_1$ findet man aber

$$(35.)\quad Px_1+Q=A(x_1-x_2),\quad \text{oder}\quad A=\frac{Px_1+Q}{x_1-x_2},$$

und für $x=x_2$

$$(36.)\quad Px_2+Q=B(x_2-x_1),\quad \text{oder}\quad B=\frac{Px_2+Q}{x_2-x_1}.$$

Setzt man diese Werte in Gleichung (33.) ein, so erhält man

$$(37.)\quad \frac{Px+Q}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{Px_1+Q}{x-x_1}-\frac{Px_2+Q}{x-x_2}\right).$$

Daß die rechte Seite dieser Gleichung der linken wirklich gleich ist, ergibt sich ohne weiteres, indem man die beiden Glieder in der Klammer auf gleichen Nenner bringt.

Aus Gleichung (37.) folgt dann in Übereinstimmung mit Gleichung (32.)

$$(38.)\quad \int\frac{(Px+Q)dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_1-x_2}\int\left(\frac{Px_1+Q}{x-x_1} - \frac{Px_2+Q}{x-x_2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{x_1-x_2}[(Px_1+Q)\ln(x-x_1) - (Px_2+Q)\ln(x-x_2)].$$

Beispiele.

$$\text{I.}\quad \int\frac{(2x+43)dx}{x^2+x-12} = \int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x-12} + 42\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2}$$
$$= \ln(x^2+x-12) + 6\ln\left(\frac{x-3}{x+4}\right)$$
$$= 7\ln(x-3) - 5\ln(x+4).$$

Dasselbe Resultat findet man aus Gleichung (32.), denn es ist in diesem Falle

$$x_1 = +3,\quad x_2 = -4,\quad x_1 - x_2 = 7,$$
$$P = 2,\quad Q = 43,\quad Px_1 + Q = 49,\quad Px_2 + Q = 35.$$

$$\text{II.}\quad \int\frac{(4x-5)dx}{x^2-4x+20} = \int\frac{2(2x-4)dx}{x^2-4x+20} + 3\int\frac{dx}{(x-2)^2+4^2}$$
$$= 2\ln(x^2-4x+20) + \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{4}\right).$$

$$\text{III.}\quad \int\frac{(4x-7)dx}{x^2+6x+9} = \int\frac{(4x+12)-19}{(x+3)^2}dx = 4\int\frac{dx}{x+3} - 19\int\frac{dx}{(x+3)^2}$$
$$= 4\ln(x+3) + \frac{19}{x+3}.$$

Die vorhergehenden Aufgaben behandeln nur die einfachsten Fälle der *Zerlegung in Partialbrüche.* In einem späteren Abschnitte wird gezeigt werden, wie man *jede gebrochene rationale* Funktion durch Zerlegung in Partialbrüche integrieren kann.

Auf die Integration von gebrochenen rationalen Funktionen führen häufig die im vorigen Abschnitte behandelten Substitutionen, wie die beiden folgenden Aufgaben zeigen mögen.

Aufgabe 6. $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} = ?$

Auflösung. Zunächst wird man hier die in Formel Nr. 82 der Tabelle angegebene Substitution benutzen und

$$(39.)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t, \quad \text{also} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

setzen; dann erhält man

$$(40.)\quad \int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} = \int \frac{2dt}{2at + b(1-t^2) + c(1+t^2)}$$
$$= \int \frac{2dt}{(c-b)t^2 + 2at + (b+c)},$$

oder, wenn man die Größen b_1 und c_1 durch die Gleichungen

$$(41.)\quad a = b_1(c-b), \quad b+c = c_1(c-b)$$

erklärt,

$$(42.)\quad \int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} = \frac{2}{c-b}\int \frac{dt}{t^2 + 2b_1t + c_1}.$$

Für $b_1^2 - c_1 > 0$ erhält man daher nach Aufgabe 4 (Formel Nr. 87 der Tabelle)

$$(43.)\quad \int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} = \frac{2}{c-b}\cdot\frac{1}{2\sqrt{b_1^2 - c_1}}\ln\left(\frac{t + b_1 - \sqrt{b_1^2 - c_1}}{t + b_1 + \sqrt{b_1^2 - c_1}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}\ln\left(\frac{t(c-b) + a - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{t(c-b) + a + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}\right),$$

und für $b_1^2 - c_1 < 0$ erhält man nach Aufgabe 4 (Formel Nr. 89 der Tabelle)

$$(44.)\quad \int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} = \frac{2}{c-b}\,\frac{1}{\sqrt{c_1 - b_1^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t + b_1}{\sqrt{c_1 - b_1^2}}\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t(c-b) + a}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}\right).$$

Aufgabe 7. $\int \frac{dx}{(b^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} = ?$

Auflösung. Setzt man nach Formel Nr. 85 der Tabelle

$$x = a\,\mathrm{tg}\,t,\quad \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t},\quad dx = \frac{a\,dt}{\cos^2 t},$$

so erhält man

$$(45.)\quad \int \frac{dx}{(b^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{a\,dt \,.\cos t}{\cos^2 t(b^2 + a^2\,\mathrm{tg}^2 t)\,.\,a}$$

$$= \int \frac{\cos t\,dt}{b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t},$$

oder, wenn man

$$(46.)\quad \sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = z$$

setzt und die Größe $\pm c^2$ durch die Gleichung

$$(47.)\quad b^2 = \pm (a^2 - b^2)c^2$$

erklärt,

$$(48.)\quad \int \frac{dx}{(b^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{dz}{b^2 + (a^2 - b^2)z^2} = \frac{1}{a^2 - b^2}\int \frac{dz}{z^2 \pm c^2}.$$

Gilt das obere Zeichen, ist also $a^2 > b^2$, so findet man hieraus nach Formel Nr. 28 der Tabelle

$$(49.)\quad \int \frac{dx}{(b^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{c}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{z}{c}\right)$$

$$= \frac{1}{b\sqrt{a^2 - b^2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{b\sqrt{a^2 + x^2}}\right).$$

Gilt das untere Zeichen, ist also $a^2 < b^2$, so erhält man nach Formel Nr. 29 der Tabelle

$$(50.)\quad \int \frac{dx}{(b^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{2c}\ln\left(\frac{c - z}{c + z}\right)$$

$$= -\frac{1}{2b\sqrt{b^2 - a^2}}\ln\left(\frac{b\sqrt{a^2 + x^2} - x\sqrt{b^2 - a^2}}{b\sqrt{a^2 + x^2} + x\sqrt{b^2 - a^2}}\right).$$

§ 14.

Integration von einigen transzendenten Funktionen durch Zerlegung. Anwendung der *Moivre*'schen Formeln.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 93 bis 97.)

Aufgabe 1. $\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=?$

Auflösung. Mit Rücksicht auf die bekannte Formel

$$\sin^2x+\cos^2x=1$$

erhält man

$$\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{(\sin^2x+\cos^2x)dx}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{dx}{\sin^2x},$$

folglich wird nach Formel Nr. 15 und 16 der Tabelle

$$(1.)\quad \int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x=-\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin x\cos x}$$
$$=-\frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}=-2\operatorname{ctg}(2x).$$

Aufgabe 2. $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=?$

Auflösung. Dieses Integral ist bereits durch Formel Nr. 46 der Tabelle berechnet. Damals wurde die Funktion unter dem Integralzeichen so umgeformt, daß der Zähler des Bruches das Differential des Nenners wurde. Man kann aber die Integration auch durch Zerlegung ausführen. Mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 44 und 45 der Tabelle erhält man nämlich

$$(2.)\quad \int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\sin x\cos x}dx=\int\frac{\cos x dx}{\sin x}+\int\frac{\sin x dx}{\cos x}$$
$$=\ln(\sin x)-\ln(\cos x)=\ln(\operatorname{tg}x).$$

Aufgabe 3. $\int\cos^m x dx=?$

Auflösung. In dem Falle, wo m eine *ungerade* Zahl ist, wendet man am besten Formel Nr. 54 der Tabelle an, nach welcher

$$(3.)\quad \int\cos^{2n+1}x dx=\int(1-\sin^2x)^n d(\sin x)$$

wird. Ist aber m eine *gerade* Zahl, so kann man die Integration mit Hilfe der *Moivre*schen Formeln ausführen. Nach D.-R., Formel Nr. 182 der Tabelle ist

$$(4.)\quad 2^{2n}(\cos x)^{2n} = 2\cos(2nx) + \binom{2n}{1}2\cos(2n-2)x$$
$$+\binom{2n}{2}2\cos(2n-4)x + \cdots + \binom{2n}{n-1}2\cos(2x) + \binom{2n}{n};$$

indem man beide Seiten dieser Gleichung mit dx multipliziert und dann integriert, erhält man

$$(5.)\quad 2^{2n}\int\cos^{2n}x dx = \frac{2}{2n}\sin(2nx) + \binom{2n}{1}\frac{2}{2n-2}\sin(2n-2)x$$
$$+\binom{2n}{2}\frac{2}{2n-4}\sin(2n-4)x + \cdots + \binom{2n}{n-1}\sin(2x) + \binom{2n}{n}x.$$

Beispiel.

$$(6.)\quad 64\int\cos^6 x dx = \tfrac{1}{3}\sin(6x) + 3\sin(4x) + 15\sin(2x) + 20x.$$

Auch in dem Falle, wo m eine *ungerade* Zahl ist, kommt man mit Hilfe der *Moivre*schen Formeln zum Ziele, wenn auch nicht ganz so leicht wie durch Gleichung (3.). Nach D.-R., Formel Nr. 183 der Tabelle ist nämlich

$$(7.)\quad 2^{2n+1}(\cos x)^{2n+1} = 2\cos(2n+1)x + \binom{2n+1}{1}2\cos(2n-1)x$$
$$+\binom{2n+1}{2}2\cos(2n-3)x + \cdots + \binom{2n+1}{n-1}2\cos(3x)$$
$$+\binom{2n+1}{n}2\cos x;$$

indem man beide Seiten dieser Gleichung mit dx multipliziert und dann integriert, erhält man

$$(8.)\quad 2^{2n+1}\int\cos^{2n+1}x dx = \frac{2}{2n+1}\sin(2n+1)x$$
$$+\binom{2n+1}{1}\frac{2}{2n-1}\sin(2n-1)x$$
$$+\binom{2n+1}{2}\frac{2}{2n-3}\sin(2n-3)x + \cdots$$
$$+\binom{2n+1}{n-1}\frac{2}{3}\sin(3x) + \binom{2n+1}{n}2\sin x.$$

Beispiel.

$$(9.)\quad 128\int \cos^7 x\,dx = \frac{2}{7}\sin(7x) + \frac{14}{5}\sin(5x) + 14\sin(3x) + 70\sin x.$$

Aufgabe 4. $\int \sin^m x\,dx = ?$

Auflösung. In dem Falle, wo m eine *ungerade* Zahl ist, wendet man am besten Formel Nr. 56 der Tabelle an, nach welcher

$$(10.)\quad \int \sin^{2n+1} x\,dx = -\int (1-\cos^2 x)^n d(\cos x)$$

wird. Ist aber m eine *gerade* Zahl, so kann man die Integration mit Hilfe der *Moivre*schen Formeln ausführen. Nach D.-R., Formel Nr. 184 der Tabelle ist

$$(11.)\quad (-1)^n 2^{2n}(\sin x)^{2n} = 2\cos(2nx) - \binom{2n}{1}2\cos(2n-2)x$$
$$+\binom{2n}{2}2\cos(2n-4)x - + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}2\cos(2x)$$
$$+(-1)^n\binom{2n}{n};$$

indem man beide Seiten dieser Gleichung mit dx multipliziert und dann integriert, erhält man

$$(12.)\quad (-1)^n 2^{2n}\int \sin^{2n} x\,dx = \frac{2}{2n}\sin(2nx)$$
$$-\binom{2n}{1}\frac{2}{2n-2}\sin(2n-2)x$$
$$+\binom{2n}{2}\frac{2}{2n-4}\sin(2n-4)x -$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}\sin(2x)$$
$$+(-1)^n\binom{2n}{n}x.$$

Beispiel.

$$(13.)\quad -64\int \sin^6 x\,dx = \frac{1}{3}\sin(6x) - 3\sin(4x) + 15\sin(2x) - 20x.$$

Auch in dem Falle, wo m eine *ungerade* Zahl ist, kommt man mit Hilfe der *Moivre*schen Formeln zum Ziele, wenn auch nicht ganz so leicht wie durch Gleichung (10.). Nach D.-R., Formel Nr. 185 der Tabelle ist nämlich

$$(14.)\quad (-1)^n 2^{2n+1}(\sin x)^{2n+1} = 2\sin(2n+1)x - \binom{2n+1}{1}2\sin(2n-1)x + \binom{2n+1}{2}2\sin(2n-3)x - + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{n-1}2\sin(3x) + (-1)^n\binom{2n+1}{n}2\sin x;$$

indem man beide Seiten dieser Gleichung mit dx multipliziert und dann integriert, erhält man

$$(15.)\quad (-1)^n 2^{2n+1}\int \sin^{2n+1}x\,dx = -\frac{2}{2n+1}\cos(2n+1)x + \binom{2n+1}{1}\frac{2}{2n-1}\cos(2n-1)x - \binom{2n+1}{2}\frac{2}{2n-3}\cos(2n-3)x + - \cdots - (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{n-1}\frac{2}{3}\cos(3x) - (-1)^n\binom{2n+1}{n}2\cos x.$$

Beispiel.

$$(16.)\quad 128\int \sin^7 x\,dx = \frac{2}{7}\cos(7x) - \frac{14}{5}\cos(5x) + 14\cos(3x) - 70\cos x.$$

In ähnlicher Weise kann man auch $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ berechnen, wenn man die Formeln

$$(17.)\quad 2i\sin x = e^{xi} - e^{-xi}, \quad 2\cos x = e^{xi} + e^{-xi}$$

anwendet. Es ist z. B. nach den Gleichungen (17.), wenn man

$$(18.)\quad e^{xi} = \cos x + i\sin x = s, \quad e^{-xi} = \cos x - i\sin x = t$$

setzt und beachtet, daß $st = 1$ wird,

$$(19.)\quad -64\sin^2 x\cos^4 x = (e^{xi} - e^{-xi})^2(e^{xi} + e^{-xi})^4$$
$$= (s - t)^2(s + t)^4$$
$$= s^6 + 2s^5t - s^4t^2 - 4s^3t^3 - s^2t^4 + 2st^5 + t^6$$
$$= (s^6 + t^6) + 2(s^4 + t^4) - (s^2 + t^2) - 4$$
$$= 2\cos(6x) + 4\cos(4x) - 2\cos(2x) - 4,$$

also

$$(20.)\quad -64\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \tfrac{1}{3}\sin(6x) + \sin(4x) - \sin(2x) - 4x.$$

IV. Abschnitt.

Partielle Integration.

§ 15.

Erklärung der partiellen Integration.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 98.)

Sind u und v zwei beliebige Funktionen von x, welche eine Ableitung besitzen, so ist bekanntlich (vergl. D.-R., Formel Nr. 29 der Tabelle)

(1.) $$d(uv) = vdu + udv,$$

oder

(1a.) $$udv = d(uv) - vdu,$$

oder, wenn man beide Seiten dieser Gleichung integriert,

(2.) $$\int udv = uv - \int vdu.$$

Mit Hilfe dieser Formel ist die Integration der Differential-Funktion udv zurückgeführt auf die Integration von vdu, wobei es durch passende Wahl der Faktoren u und dv häufig erreicht werden kann, daß $\int vdu$ leichter zu ermitteln ist als $\int udv$.

Wie dieses Verfahren, welches man „*partielle Integration*“ nennt*), angewendet wird, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

---

*) Die häufig gebrauchte Bezeichnung „*teilweise Integration*“ ist sprachlich nicht zulässig.

§ 16.

Beispiele für die partielle Integration.

Aufgabe 1. $\int \ln x \,.\, dx = ?$

Auflösung. Setzt man

(1.) $$u = \ln x, \quad \text{also} \quad dv = dx,$$

so wird

(2.) $$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x,$$

folglich erhält man nach Formel Nr. 98 der Tabelle

$$\int \ln x \,.\, dx = x \,.\, \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \,.\, \ln x - \int dx,$$

oder

(3.) $$\int \ln x \,.\, dx = x(\ln x - 1).$$

Aufgabe 2. $\int \arcsin x \,.\, dx = ?$

Auflösung. Setzt man

(4.) $$u = \arcsin x, \quad \text{also} \quad dv = dx,$$

so wird

(5.) $$du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad v = x,$$

$$\int \arcsin x \,.\, dx = x \,.\, \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

folglich erhält man aus Formel Nr. 31 der Tabelle

(6.) $$\int \arcsin x \,.\, dx = x \,.\, \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}.$$

Aufgabe 3. $\int \operatorname{arctg} x \,.\, dx = ?$

Auflösung. Setzt man

(7.) $$u = \operatorname{arctg} x, \quad \text{also} \quad dv = dx,$$

so wird

(8.) $$du = \frac{dx}{1 + x^2}, \qquad v = x,$$

$$\int \operatorname{arctg} x \,.\, dx = x \,.\, \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1 + x^2},$$

folglich erhält man nach Formel Nr. 30 der Tabelle

(9.) $$\int \operatorname{arctg} x \,.\, dx = x \,.\, \operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$

Aufgabe 4. $\int x^m \ln x \,.\, dx = ?$

Auflösung. Setzt man

(10.) $$u = \ln x, \quad \text{also} \quad dv = x^m dx,$$

so wird

(11.) $$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

folglich erhält man nach Formel Nr. 98 der Tabelle

(12.) $$\int x^m \ln x \,.\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln x - \frac{1}{m+1} \int x^m dx$$
$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\ln x - \frac{1}{m+1}\right).$$

Für $m = 0$ geht diese Aufgabe in Aufgabe 1 über.

Aufgabe 5. $\int x \,.\, e^{mx} \,.\, dx = ?$

Auflösung. Setzt man

(13.) $$u = x, \quad \text{also} \quad dv = e^{mx} \,.\, dx,$$

so wird

(14.) $$du = dx, \quad v = \frac{1}{m} \cdot e^{mx},$$

(15.) $$\int x \,.\, e^{mx} \,.\, dx = \frac{x}{m} \cdot e^{mx} - \frac{1}{m} \int e^{mx} \,.\, dx$$
$$= \frac{1}{m^2} \cdot e^{mx}(mx - 1).$$

Aufgabe 6. $\int x \sin x \,.\, dx = ?$

Auflösung. Setzt man

(16.) $$u = x, \quad \text{also} \quad dv = \sin x \,.\, dx,$$

so wird

(17.) $$du = dx \qquad v = -\cos x,$$

(18.) $$\int x \sin x \,.\, dx = -x \cos x + \int \cos x \,.\, dx$$
$$= -x \cos x + \sin x.$$

Aufgabe 7. $\int x^2 \cos x \,.\, dx = ?$

Auflösung. Setzt man

(19.) $u = x^2$, also $dv = \cos x \,.\, dx$,

so wird

(20.) $du = 2x dx$, $v = \sin x$,

(21.) $\int x^2 \cos x \,.\, dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x \,.\, dx$,

folglich erhält man mit Rücksicht auf Gleichung (18.)

(22.) $\int x^2 \cos x \,.\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x$.

Aufgabe 8. $\int (\ln x)^m \,.\, dx = ?$

Auflösung. Setzt man

(23.) $u = (\ln x)^m$, also $dv = dx$,

so wird

(24.) $du = m(\ln x)^{m-1} \,.\, \frac{dx}{x}$, $v = x$,

(25.) $\int (\ln x)^m \,.\, dx = x(\ln x)^m - m\int (\ln x)^{m-1} \,.\, dx$.

Das gesuchte Integral ist durch diese Gleichung auf ein ähnliches zurückgeführt, das aus dem gesuchten hervorgeht, indem man m mit $m - 1$ vertauscht, und das deshalb einfacher ist. Durch wiederholte Anwendung der Gleichung (25.) findet man für jeden positiven ganzzahligen Wert von m das gesuchte Integral. Ist z. B. $m = 4$, so erhält man

(26.) $\int (\ln x)^4 \,.\, dx = x(\ln x)^4 - 4\int (\ln x)^3 \,.\, dx$,

(27.) $\int (\ln x)^3 \,.\, dx = x(\ln x)^3 - 3\int (\ln x)^2 \,.\, dx$,

(28.) $\int (\ln x)^2 \,.\, dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x \,.\, dx$,

(29.) $\int \ln x \,.\, dx = x \ln x - x$.

Indem man Gleichung (27.) mit -4, Gleichung (28.) mit $+4 \,.\, 3$, Gleichung (29.) mit $-4 \,.\, 3 \,.\, 2$ multipliziert und sodann die Gleichungen (26.) bis (29.) addiert, erhält man

(30.) $\int (\ln x)^4 \,.\, dx = x[(\ln x)^4 - 4(\ln x)^3$
$+ 4 \,.\, 3(\ln x)^2 - 4 \,.\, 3 \,.\, 2(\ln x) + 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1]$.

In ähnlicher Weise findet man

(31.) $\int(\ln x)^m . dx = x[(\ln x)^m - m(\ln x)^{m-1} + m(m-1)(\ln x)^{m-2}$
$- + \cdots \pm m(m-1)\ldots 3.2.\ln x \mp m!]$.

Aufgabe 9. $\int e^x . x^m . dx = ?$

Auflösung. Setzt man

(32.) $u = x^m, \quad \text{also} \quad dv = e^x . dx,$

so wird

(33.) $du = mx^{m-1} . dx, \quad v = e^x,$

(34.) $\int e^x . x^m dx = x^m . e^x - m\int e^x . x^{m-1} . dx.$

Auch hier ist das gesuchte Integral auf ein einfacheres zurückgeführt, das aus dem gesuchten hervorgeht, indem man m mit $m-1$ vertauscht. Deshalb findet man durch das gleiche Verfahren wie bei der vorhergehenden Aufgabe

(35.) $\int e^x . x^m dx = e^x[x^m - mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} - +$
$\cdots \pm m(m-1)\ldots 3.2.x \mp m!]$.

§ 17.

Integration von einigen trigonometrischen Funktionen durch partielle Integration.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 99 bis 118.)

Aufgabe 1. $\int \cos^2 x . dx = ?$

Auflösung. Setzt man

(1.) $u = \cos x, \quad \text{also} \quad dv = \cos x . dx,$

so wird

(2.) $du = -\sin x . dx, \quad v = \sin x,$

(3.) $\int \cos^2 x . dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x dx.$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, daß

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

ist, so geht Gleichung (3.) über in

$$\int \cos^2 x . dx = \cos x \sin x + \int dx - \int \cos^2 x . dx.$$

Dies gibt, wenn man das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung auf die linke Seite bringt und die ganze Gleichung durch 2 dividiert,

$$(4.)\qquad \int\cos^2x\,.\,dx = \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{x}{2}\,.$$

Aufgabe 2. $\int\sin^2x\,.\,dx = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(5.)\qquad u = \sin x,\quad \text{also}\quad dv = \sin x\,.\,dx,$$

so wird

$$(6.)\qquad du = \cos x\,.\,dx,\qquad v = -\cos x,$$

$$(7.)\qquad \int\sin^2x\,.\,dx = -\sin x\cos x + \int\cos^2x\,.\,dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, daß

$$\cos^2x = 1 - \sin^2x$$

ist, so geht Gleichung (7.) über in

$$\int\sin^2x\,.\,dx = -\sin x\cos x + \int dx - \int\sin^2x\,.\,dx.$$

Dies gibt, wenn man das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung auf die linke Seite bringt und die ganze Gleichung durch 2 dividiert,

$$(8.)\qquad \int\sin^2x\,.\,dx = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{x}{2}\,.$$

Man erkennt ohne weiteres den Zusammenhang zwischen den beiden letzten Aufgaben. Die Gleichungen (3.) und (7.) stimmen miteinander überein, und durch Addition der Gleichungen (4.) und (8.) erhält man

$$(9.)\quad \int\cos^2x\,.\,dx + \int\sin^2x\,.\,dx = \int(\cos^2x + \sin^2x)dx = \int dx = x.$$

Außerdem wird auch noch die Lösung der einen Aufgabe durch die Substitution

$$(10.)\qquad x = \frac{\pi}{2} - t$$

in die Lösung der anderen Aufgabe übergeführt. So wird durch diese Substitution z. B.

$$\int\sin^2x\,dx = -\int\cos^2t\,dt.$$

Ähnliches gilt auch für die hier noch folgenden Aufgaben; die Aufgaben lassen sich einander paarweise so zuordnen, daß die Lösung der einen Aufgabe sich unmittelbar aus der Lösung der anderen durch Anwendung dieser Substitution ergibt.

Die Aufgaben 1 und 2 lassen eine wichtige Verallgemeinerung zu, die in den Aufgaben 3 und 5 untersucht werden soll.

Aufgabe 3. $\int \cos^m x \,.\, dx = ?$

Auflösung. Setzt man

(11.) $u = \cos^{m-1} x, \quad \text{also} \quad dv = \cos x \,.\, dx,$

so wird

(12.) $du = -(m-1)\cos^{m-2} x \sin x\, dx, \quad v = \sin x,$

(13.) $\int \cos^m x \,.\, dx = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1)\int \cos^{m-2} x \sin^2 x\, dx.$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, daß

(14.) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \quad \text{also} \quad \cos^{m-2} x \sin^2 x = \cos^{m-2} x - \cos^m x$

ist, so erhält man

(15.) $\int \cos^m x \,.\, dx = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1)\int \cos^{m-2} x \,.\, dx$
$\qquad - (m-1)\int \cos^m x \,.\, dx,$

oder, wenn man das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung, welches mit dem gesuchten Integral identisch ist, auf die linke Seite bringt und die ganze Gleichung durch m dividiert,

(16.) $$\int \cos^m x \,.\, dx = \frac{1}{m}\cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} x \,.\, dx.$$

Für $m = 2$ geht diese Gleichung in Gleichung (4.) über.

Das Integral auf der rechten Seite von Gleichung (16.) geht aus dem gesuchten Integral hervor, indem man m mit $m - 2$ vertauscht, und wird daher einfacher, wenn $m \geqq 2$ ist. Es sei z. B. $m = 8$, dann wird

(17.) $$\int \cos^8 x \,.\, dx = \frac{1}{8}\cos^7 x \sin x + \frac{7}{8}\int \cos^6 x \,.\, dx,$$

(18.) $$\int \cos^6 x\,.\,dx = \frac{1}{6}\cos^5 x \sin x + \frac{5}{6}\int \cos^4 x\,.\,dx,$$

(19.) $$\int \cos^4 x\,.\,dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,.\,dx,$$

(20.) $$\int \cos^2 x\,.\,dx = \frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{x}{2}\,.$$

Indem man Gleichung (18.) mit $\frac{7}{8}$, Gleichung (19.) mit $\frac{7\,.\,5}{8\,.\,6}$, Gleichung (20.) mit $\frac{7\,.\,5\,.\,3}{8\,.\,6\,.\,4}$ multipliziert und sodann die Gleichungen (17.) bis (20.) addiert, erhält man

(21.) $$\int \cos^8 x\,.\,dx = \sin x\Big(\frac{1}{8}\cos^7 x + \frac{7}{8\,.\,6}\cos^5 x + \frac{7\,.\,5}{8\,.\,6\,.\,4}\cos^3 x + \frac{7\,.\,5\,.\,3}{8\,.\,6\,.\,4\,.\,2}\cos x\Big) + \frac{7\,.\,5\,.\,3\,.\,1}{8\,.\,6\,.\,4\,.\,2}x\,.$$

In ähnlicher Weise findet man

(22.) $$\int \cos^7 x\,.\,dx = \sin x\Big(\frac{1}{7}\cos^6 x + \frac{6}{7\,.\,5}\cos^4 x + \frac{6\,.\,4}{7\,.\,5\,.\,3}\cos^2 x + \frac{6\,.\,4\,.\,2}{7\,.\,5\,.\,3\,.\,1}\Big).$$

Man wird jedoch in allen Fällen, wo $m = 2n + 1$ eine *ungerade* Zahl ist, $\int \cos^m x\,dx$ lieber mit Hilfe von Formel Nr. 54 der Tabelle, nämlich mit Hilfe der Formel

$$\int \cos^{2n+1} x\,.\,dx = \int (1 - \sin^2 x)^n\,.\,d(\sin x)$$

berechnen. Für $m = 7$ findet man dann z. B.

(23.) $$\int \cos^7 x\,.\,dx = \int (1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x)\,d(\sin x)$$
$$= \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x\,.$$

Man kann die Übereinstimmung der beiden Resultate in Gleichung (22.) und (23.) leicht nachweisen.

Ist dagegen m eine *gerade* Zahl und positiv, so ist man, wenn man nicht die *Moivre*schen Formeln anwenden will (vergl. Formel Nr. 94 der Tabelle), auf die in Gleichung (16.) enthaltene Rekursionsformel angewiesen. Dabei findet man ähnlich wie in Gleichung (21.)

$$(24.)\quad \int\cos^{2n}x\,.\,dx = \sin x\Big[\frac{1}{2n}\cos^{2n-1}x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)}\cos^{2n-3}x$$

$$+\frac{(2n-1)(2n-3)}{2n\,.\,(2n-2)(2n-4)}\cos^{2n-5}x + \cdots$$

$$+\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\,.\,3}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4\,.\,2}\cos x\Big]$$

$$+\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\,.\,3\,.\,1}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4\,.\,2}x.$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann man mit Rücksicht auf Gleichung (16.) durch den Schluß von n auf $n+1$ beweisen.

Aufgabe 4. $\int\frac{dx}{\cos^n x} = ?$

Auflösung. Die Gleichung (16.) bleibt auch dann noch richtig, wenn m eine *negative* Zahl ist. Setzt man z. B.

$$m = -(n-2) = -n+2,$$

also

$$m-1 = -n+1 = -(n-1),\quad m-2 = -n,$$

so geht die Gleichung (16.) über in

$$(25.)\quad \int\frac{dx}{\cos^{n-2}x} = \frac{\sin x}{-(n-2)\cos^{n-1}x} + \frac{-(n-1)}{-(n-2)}\int\frac{dx}{\cos^n x}.$$

In diesem Falle ist aber das Integral auf der *linken* Seite der Gleichung einfacher als das auf der *rechten* Seite. Deshalb bringt man die Gleichung (25.) auf die Form

$$\frac{n-1}{n-2}\int\frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-2)\cos^{n-1}x} + \int\frac{dx}{\cos^{n-2}x},$$

oder

$$(26.)\quad \int\frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}.$$

Es ist z. B. mit Rücksicht auf Formel Nr. 48 der Tabelle

$$(27.)\quad \int\frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{\cos^3 x},$$

$$(28.)\quad \int\frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos x},$$

(29.) $$\int \frac{dx}{\cos x} = -\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right],$$

also, wenn man Gleichung (28.) mit $\frac{3}{4}$, Gleichung (29.) mit $\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}$ multipliziert und die Gleichungen (27.) bis (29.) addiert,

(30.) $$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{4 \cdot 2\cos^2 x} - \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right].$$

Für $n = 4$ erhält man

(31.) $$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3}\operatorname{tg} x.$$

Man wird aber, wenn n eine *gerade* Zahl ist, zur Berechnung von $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ zweckmäßiger die Formel Nr. 61 der Tabelle anwenden, nach welcher

(32.) $$\int \frac{dx}{\cos^{2m} x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{m-1} \cdot d(\operatorname{tg} x)$$

wird. In dem vorliegenden Falle ist z. B.

(33.) $$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\, d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x.$$

Aufgabe 5. $\int \sin^m x \,.\, dx = ?$

Auflösung. Durch die Substitution

$$x = \frac{\pi}{2} - t$$

kann diese Aufgabe, wie schon erwähnt, auf die Aufgabe 3 zurückgeführt werden; hier möge jedoch, davon unabhängig, die partielle Integration angewendet werden. Setzt man

(34.) $$u = \sin^{m-1} x, \quad \text{also} \quad dv = \sin x \,.\, dx,$$

so wird

(35.) $$du = (m-1)\sin^{m-2} x \cos x\, dx, \quad v = -\cos x,$$

(36.) $$\int \sin^m x \,.\, dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \sin^{m-2} x \cos^2 x\, dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, daß

(37.) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, also $\sin^{m-2}x \cos^2 x = \sin^{m-2}x - \sin^m x$ ist, so geht Gleichung (36.) über in

$$\int \sin^m x \,.\, dx = -\sin^{m-1}x \cos x + (m-1)\int \sin^{m-2}x \,.\, dx - (m-1)\int \sin^m x \,.\, dx.$$

Dies gibt, wenn man das zweite Integral auf der rechten Seite, welches mit dem gesuchten Integral identisch ist, auf die linke Seite bringt und die ganze Gleichung durch m dividiert,

$$(38.)\quad \int \sin^m x \,.\, dx = -\frac{1}{m}\sin^{m-1}x \cos x + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}x \,.\, dx.$$

Für $m = 2$ geht diese Gleichung in Gleichung (8.) über.

Das Integral auf der rechten Seite von Gleichung (38.) geht aus dem gesuchten hervor, indem man m mit $m - 2$ vertauscht, und wird daher einfacher für $m \geqq 2$. Es sei z. B. $m = 8$, dann erhält man

$$(39.)\quad \int \sin^8 x \,.\, dx = -\frac{1}{8}\sin^7 x \cos x + \frac{7}{8}\int \sin^6 x \,.\, dx,$$

$$(40.)\quad \int \sin^6 x \,.\, dx = -\frac{1}{6}\sin^5 x \cos x + \frac{5}{6}\int \sin^4 x \,.\, dx,$$

$$(41.)\quad \int \sin^4 x \,.\, dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x \,.\, dx,$$

$$(42.)\quad \int \sin^2 x \,.\, dx = -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{x}{2}.$$

Dies gibt ähnlich wie bei $\int \cos^8 x \,.\, dx$

$$(43.)\quad \int \sin^8 x \,.\, dx = -\cos x\Big(\frac{1}{8}\sin^7 x + \frac{7}{8.6}\sin^5 x + \frac{7.5}{8.6.4}\sin^3 x + \frac{7.5.3}{8.6.4.2}\sin x\Big) + \frac{7.5.3.1}{8.6.4.2}x.$$

In ähnlicher Weise findet man für $m = 7$

$$(44.)\quad \int \sin^7 x . dx = -\cos x\Big(\frac{1}{7}\sin^6 x + \frac{6}{7.5}\sin^4 x + \frac{6.4}{7.5.3}\sin^2 x + \frac{6.4.2}{7.5.3.1}\Big).$$

Man wird jedoch in allen Fällen, wo $m = 2n + 1$ eine *ungerade* Zahl ist, $\int \sin^m x \, . \, dx$ lieber mit Hilfe von Formel Nr. 56 der Tabelle, nämlich mit Hilfe der Formel

$$\int \sin^{2n+1} x \, . \, dx = -\int (1 - \cos^2 x)^n d(\cos x)$$

berechnen. Für $m = 7$ findet man dann z. B.

$$(45.)\quad \int \sin^7 x \, . \, dx = -\int (1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x)\, d(\cos x)$$
$$= -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x \, .$$

Ist dagegen m eine *gerade* Zahl, und will man nicht die *Moivre*schen Formeln anwenden (vergl. Formel Nr. 96 der Tabelle), so ist man auf die in Gleichung (38.) enthaltene Rekursionsformel angewiesen. Dabei findet man ähnlich wie in Gleichung (43.)

$$(46.)\quad \int \sin^{2n} x \, . \, dx = -\cos x \Big[\frac{1}{2n}\sin^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)}\sin^{2n-3} x$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)(2n-4)}\sin^{2n-5} x + \cdots$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5 \, . \, 3}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4 \, . \, 2}\sin x\Big]$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5 \, . \, 3 \, . \, 1}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4 \, . \, 2}\, x \, .$$

Aufgabe 6. $\quad \int \frac{dx}{\sin^n x} = ?$

Auflösung. Auch Gleichung (38.) bleibt noch richtig, wenn m eine *negative* Zahl ist. Setzt man daher wieder

$$m = -(n-2) = -n + 2,$$

also

$$m - 1 = -n + 1 = -(n-1), \quad m - 2 = -n,$$

so geht Gleichung (38.) über in

$$(47.)\quad \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} = -\frac{\cos x}{-(n-2)\sin^{n-1} x} + \frac{-(n-1)}{-(n-2)}\int \frac{dx}{\sin^n x} \, .$$

Daraus folgt in ähnlicher Weise wie vorhin

$$(48.)\quad \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} \, .$$

Es ist z. B. mit Rücksicht auf Formel Nr. 47 der Tabelle

(49.) $$\int\frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{\sin^3 x},$$

(50.) $$\int\frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x},$$

(51.) $$\int\frac{dx}{\sin x} = \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right],$$

also

(52.) $$\int\frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4\sin x} - \frac{3\cos x}{4\,.\,2\sin^2 x} + \frac{3\,.\,1}{4\,.\,2}\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Ist n eine *gerade* Zahl, so wird $\int\frac{dx}{\sin^n x}$ zweckmäßiger durch die Formel Nr. 64 der Tabelle, nämlich durch die Formel

$$\int\frac{dx}{\sin^{2m} x} = -\int(1 + \operatorname{ctg}^2 x)^{m-1}\,.\,d(\operatorname{ctg} x)$$

ermittelt. Es ist z. B.

(53.) $$\int\frac{dx}{\sin^4 x} = -\int(1 + \operatorname{ctg}^2 x)\,d(\operatorname{ctg} x) = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x.$$

Aufgabe 7. $\int\sin^m x\cos^n x\,dx =$

Auflösung. Ist n eine *ungerade* Zahl, so findet man die einfachste Lösung der Aufgabe mit Hilfe von Formel Nr. 57 der Tabelle; und ist m eine *ungerade* Zahl, so kann man Formel Nr. 58 der Tabelle mit gutem Erfolge anwenden. Sind aber m und n beide *gerade* Zahlen, so wird man in den meisten Fällen durch Anwendung der Formeln

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad \text{und} \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

zum Ziele kommen. Handelt es sich z. B. um $\int\cos^6 x\sin^4 x\,dx$, so wird man setzen

$$\int\cos^6 x\sin^4 x\,dx = \int\cos^6 x(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)dx$$

$$= \int\cos^6 x\,dx - 2\int\cos^8 x\,dx + \int\cos^{10} x\,dx.$$

Diese Integrale kann man aber mit Hilfe der Formel Nr. 101 der Tabelle berechnen.

Oder man setzt

$$\int \cos^6 x \sin^4 x dx = \int \sin^4 x(1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x) dx$$
$$= \int \sin^4 x \, dx - 3\int \sin^6 x \, dx + 3\int \sin^8 x \, dx - \int \sin^{10}$$

und benutzt dann Formel Nr. 104 der Tabelle zur Bere nung dieser Integrale.

Man kann aber auf die vorgelegten Integrale a unmittelbar *partielle* Integration anwenden. Setzt n nämlich

(54.) $$u = \sin^{m-1} x, \quad dv = \cos^n x \sin x \, dx,$$

und deshalb

(55.) $$du = (m-1)\sin^{m-2} x \cos x \, dx, \quad v = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1},$$

so erhält man

(56.) $$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x \, dx.$$

Ist m positiv und n negativ, so ist diese Formel s brauchbar. Ist z. B.

$$n = -m,$$

so geht Gleichung (56.) über in

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^m x} dx = -\frac{\sin^{m-1} x}{(-m+1)\cos^{m-1} x} + \frac{m-1}{-m+1}\int \frac{\sin^{m-2} x}{\cos^{m-2} x}$$

oder

(57.) $$\int \operatorname{tg}^m x \, dx = \frac{1}{m-1}\operatorname{tg}^{m-1} x - \int \operatorname{tg}^{m-2} x \, dx.$$

Ist aber n gleichfalls positiv, so benutze man die ziehungen

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$
$$\sin^{m-2} x \cos^{n+2} x = \sin^{m-2} x \cos^n x - \sin^m x \cos^n x.$$

Dadurch geht Gleichung (56.) über in

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^n$$
$$- \frac{m-1}{n+1}\int \sin^m x \cos^n x$$

oder

$$\frac{m+n}{n+1}\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1}x \cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2}x \cos^n x\, dx.$$

Daraus folgt

(58.) $$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1}x \cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x \cos^n x\, dx.$$

Durch diese Formel kann man den Exponenten von $\sin x$ reduzieren. Einen besonderen Fall dieser Formel erhält man für $n = 0$, dann geht nämlich Gleichung (58.) in Gleichung (38.) über.

Vertauscht man in Gleichung (58.) m mit $-m+2$, also $m-1$ mit $-m+1$ und $m-2$ mit $-m$, so erhält man

$$\int \frac{\cos^n x dx}{\sin^{m-2}x} = -\frac{\cos^{n+1}x}{(n-m+2)\sin^{m-1}x} - \frac{m-1}{n-m+2}\int \frac{\cos^n x dx}{\sin^m x},$$

oder

(59.) $$\int \frac{\cos^n x dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos^{n+1}x}{(m-1)\sin^{m-1}x} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n x dx}{\sin^{m-2}x}.$$

Einen besonderen Fall dieser Formel erhält man wieder für $n = 0$, dann geht nämlich Gleichung (59.), wenn man m mit n vertauscht, in Gleichung (48.) über.

In ähnlicher Weise kann man den Exponenten von $\cos x$ reduzieren. Setzt man nämlich

(60.) $$u = \cos^{n-1}x, \quad dv = \sin^m x \cos x\, dx,$$

also

(61.) $$du = -(n-1)\cos^{n-2}x \sin x\, dx, \quad v = \frac{\sin^{m+1}x}{m+1},$$

so wird

(62.) $$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1}x \cos^{n-1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2}x \cos^{n-2}x\, dx.$$

Ist n positiv und m negativ, so ist diese Formel sehr brauchbar; ist z. B.

$$m = -n,$$

so geht Gleichung (62.) über in

$$(63.)\qquad \int \operatorname{ctg}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1}x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2}x\,dx.$$

Ist aber m gleichfalls positiv, so benutze man die Beziehungen

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

$$\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x = \sin^m x\cos^{n-2}x - \sin^m x\cos^n x.$$

Dadurch geht Gleichung (62.) über in

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x\cos^{n-2}x\,dx$$
$$- \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x\cos^n x\,dx,$$

oder

$$\frac{m+n}{m+1}\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}$$
$$+ \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x\cos^{n-2}x\,dx;$$

daraus folgt

$$(64.)\qquad \int \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}$$
$$+ \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2}x\,dx.$$

Durch diese Formel kann man den Exponenten von $\cos x$ reduzieren. Einen besonderen Fall dieser Formel erhält man für $m = 0$, dann geht nämlich Gleichung (64.), wenn man n mit m vertauscht, in Gleichung (16.) über.

Vertauscht man in Gleichung (64.) n mit $-n+2$, also $n-1$ mit $-n+1$, $n-2$ mit $-n$, so erhält man

$$\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^{n-2}x} = \frac{\sin^{m+1}x}{(m-n+2)\cos^{n-1}x} + \frac{-n+1}{m-n+2}\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^n x},$$

oder

$$(65.)\qquad \int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m+1}x}{(n-1)\cos^{n-1}x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^{n-2}x}.$$

Einen besonderen Fall dieser Formel enthält bereits Gleichung (26.).

Die hergeleiteten Formeln bleiben richtig, gleichviel, ob die Zahlen m und n *gerade* oder *ungerade* sind.

Was in den vorstehenden Aufgaben für die *trigonometrischen* Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ gezeigt worden ist, kann in entsprechender Weise auch für die *hyperbolischen* Funktionen $\mathfrak{Sin}\, x$, $\mathfrak{Cos}\, x$, $\mathfrak{Tg}\, x$, $\mathfrak{Ctg}\, x$ ausgeführt werden; um Raum zu sparen, sollen hier nur die Resultate angegeben werden. Es ist

$$\int \mathfrak{Cos}^m x \,.\, dx = \frac{1}{m}\mathfrak{Cos}^{m-1} x\, \mathfrak{Sin}\, x + \frac{m-1}{m}\int \mathfrak{Cos}^{m-2} x \,.\, dx, \tag{66.}$$

$$\int \mathfrak{Sin}^m x \,.\, dx = \frac{1}{m}\mathfrak{Sin}^{m-1} x\, \mathfrak{Cos}\, x - \frac{m-1}{m}\int \mathfrak{Sin}^{m-2} x \,.\, dx, \tag{67.}$$

$$\int \mathfrak{Tg}^m x \,.\, dx = -\frac{1}{m-1}\mathfrak{Tg}^{m-1} x + \int \mathfrak{Tg}^{m-2} x \,.\, dx, \tag{68.}$$

$$\int \mathfrak{Ctg}^m x \,.\, dx = -\frac{1}{m-1}\mathfrak{Ctg}^{m-1} x + \int \mathfrak{Ctg}^{m-2} x \,.\, dx. \tag{69.}$$

Aufgabe 8. $\int e^{ax}\cos(bx)dx = ?$

Auflösung. Setzt man

$$u = e^{ax}, \qquad dv = \cos(bx)dx, \tag{70.}$$

also

$$du = ae^{ax}dx, \qquad v = \frac{1}{b}\sin(bx), \tag{71.}$$

so erhält man

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)dx. \tag{72.}$$

Setzt man dagegen

$$u = e^{ax}, \qquad dv = \sin(bx)dx, \tag{73.}$$

also

$$du = ae^{ax}dx, \qquad v = -\frac{1}{b}\cos(bx), \tag{74.}$$

so erhält man

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)dx. \tag{75.}$$

Dies gibt, wenn man Gleichung (75.) mit $-\frac{a}{b}$ multipliziert, zu Gleichung (72.) addiert und das Resultat durch $\frac{a^2+b^2}{b^2}$ dividiert,

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx = e^{ax}\,.\,\frac{a\cos(bx)+b\sin(bx)}{a^2+b^2}. \tag{76.}$$

Multipliziert man dagegen Gleichung (72.) mit $\frac{a}{b}$, addiert dann Gleichung (75.) und dividiert durch $\frac{a^2+b^2}{b^2}$, so erhält man

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = e^{ax}\,.\,\frac{a\sin(bx)-b\cos(bx)}{a^2+b^2}. \tag{77.}$$

Noch einfacher findet man diese Gleichungen (76.) und (77.) durch Anwendung der Formeln

$$2\cos(bx) = e^{bxi} + e^{-bxi}, \quad 2i\sin(bx) = e^{bxi} - e^{-bxi}.$$

§ 18.

Integration von einigen irrationalen Funktionen durch partielle Integration.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 119 bis 131 a.)

Aufgabe 1. $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = ?$

Auflösung. Die Aufgabe ist mit Aufgabe 5 im vorhergehenden Paragraphen nahe verwandt, denn setzt man

$$x = a\sin t, \quad \text{also} \quad dx = a\cos t dt, \quad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t,$$

so wird

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{a^m\sin^m t\,.\,a\cos t dt}{a\cos t} = a^m\int\sin^m t dt.$$

Die folgenden Umformungen entsprechen deshalb Zeile für Zeile denen in jener Aufgabe. Hier setzt man

$$u = x^{m-1}, \quad \text{also} \quad dv = \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \tag{1.}$$

dann wird nach Formel Nr. 31 der Tabelle

$$du = (m-1)x^{m-2}dx, \quad v = -\sqrt{a^2-x^2}, \tag{2.}$$

$$(3.)\quad \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2} + (m-1)\int x^{m-2}dx\sqrt{a^2-x^2}.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, daß

$$\sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}},\ \text{also daß}\ x^{m-2}\sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^2x^{m-2}-x^m}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

ist, so geht Gleichung (3.) über in

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2} + (m-1)\int \frac{(a^2x^{m-2}-x^m)dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Dies gibt

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2} + (m-1)a^2\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - (m-1)\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist mit dem gesuchten Integrale identisch. Bringt man dasselbe auf die linke Seite und dividiert die ganze Gleichung durch m, so findet man

$$(4.)\quad \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{(m-1)a^2}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

In dieser Formel geht das Integral auf der rechten Seite der Gleichung aus dem gesuchten Integral hervor, indem man m mit $m-2$ vertauscht. Es ist daher, wenn die ganze Zahl $m \geqq 2$ ist, einfacher als das gesuchte Integral.

Für $m = 6$ erhält man z. B. mit Rücksicht auf Formel Nr. 34 der Tabelle

$$(5.)\quad \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^5}{6}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{5a^2}{6}\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$(6.)\quad \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^3}{4}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^2}{4}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$(7.)\quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$(8.)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Indem man Gleichung (6.) mit $\frac{5a^2}{6}$, Gleichung (7.) mit $\frac{5\,.\,3a^4}{6\,.\,4}$, Gleichung (8.) mit $\frac{5\,.\,3\,.\,1a^6}{6\,.\,4\,.\,2}$ multipliziert und die Gleichungen (5.) bis (8.) addiert, erhält man

$$(9.)\qquad \int\frac{x^6dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}\left(\frac{x^5}{6}+\frac{5a^2x^3}{6\,.\,4}+\frac{5\,.\,3a^4x}{6\,.\,4\,.\,2}\right) + \frac{5\,.\,3\,.\,1}{6\,.\,4\,.\,2}a^6\arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

In ähnlicher Weise findet man für $m=7$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 31 der Tabelle

$$(10.)\int\frac{x^7dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}\left(\frac{x^6}{7}+\frac{6a^2x^4}{7\,.\,5}+\frac{6\,.\,4a^4x^2}{7\,.\,5\,.\,3}+\frac{6\,.\,4\,.\,2a^6}{7\,.\,5\,.\,3\,.\,1}\right).$$

Man wird aber die in Gleichung (4.) enthaltene Rekursionsformel nur anwenden, wenn m eine *gerade* Zahl ist. Für *ungerades* m, also für $m=2n+1$ führt die Substitution

$$(11.)\qquad \sqrt{a^2-x^2} = t$$

schneller zum Ziele. Es wird dann nämlich

$$a^2-x^2=t^2,\quad x^2=a^2-t^2,\quad xdx=-tdt,$$

also

$$(12.)\int\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int\frac{(a^2-t^2)^ntdt}{t} = -\int(a^2-t^2)^ndt,$$

so daß man nur eine ganze rationale Funktion zu integrieren hat. Es ist z. B.

$$\int\frac{x^7dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int(a^6-3a^4t^2+3a^2t^4-t^6)dt$$
$$= -\left(a^6t-a^4t^3+\frac{3}{5}a^2t^5-\frac{1}{7}t^7\right)$$
$$= -t\left(a^6-a^4t^2+\frac{3}{5}a^2t^4-\frac{1}{7}t^6\right),$$

oder, wenn man für t den Wert aus Gleichung (11.) einsetzt,

$$(13.)\quad \int\frac{x^7dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}\Big(\frac{x^6}{7}+\frac{6a^2x^4}{7\,.\,5}+\frac{6\,.\,4a^4x^2}{7\,.\,5\,.\,3}+\frac{6\,.\,4\,.\,2a^6}{7\,.\,5\,.\,3\,.\,1}\Big).$$

Das in Gleichung (9.) enthaltene Resultat kann man sogleich verallgemeinern. Setzt man nämlich

$$c_1 = \frac{1}{2},\quad c_2 = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4},\quad c_3 = \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6},\ldots$$

allgemein

$$(14.)\quad c_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n)},\quad c_{n+1} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n)(2n+2)},$$

so wird

$$(15.)\quad \frac{c_2}{c_1} = \frac{3}{4},\quad \frac{c_3}{c_2} = \frac{5}{6},\ldots \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Setzt man ferner

$$G_1(x) = \frac{x}{2} = c_1x,$$

$$G_2(x) = \frac{x^3}{4}+\frac{3a^2x}{2\,.\,4} = \frac{c_2}{c_1}\Big(\frac{x^3}{3}+\frac{a^2x}{2}\Big) = \frac{c_2}{c_1}\Big[\frac{x^3}{3}+a^2G_1(x)\Big],$$

$$G_3(x) = \frac{x^5}{6}+\frac{5a^2x^3}{4\,.\,6}+\frac{3\,.\,5a^4x}{2\,.\,4\,.\,6} = \frac{c_3}{c_2}\Big[\frac{x^5}{5}+\frac{a^2x^3}{4}+\frac{3a^4x}{2\,.\,4}\Big]$$
$$= \frac{c_3}{c_2}\Big[\frac{x^5}{5}+a^2G_2(x)\Big];$$

. . . .

allgemein

$$(16.)\quad G_n(x) = \frac{x^{2n-1}}{2n}+\frac{(2n-1)a^2x^{2n-3}}{(2n-2)2n}+\cdots+\frac{3\,.\,5\ldots(2n-1)a^{2n-2}x}{2\,.\,4\ldots(2n-2)2n},$$

$$(17.)\quad G_{n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+2}+\frac{(2n+1)a^2x^{2n-1}}{2n(2n+2)}$$
$$+\frac{(2n-1)(2n+1)a^4x^{2n-3}}{(2n-2)(2n)(2n+2)}+\cdots+\frac{3\,.\,5\ldots(2n-1)(2n+1)a^{2n}x}{2\,.\,4\ldots(2n-2)2n(2n+2)}$$
$$= \frac{c_{n+1}}{c_n}\Big[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\frac{a^2x^{2n-1}}{2n}+\frac{(2n-1)a^4x^{2n-3}}{(2n-2)2n}+\cdots+\frac{3\,.\,5\ldots(2n-1)a^{2n}x}{2\,.\,4\ldots(2n-2)2n}\Big];$$

so wird

$$G_{n+1}(x) = \frac{c_{n+1}}{c_n}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + a^2 G_n(x)\right]. \tag{18.}$$

Nach Einführung dieser Bezeichnungen erhält man

$$\int\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = c_n \,.\, a^{2n}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-x^2}\,.\, G_n(x). \tag{19.}$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann man durch den Schluß von n auf $n+1$ beweisen. Es ist nämlich nach Gleichung (4.) für $m = 2n+2$

$$\int\frac{x^{2n+2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{2n+1}}{2n+2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{(2n+1)a^2}{2n+2}\int\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

oder, wenn man voraussetzt, daß Gleichung (19.) richtig ist,

$$\int\frac{x^{2n+2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{2n+1}}{2n+2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{(2n+1)a^2}{2n+2}c_n a^{2n}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$-\frac{(2n+1)a^2}{2n+2}\sqrt{a^2-x^2}\,.\, G_n(x),$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen (15.) und (18.)

$$\int\frac{x^{2n+2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = c_{n+1}a^{2n+2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-x^2}\,.\, G_{n+1}(x). \tag{20.}$$

Ist also die Gleichung (19.) richtig, so bleibt sie auch richtig, wenn man n mit $n+1$ vertauscht. Aus den Gleichungen (5.) bis (9.) erkennt man, daß die Gleichung (19.) für $n = 1$, 2 und 3 richtig ist, folglich bleibt sie auch richtig für $n = 4, 5, 6, \ldots$, d. h. für *alle* ganzzahligen, positiven Werte von n.

Aufgabe 2. $\int x^m dx\sqrt{a^2-x^2} = ?$

Auflösung. Es ist

$$x^m\sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^2x^m - x^{m+2}}{\sqrt{a^2-x^2}}, \tag{21.}$$

folglich wird

$$\int x^m dx\sqrt{a^2-x^2} = a^2\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int\frac{x^{m+2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{22.}$$

Nun erhält man aus Gleichung (4.) durch Vertauschung von m mit $m+2$

$$(23.)\quad \int\frac{x^{m+2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{m+1}}{m+2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{(m+1)a^2}{m+2}\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der vorigen, so ergibt sich

$$(24.)\quad \int x^m dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{m+2}\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung kann man dann weiter durch die in Gleichung (4.) enthaltene Rekursionsformel reduzieren. Man findet z. B. für $m=0$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 34 der Tabelle

$$(25.)\quad \int dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right),$$

und für $m=1$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 31 der Tabelle

$$(26.)\quad \int xdx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x^2}{3}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{a^2}{3}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$= -\frac{1}{3}(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}.$$

Auch hier wird in dem Falle, wo der Exponent m eine *ungerade* Zahl ist, die Substitution

$$\sqrt{a^2-x^2} = t,\quad x^2 = a^2-t^2,\quad xdx = -tdt$$

schneller zum Ziele führen. So ist z. B.

$$\int xdx\sqrt{a^2-x^2} = -\int t^2dt = -\frac{t^3}{3},$$

woraus sich wieder das in Gleichung (26.) gefundene Resultat ergibt.

Aufgabe 3. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^n\sqrt{a^2-x^2}} = ?$

Auflösung. Gleichung (4.) bleibt auch dann noch richtig, wenn m eine *negative* Zahl ist. Setzt man z. B.

$$m = -(n-2) = -n+2,$$

also

$$m-1 = -n+1 = -(n-1),\quad m-2 = -n,$$

so geht Gleichung (4.) über in

$$\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(n-2)x^{n-1}} + \frac{-(n-1)a^2}{-(n-2)}\int \frac{dx}{x^n\sqrt{a^2-x^2}}.$$

In dieser Gleichung ist das Integral auf der *linken* Seite einfacher als das auf der *rechten*. Deshalb vertauscht man beide Seiten der Gleichung und findet durch Multiplikation mit dem Faktor $\frac{n-2}{(n-1)a^2}$

$$(27.)\quad \int \frac{dx}{x^n\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(n-1)a^2x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)a^2}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Es ist z. B. für $n = 2$ in Übereinstimmung mit Formel Nr. 38 der Tabelle

$$(28.)\quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}.$$

Auf dieses Integral kann man $\int \frac{dx}{x^{2m}\sqrt{a^2-x^2}}$ durch wiederholte Anwendung der gefundenen Rekursionsformel immer zurückführen. Dagegen gelangt man für *ungerade* Werte von n zu $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$, auf welches die in Gleichung (27.) enthaltene Formel nicht mehr anwendbar ist, weil die rechte Seite die Form $\infty - \infty$ annimmt. Man erhält aber nach Formel Nr. 37 der Tabelle

$$(29.)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\,\mathfrak{ArCof}\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right).$$

Aufgabe 4. $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = ?$

Auflösung. Man kann das gesuchte Integral leicht auf $\int \mathfrak{Sin}^m t \,.\, dt$ zurückführen, indem man

$$x = a\,\mathfrak{Sin}\, t$$

setzt; denn dann wird

$$dx = a\,\mathfrak{Cof}\, t \,.\, dt, \quad \sqrt{a^2+x^2} = a\,\mathfrak{Cof}\, t,$$

also

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = a^m \int \mathfrak{Sin}^m t \,.\, dt.$$

Unabhängig davon kann man die Aufgabe in folgender Weise lösen. Setzt man

$$(30.)\qquad u = x^{m-1}, \quad \text{also} \quad dv = \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

so erhält man

$$(31.)\qquad du = (m-1)x^{m-2}dx, \quad v = \sqrt{a^2+x^2},$$

$$(32.)\quad \int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = x^{m-1}\sqrt{a^2+x^2} - (m-1)\int x^{m-2}dx\sqrt{a^2+x^2}.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, daß

$$\sqrt{a^2+x^2} = \frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}; \quad x^{m-2}\sqrt{a^2+x^2} = \frac{a^2x^{m-2}+x^m}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

ist, so geht Gleichung (32.) über in

$$(33.)\quad \int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = x^{m-1}\sqrt{a^2+x^2} - (m-1)a^2\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$
$$- (m-1)\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Bringt man das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung, da es mit dem gesuchten identisch ist, auf die linke Seite und dividiert die ganze Gleichung durch m, so erhält man

$$(34.)\quad \int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{(m-1)a^2}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Es ist z. B. für $m = 6$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 35 der Tabelle

$$(35.)\qquad \int\frac{x^6 dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x^5}{6}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{5a^2}{6}\int\frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$(36.)\qquad \int\frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x^3}{4}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{3a^2}{4}\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$(37.)\qquad \int\frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$(38.)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right).$$

Dies gibt

$$(39.)\quad \int\frac{x^6dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2}\left(\frac{x^5}{6} - \frac{5a^2x^3}{6.4} + \frac{5.3a^4x}{6.4.2}\right) - \frac{5.3.1}{6.4.2}a^6\ln\left(\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right).$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(40.)\quad \int\frac{x^7dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2}\left(\frac{x^6}{7} - \frac{6a^2x^4}{7.5} + \frac{6.4a^4x^2}{7.5.3} - \frac{6.4.2a^6}{7.5.3.1}\right);$$

man wird aber, wenn m eine *ungerade* Zahl ist, schneller zum Ziele kommen, indem man die Substitution

$$\sqrt{a^2+x^2} = t,\quad x^2 = t^2 - a^2,\quad \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}} = dt$$

anwendet. So findet man z. B.

$$(41.)\quad \int\frac{x^7dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int x^6dt = \int(t^6 - 3a^2t^4 + 3a^4t^2 - a^6)dt$$

$$= \frac{t^7}{7} - \frac{3a^2t^5}{5} + a^4t^3 - a^6t.$$

Die vorstehenden Formeln bleiben sämtlich noch richtig, wenn man $+a^2$ mit $-a^2$ vertauscht. Dadurch findet man z. B. aus Gleichung (34.)

$$(42.)\quad \int\frac{x^m dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{(m-1)a^2}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

und aus den Gleichungen (37.) und (38.)

$$(43.)\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)^{*)}$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\,\mathfrak{ArCof}\left(\frac{x}{a}\right).$$

*) Durch Vertauschung von $+a^2$ mit $-a^2$ geht allerdings

$$\ln\left(\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right) = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) - \ln a$$

über in

$$\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) - \ln(a\sqrt{-1}) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) - \ln(\sqrt{-1}).$$

Hierbei darf aber die Integrations-Konstante $-\ln(\sqrt{-1})$ fortgelassen werden.

Man kann das Integral $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ leicht auf $\int\mathfrak{Cos}^m t\,.\,dt$ zurückführen, indem man

$$x = a\mathfrak{Cos}\, t$$

setzt; denn dann wird

$$dx = a\mathfrak{Sin}\, t\,.\,dt,\quad \sqrt{x^2-a^2} = a\mathfrak{Sin}\, t,$$

also

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = a^m\int\mathfrak{Cos}^m t\,.\,dt.$$

Aufgabe 5. $\int x^m dx\sqrt{a^2+x^2} = ?$

Auflösung. Es ist

$$(44.)\qquad x^m\sqrt{a^2+x^2} = \frac{a^2x^m + x^{m+2}}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

folglich wird

$$(45.)\qquad \int x^m dx\sqrt{a^2+x^2} = a^2\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}} + \int\frac{x^{m+2}dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Nun erhält man aus Gleichung (34.) durch Vertauschung von m mit $m+2$

$$(46.)\qquad \int\frac{x^{m+2}dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x^{m+1}}{m+2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{(m+1)a^2}{m+2}\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Addiert man diese Gleichung zu der vorigen, so ergibt sich

$$(47.)\qquad \int x^m dx\sqrt{a^2+x^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{m+2}\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung kann man dann weiter durch die in Gleichung (34.) enthaltene Rekursionsformel reduzieren. Man findet z. B. für $m=0$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 35 der Tabelle

$$(48.)\qquad \int dx\sqrt{a^2+x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right),$$

und für $m=1$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 32 der Tabelle

$$(49.)\quad \int xdx\sqrt{a^2+x^2} = \frac{x^2}{3}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{3}\sqrt{a^2+x^2} = \frac{1}{3}(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}.$$

Auch hier wird man in dem Falle, wo der Exponent m eine *ungerade* Zahl ist, besser die Substitution

$$\sqrt{a^2+x^2}=t$$

benutzen.

Durch Vertauschung von $+a^2$ mit $-a^2$ gehen die Gleichungen (47.) bis (49.) über in

$$(50.)\quad \int x^m dx\sqrt{x^2-a^2}=\frac{x^{m+1}}{m+2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{m+2}\int\frac{x^m dx}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$(51.)\quad \int dx\sqrt{x^2-a^2}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)^{*)},$$

$$(52.)\quad \int xdx\sqrt{x^2-a^2}=\frac{1}{3}(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}.$$

Aufgabe 6. $\int\frac{dx}{x^n\sqrt{a^2+x^2}}=?$

Auflösung. Gleichung (34.) bleibt auch dann noch richtig, wenn m eine *negative* Zahl ist. Setzt man z. B.

$$m=-(n-2)=-n+2,$$

also

$$m-1=-n+1=-(n-1),\quad m-2=-n,$$

so geht Gleichung (34.) über in

$$(53.)\quad \int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2+x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{(n-2)x^{n-1}}-\frac{(n-1)a^2}{n-2}\int\frac{dx}{x^n\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Vertauscht man beide Seiten dieser Gleichung miteinander und multipliziert mit dem Faktor $-\frac{n-2}{(n-1)a^2}$, so erhält man

$$(54.)\quad \int\frac{dx}{x^n\sqrt{a^2+x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{(n-1)a^2x^{n-1}}-\frac{n-2}{(n-1)a^2}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Es ist z. B. für $n=2$ in Übereinstimmung mit Formel Nr. 40 der Tabelle

$$(55.)\quad \int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}.$$

Auf dieses Integral kann $\int\frac{dx}{x^{2m}\sqrt{a^2+x^2}}$ durch wiederholte Anwendung der in Gleichung (54.) enthaltenen Re-

*) Vergl. die Anmerkung auf Seite 102.

kursionsformel immer zurückgeführt werden. Dagegen gelangt man in dem Falle, wo n eine *ungerade* Zahl ist, zu $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$, auf welches die in Gleichung (54.) enthaltene Formel nicht mehr anwendbar ist, weil die rechte Seite die Form $-\infty+\infty$ annimmt. Man erhält aber nach Formel Nr. 39 der Tabelle

$$(56.)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right).$$

Vertauscht man $+a^2$ mit $-a^2$, so gehen die Gleichungen (54.) und (55.) über in

$$(57.)\quad \int\frac{dx}{x^n\sqrt{x^2-a^2}} = +\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{(n-1)a^2x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)a^2}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$(58.)\quad \int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = +\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}.$$ (Vergl. Formel Nr. 42 der Tabelle.)

Auf dieses Integral läßt sich $\int\frac{dx}{x^{2m}\sqrt{x^2-a^2}}$ durch wiederholte Anwendung der in Gleichung (57.) enthaltenen Rekursionsformel immer zurückführen. Dagegen gelangt man in dem Falle, wo n eine *ungerade* Zahl ist, zu $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$, auf welches die in Gleichung (57.) enthaltene Formel nicht mehr anwendbar ist, weil die rechte Seite die Form $\infty-\infty$ annimmt. Man erhält aber nach Formel Nr. 41 der Tabelle

$$(59.)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a}\arcsin\left(\frac{a}{x}\right).$$

Anwendungen der Integral-Rechnung.

V. Abschnitt.

Quadratur der Kurven.

§ 19.

Quadratur der Kurven bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten.

Nach Formel Nr. 4 der Tabelle ist der Flächeninhalt einer ebenen Figur, welche begrenzt wird

1.) von der Kurve $y = f(x)$,
2.) von der X-Achse,
3.) von den beiden Ordinaten $x = a$ und $x = b$,

gleich

$$(1.)\qquad F = \int_a^b y dx = \int_a^b F'(x) dx = \Big[F(x) \Big]_a^b = F(b) - F(a),$$

wobei $F'(x) = f(x)$ sein soll.

Die Berechnung des Flächeninhaltes von solchen ebenen Figuren nennt man: „*Quadratur der Kurven*“. Man kann die dafür angegebene Formel sofort zur Lösung der folgenden Aufgaben benutzen.

Aufgabe 1. Es sei eine Kurve durch die Gleichung

$$(2.)\qquad 8y = x^2$$

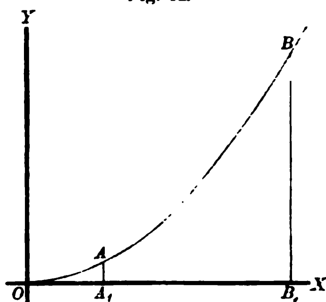
gegeben (Fig. 12): man soll die Fläche $A_1 B_1 B A$ berechnen, welche durch die beiden Ordinaten

$$x = a = 2 \quad \text{und} \quad x = b = 7$$

grenzt wird.

Auflösung. Nach Gleichung (1.) wird

Fig. 12.



) $$F = \frac{1}{8}\int_2^7 x^2 dx = \frac{1}{24}\left|x^3\right|_2^7$$

$$= \frac{1}{24}(7^3 - 2^3)$$

$$= \frac{343 - 8}{24} = \frac{335}{24}.$$

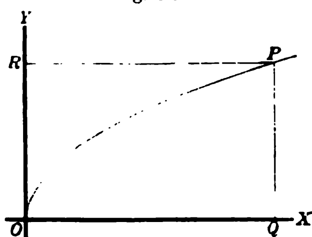
Aufgabe 2. Die Gleichung ner *Parabel OP* (Fig. 13) sei

.) $$y^2 = 2px, \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{2px};$$

an soll den Flächeninhalt der Figur OQP berechnen.

Auflösung. Da in diesem Falle der Punkt O die Ab-isse 0 und der Punkt P die Abszisse OQ gleich x hat, erhält man nach Gleichung (1.)

Fig. 13.



.) $$F = \int_0^x y dx = \int_0^x \sqrt{2px} \, . \, dx$$

$$= \sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \sqrt{2p}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^x = \frac{2x}{3}\sqrt{2px},$$

der

(6.) $$F = \frac{2xy}{3}.$$

In diesem Resultate ist der Satz enthalten:

Die von der Parabel OP, der X-Achse und einer be-ebigen Ordinate QP begrenzte ebene Figur verhält sich zur läche des Rechtecks OQPR mit den Seiten $OQ = x$ und P $= y$ wie 2 : 3.

Aufgabe 3. Die Gleichung einer *Parabel* (Fig. 14) sei

.) $$y^2 = 9x, \quad \text{oder} \quad y = 3\sqrt{x};$$

an soll die Fläche A_1B_1BA berechnen, wenn

$$OA_1 = 4, \quad OB_1 = 25$$

ist.

Auflösung. Nach Gleichung (1.) wird in diesem Falle

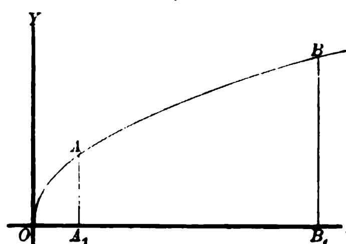


Fig. 14.

$$(8.) \quad F = \int_4^{25} y dx = 3\int_4^{25} x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= 3\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_4^{25} = 2\left[x\sqrt{x}\right]_4^{25},$$

also

$$(9.) \quad F = 2(125 - 8) = 234.$$

Aufgabe 4. In einer *Ellipse* mit der Gleichung

$$(10.) \quad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

oder

$$(10a.) \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

sind die Ordinaten Q_1P_1 und Q_2P_2 gezogen (Fig. 15); man soll den Flächeninhalt der Figur $Q_1Q_2P_2P_1$ berechnen.

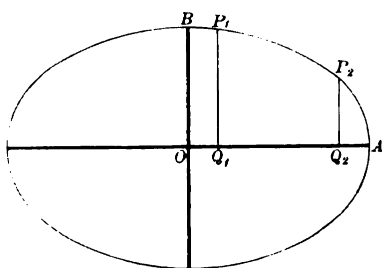


Fig. 15.

Auflösung. Aus Gleichung (10a.) folgt, da man nur das obere Vorzeichen zu beachten braucht,

$$(11.) \quad F = \int_{x_1}^{x_2} y dx$$

$$= \frac{b}{a}\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{a^2 - x^2},^{*})$$

folglich wird nach Formel Nr. 123 der Tabelle und mit Rücksicht auf Gleichung (10a.)

---

*) In gleicher Weise wie bei den geometrischen Anwendungen der Differential-Rechnung sollen auch hier die Koordinaten eines Kurvenpunktes P immer x und y, die eines Kurvenpunktes P_1 immer x_1 und y_1, allgemein die eines Kurvenpunktes P_n immer x_n und y_n heißen.

(12.) $$F = \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{x_1}^{x_2}$$
$$= \left[\frac{xy}{2} + \frac{ab}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{x_1}^{x_2},$$

oder

(13.) $$F = \frac{1}{2}(x_2y_2 - x_1y_1) + \frac{ab}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x_2}{a}\right) - \arcsin\left(\frac{x_1}{a}\right)\right].$$

Es sei z. B.

$$a = 6, \quad b = 4, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 5,$$

also

$$y_1 = \frac{4}{6}\sqrt{36 - 1} = \frac{2}{3}\sqrt{35}, \quad y_2 = \frac{4}{6}\sqrt{36 - 25} = \frac{2}{3}\sqrt{11};$$

dann wird

$$F = \frac{1}{3}(5\sqrt{11} - \sqrt{35}) + 12\left[\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{6}\right)\right].$$

Nun ist

$$5\sqrt{11} = \sqrt{275} = 16{,}583\,123$$
$$\sqrt{35} = 5{,}916\,080$$
$$5\sqrt{11} - \sqrt{35} = 10{,}667\,043,$$
$$\frac{1}{3}(5\sqrt{11} - \sqrt{35}) = 3{,}555\,681$$
$$12\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) = 11{,}821\,327$$
$$\frac{1}{3}(5\sqrt{11} - \sqrt{35}) + 12\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) = 15{,}377\,008$$
$$12\arcsin\left(\frac{1}{6}\right) = 2{,}009\,377$$
$$F = 13{,}367\,631.$$

Aufgabe 4a. Man soll die ganze Fläche der *Ellipse* mit den Halbachsen a und b berechnen (Fig. 15).

Auflösung. Man erhält den Quadranten der Ellipse, wenn man in der vorhergehenden Aufgabe

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = a,$$

also

$$y_1 = b \quad \text{und} \quad y_2 = 0$$

setzt. Dies gibt

(14.) $$F = \frac{ab}{2} \arcsin 1 = \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2};$$

folglich wird der Flächeninhalt der ganzen Ellipse

(15.) $$E = 4F = ab\pi.$$

Aufgabe 5. In einer *Hyperbel* mit der Gleichung

(16.) $$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

oder

(16a.) $$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

sind die Ordinaten Q_1P_1 und Q_2P_2 gezogen (Fig. 16); man soll den Flächeninhalt der Figur $Q_1Q_2P_2P_1$ berechnen.

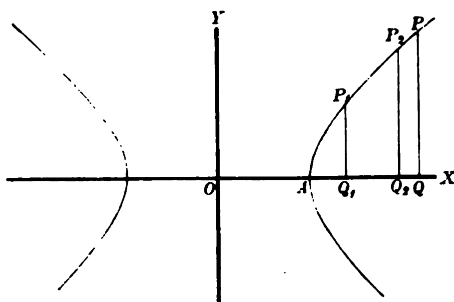


Fig. 16.

Auflösung. Aus Gleichung (16a.) folgt, da man nur das obere Vorzeichen zu berücksichtigen braucht,

(17.) $$F = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \frac{b}{a} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Deshalb wird nach Formel Nr. 129a der Tabelle

(18.) $$F = \frac{b}{a} \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{b}{a} \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{x_1}^{x_2},$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (16a.)

(19.) $$F = \left[\frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{1}{2}(x_2y_2 - x_1y_1) - \frac{ab}{2}\ln\left(\frac{bx_2 + ay_2}{bx_1 + ay_1}\right).$$

Dabei ist $\ln\left(\frac{bx_2 + ay_2}{bx_1 + ay_1}\right)$ aus $\ln\left(\frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b}\right) - \ln\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)$ entstanden.

Für den besonderen Fall, wo x_1 gleich a und x_2 gleich x ist, wo also die gesuchte Fläche AQP im Scheitel der Hyperbel beginnt, wird

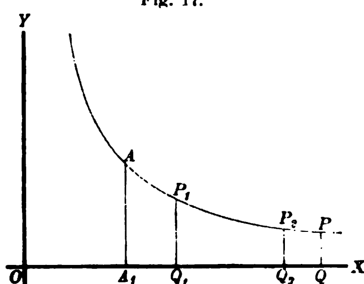
(20.) $$F = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Aufgabe 6. Die *gleichseitige Hyperbel* ist durch die Gleichung

(21.) $$xy = 1, \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{x}$$

gegeben: man soll den Flächeninhalt der Figur $Q_1Q_2P_2P_1$ berechnen (Fig. 17).

Fig. 17.



Auflösung. Aus Gleichung (21.) folgt nach Formel Nr. 12 der Tabelle

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \left|\ln x\right|_{x_1}^{x_2},$$

also

(22.) $$F = \ln x_2 - \ln x_1 = \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Setzt man x_1 gleich 1 und x_2 gleich x, so erhält man

(23.) $$F = \ln x,$$

so daß der Flächeninhalt der ebenen Figur A_1QPA, in welcher OA_1 gleich 1 sein möge, die geometrische Deutung für die Funktion $\ln x$ gibt.

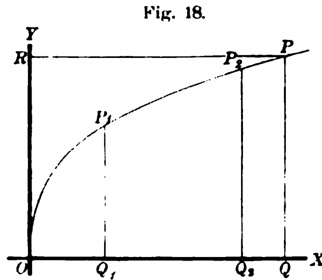
Aufgabe 7. Die *verallgemeinerte Parabel* ist durch die Gleichung

(24.) $$y^n = 2px^m, \quad \text{oder} \quad y = \sqrt[n]{2p} \cdot x^{\frac{m}{n}}$$

gegeben: man soll den Flächeninhalt der ebenen Figur $Q_1Q_2P_2P_1$ berechnen (Fig. 18).

Auflösung. Aus Gleichung (24.) folgt nach Formel Nr. 9 der Tabelle

Fig. 18.



(25.) $$F = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \sqrt[n]{2p} \int_{x_1}^{x_2} x^{\frac{m}{n}} dx$$

$$= \sqrt[n]{2p} \left[\frac{nx^{\frac{m+n}{n}}}{m+n} \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{n}{m+n} \left[x \sqrt[n]{2p} \cdot x^{\frac{m}{n}} \right]_{x_1}^{x_2};$$

oder

(26.) $$F = \frac{n}{m+n} \left[xy \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{n}{m+n} (x_2y_2 - x_1y_1).$$

Für den besonderen Fall, wo x_1 gleich 0 und x_2 gleich x ist, wo also die Figur im Scheitel O beginnt, wird

(27.) $$F = OQP = \frac{nxy}{m+n} = \frac{n}{m+n} OQPR.$$

Dies gibt den Satz: *Die von der Parabel OP, der X-Achse und einer beliebigen Ordinate QP begrenzte Figur OQP verhält sich zu dem Rechtecke $OQPR$ mit den Seiten OQ gleich x und QP gleich y wie n zu $m + n$.*

Aufgabe 8. Die *verallgemeinerte Hyperbel* ist durch die Gleichung

(28.) $$x^m y^n = 2p, \quad \text{oder} \quad y = \sqrt[n]{2p} \cdot x^{-\frac{m}{n}}$$

gegeben: man soll den Flächeninhalt der ebenen Figur $Q_1Q_2P_2P_1$ (Fig. 19 und 20) berechnen.

Auflösung. Es darf hier vorausgesetzt werden, daß die positiven ganzen Zahlen m und n voneinander verschieden sind, weil der Fall, wo m gleich n, bereits durch Aufgabe 6

erledigt ist. Unter dieser Voraussetzung folgt aus Gleichung (28.) nach Formel Nr. 9 der Tabelle

$$(29.)\qquad F = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \sqrt[n]{2p}\int_{x_1}^{x_2} x^{-\frac{m}{n}}\,dx = \sqrt[n]{2p}\left[\frac{nx^{\frac{n-m}{n}}}{n-m}\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{n\sqrt[n]{2p}}{n-m}\left(x_2^{\frac{n-m}{n}} - x_1^{\frac{n-m}{n}}\right),$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (28.)

$$(30.)\qquad F = \frac{n}{n-m}\left[x\sqrt[n]{2p}\,.\,x^{-\frac{m}{n}}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{n}{n-m}\,[xy]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{n(x_2y_2 - x_1y_1)}{n-m}.$$

Fig. 19.

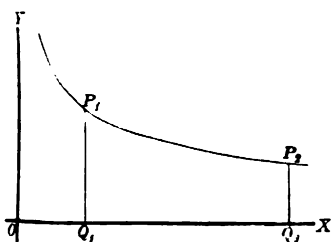
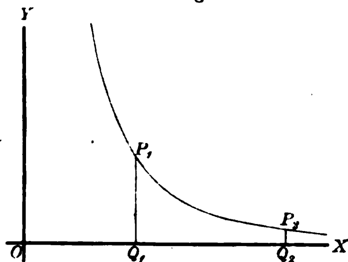


Fig. 20.



Bei dieser Aufgabe tritt ein bemerkenswerter Umstand ein, von dem später noch ausführlicher die Rede sein wird, wenn sich die Ordinate Q_1P_1 der Y-Achse immer mehr nähert, wenn also

$$\lim x_1 = 0$$

wird. Die Y-Achse ist nämlich eine Asymptote der Kurve, so daß sich in diesem Grenzfalle der Flächenstreifen in der Richtung der Y-Achse bis ins Unendliche erstreckt. Damit ist aber noch nicht gesagt, daß dann auch der Flächeninhalt der Figur unendlich groß wird; es wird sich vielmehr ergeben, daß derselbe einen *endlichen* Wert erhält, wenn $n > m$ ist (Fig. 19). Dann wird nämlich in Gleichung (29.) der Exponent $\frac{n-m}{n}$ *positiv*, und deshalb

(31.) $$\lim_{x_1=0} x_1^{\frac{n-m}{n}} = 0,$$

so daß Gleichung (29.) in

(32.) $$F = \frac{n\sqrt[n]{2p}}{n-m} x_2^{\frac{n-m}{n}} = \frac{nx_2y_2}{n-m}$$

übergeht.

Ist dagegen $n < m$ (Fig. 20), so wird $\frac{n-m}{n}$ *negativ*, so daß man Gleichung (29.) besser auf die Form

(33.) $$F = \frac{n\sqrt[n]{2p}}{m-n}\left(\frac{1}{x_1^{\frac{m-n}{n}}} - \frac{1}{x_2^{\frac{m-n}{n}}}\right)$$

bringen wird. Jetzt ist

(34.) $$\lim_{x_1=0} x_1^{\frac{m-n}{n}} = 0,$$

also

(35.) $$\lim_{x_1=0} F = \infty.$$

Eine ähnliche Betrachtung stellt sich ein, wenn man x_2 ins Unbegrenzte wachsen läßt. Dann erstreckt sich der Flächenstreifen in der Richtung der X-Achse bis ins Unendliche, und man erhält in dem ersten Falle, wo

$$n > m, \quad \frac{n-m}{n} > 0, \quad \lim_{x_2=\infty} x_2^{\frac{n-m}{n}} = \infty$$

ist, aus Gleichung (29.)

(36.) $$\lim_{x_2=\infty} F = \infty.$$

In dem zweiten Falle dagegen, wo

$$n < m, \quad \frac{m-n}{n} > 0, \quad \lim_{x_2=\infty} \frac{1}{x_2^{\frac{m-n}{n}}} = 0$$

ist, findet man aus Gleichung (33.)

(37.) $$\lim_{x_2=\infty} F = \frac{n\sqrt[n]{2p}}{m-n} \cdot \frac{1}{x_1^{\frac{m-n}{n}}} = \frac{nx_1y_1}{m-n}.$$

Bei der in Aufgabe 6 behandelten gewöhnlichen gleichseitigen Hyperbel wird der Flächeninhalt der Figur unend-

lich groß, wenn die Ordinate Q_1P_1 mit der Y-Achse zusammenfällt, und ebenso auch, wenn die Ordinate Q_2P_2 ins Unendliche rückt, weil in Gleichung (22.)

$$\lim_{x_1=0} \ln x_1 = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x_2=\infty} \ln x_2 = \infty.$$

Aufgabe 9. Die *Kettenlinie* ist durch die Gleichung

$$(38.)\qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right)$$

gegeben; man soll den Flächeninhalt der Figur $Q_1Q_2P_2P_1$ (Fig. 21) berechnen.

Auflösung. Aus Gleichung (38.) folgt nach Formel Nr. 11 oder Nr. 19 der Tabelle

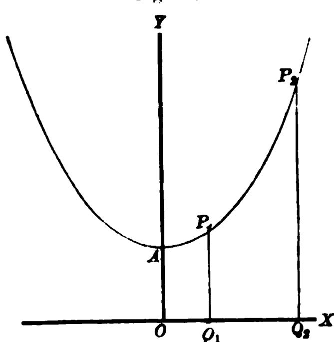


Fig. 21.

$$(39.)\qquad F = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx$$

$$= \frac{a}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = a\int_{x_1}^{x_2}\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right)dx$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right]_{x_1}^{x_2} = a^2\left[\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Nun ergibt sich aber, wie auf Seite 403 der D.-R. gezeigt wurde, aus Gleichung (38.)

$$(40.)\qquad \pm\sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right),$$

wobei das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem x positiv oder negativ ist. Sind also x_1 und x_2 *beide positiv*, so geht Gleichung (39.) über in

$$(41.)\qquad F = a\left[\sqrt{y^2 - a^2}\right]_{x_1}^{x_2} = a\left(\sqrt{y_2^2 - a^2} - \sqrt{y_1^2 - a^2}\right).$$

Wäre x_1 *negativ*, so würde man erhalten

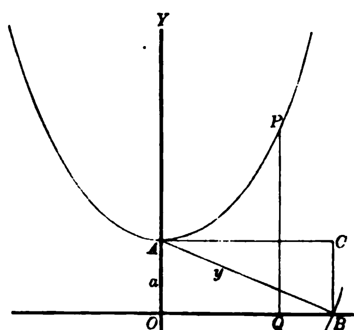
$$(42.)\qquad F = a\left(\sqrt{y_2^2 - a^2} + \sqrt{y_1^2 - a^2}\right).$$

Wird x_1 gleich 0 und x_2 gleich x (Fig. 22), so ist der Flächeninhalt der Figur $OQPA$ gleich

$$F = a\sqrt{y^2 - a^2} \tag{43.}$$

und läßt sich auch sehr leicht als Rechteck darstellen. Beschreibt man nämlich um den Punkt A mit dem Halbmesser y einen Kreisbogen, welcher die X-Achse im Punkte B schneidet, so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze

Fig. 22.



$$OB = \sqrt{y^2 - a^2}, \tag{44.}$$

also Rechteck

$$OBCA = a\sqrt{y^2 - a^2}.$$

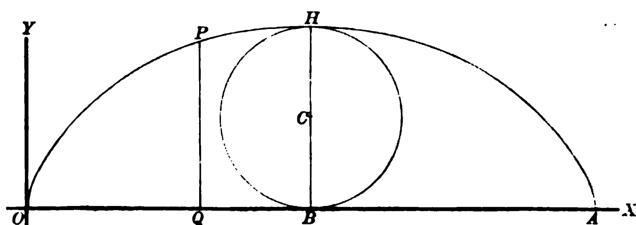
Daraus erkennt man auch, wie man die Figur $Q_1Q_2P_2P_1$ (Fig. 21) in ein Rechteck verwandeln kann, bei dem wieder $OA = a$ die eine Seite und $\sqrt{y_2^2 - a^2} - \sqrt{y_1^2 - a^2}$ die andere Seite ist.

Aufgabe 10. Die *Zykloide* ist durch die Gleichungen

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \tag{45.}$$

gegeben; man soll den Flächeninhalt der Figur berechnen, welche von einem ganzen Bogen OHA der Zykloide und von der X-Achse begrenzt wird (Fig. 23).

Fig. 23.



Auflösung. Sind x und y als Funktionen einer dritten Veränderlichen t gegeben, so wird es bei der Quadratur der Kurven (und ebenso bei den übrigen Anwendungen der Integral-Rechnung auf die Geometrie) im allgemeinen zweckmäßig sein, diese Größe t als neue Integrations-Veränderliche einzuführen. In der vorliegenden Aufgabe bildet man daher zunächst

$$dx = a(1 - \cos t)dt, \tag{46.}$$

also, da OA gleich dem Umfange $2a\pi$ des rollenden Kreises ist,

$$F = \int_0^{2a\pi} y\,dx = a^2 \int_{(0)}^{(2a\pi)} (1 - \cos t)(1 - \cos t)dt. \tag{47.}$$

Bei Einführung einer neuen Integrations-Veränderlichen muß man sorgfältig darauf achten, daß dabei auch andere Integrations-Grenzen einzuführen sind. Deshalb sind auch in Gleichung (47.) bei dem letzten Integral die Grenzen in Klammern eingeschlossen, um dadurch anzudeuten, daß sich dieselben noch auf die ursprüngliche Integrations-Veränderliche x beziehen, und daß man dafür die entsprechenden Werte von t nachträglich einsetzen soll. Nun ist

$$x = 0 \quad \text{für} \quad t = 0,$$
$$x = 2a\pi \quad „ \quad t = 2\pi,$$

folglich geht Gleichung (47.) über in

$$F = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt. \tag{48.}$$

Nach den Formeln Nr. 10, 13 und 99 der Tabelle ist

$$\begin{cases} \int dt = t, \quad \int \cos t\,dt = \sin t, \\ \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\sin t \cos t + \frac{1}{2}t, \end{cases} \tag{49.}$$

so daß man erhält

$$\begin{aligned} F &= a^2\left[t - 2\sin t + \tfrac{1}{2}\sin t \cos t + \tfrac{1}{2}t\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{a^2}{2}\left[3t - \sin t(4 - \cos t)\right]_0^{2\pi} = 3a^2\pi. \end{aligned} \tag{50.}$$

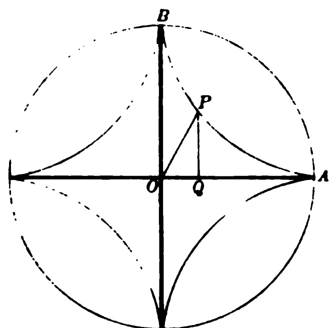
Die Fläche eines Kreises mit dem Halbmesser a ist bekanntlich gleich $a^2\pi$, folglich ist nach Gleichung (50.) *die von der Zykloide und der X-Achse begrenzte Fläche dreimal so groß wie die Fläche des erzeugenden Kreises* (Fig. 23).

Aufgabe 11. Die *Astroide* sei durch die Gleichungen

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t \tag{51.}$$

gegeben (Fig. 24); man soll die von ihr eingeschlossene Fläche berechnen.

Fig. 24.



Auflösung. Um zunächst den Flächeninhalt des Quadranten OAB zu berechnen, muß man in der allgemeinen Formel für x die Grenzen 0 und a einsetzen. Da nun

$$x = 0 \quad \text{für} \quad t = \frac{\pi}{2},$$
$$x = a \quad \text{„} \quad t = 0$$

wird, so sind $\frac{\pi}{2}$ und 0 die entsprechenden Grenzen bei Einführung der Integrations-Veränderlichen t. Deshalb erhält man

$$dx = -3a\cos^2 t \sin t dt, \tag{52.}$$

$$F = \int_0^a y dx = -3a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 t \,.\, \cos^2 t \sin t dt \tag{53.}$$

$$= +3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt.$$

Zur Ermittelung des unbestimmten Integrals von $\sin^4 t \cos^2 t dt$ beachte man zunächst, daß

$$\int \sin^4 t \cos^2 t dt = \int \sin^4 t dt - \int \sin^6 t dt \tag{54.}$$

ist, und bilde nach Formel Nr. 100 und 104 der Tabelle die Gleichungen

$$\int \sin^6 t dt = -\tfrac{1}{6}\sin^5 t \cos t + \tfrac{5}{6}\int \sin^4 t dt, \tag{55.}$$

$$\int \sin^4 t dt = -\tfrac{1}{4}\sin^3 t \cos t + \tfrac{3}{4}\int \sin^2 t dt, \tag{56.}$$

$$\int \sin^2 t dt = -\tfrac{1}{2}\sin t \cos t + \tfrac{1}{2}t. \tag{57.}$$

Indem man Gleichung (55.) mit -1, Gleichung (56.) mit $-\frac{5}{6} + 1 = +\frac{1}{6}$, Gleichung (57.) mit $+\frac{1}{8}$ multipliziert und dann alle drei Gleichungen addiert, findet man

$$(58.)\quad \int\sin^4 t\,dt - \int\sin^6 t\,dt = \frac{1}{6}\sin^5 t\cos t - \frac{1}{24}\sin^3 t\cos t$$
$$- \frac{1}{16}\sin t\cos t + \frac{1}{16}t;$$

folglich ist

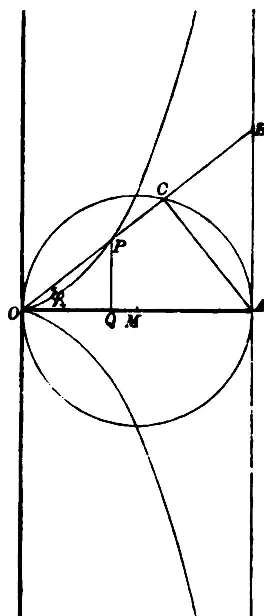
$$(59.)\quad F = \frac{a^2}{16}\Big[\cos t\,(8\sin^5 t - 2\sin^3 t - 3\sin t) + 3t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{a^2}{16}\cdot\frac{3\pi}{2} = \frac{3a^2\pi}{32}.$$

Der Flächeninhalt der ganzen Astroide ist daher

$$(60.)\quad 4F = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

Dies gibt den Satz: *Der Flächeninhalt der Astroide verhält sich zu dem Flächeninhalte des umschriebenen Kreises wie 3 zu 8.*

Fig. 25.



Aufgabe 12. Die *Zissoide des Diokles* ist durch die Gleichungen

$$(61.)\quad x = 2a\sin^2\varphi,\quad y = 2a\frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi}$$

gegeben (D.-R., Seite 583); man soll den Flächeninhalt der Figur OQP (Fig. 25) berechnen.

Auflösung. Aus den Gleichungen (61.) folgt

$$x = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = 0,$$
$$x = 2a \quad " \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$(62.)\quad dx = 4a\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi,$$

oder

$$(63.)\quad F = \int_0^x y\,dx = 8a^2\int_0^\varphi \sin^4\varphi\,d\varphi,$$

folglich wird nach Formel Nr. 105 der Tabelle, wenn man n gleich 2 setzt,

$$(64.)\quad F = 8a^2\left[-\cos\varphi\left(\frac{1}{4}\sin^3\varphi + \frac{3}{4.2}\sin\varphi\right) + \frac{3.1}{4.2}\varphi\right]_0^\varphi$$
$$= a^2[3\varphi - \cos\varphi(2\sin^3\varphi + 3\sin\varphi)].$$

Da die Gerade AB eine Asymptote der Kurve ist, so erstreckt sich der Flächenstreifen bis ins Unendliche, wenn die Ordinate QP der Asymptote immer näher rückt und schließlich mit ihr zusammenfällt, wenn also

$$(65.)\qquad \lim x = 2a, \quad \text{oder} \quad \lim \varphi = \frac{\pi}{2}$$

wird. Der Flächeninhalt der Figur bleibt aber endlich, da man aus Gleichung (64.)

$$(66.)\qquad \lim_{\varphi = \frac{\pi}{2}} F = \frac{3a^2\pi}{2}$$

erhält. Die Kurve liegt zur X-Achse symmetrisch; deshalb wird der Flächeninhalt der Figur, welche von der ganzen Zissoide und der Asymptote begrenzt ist, gleich

$$3a^2\pi.$$

Aufgabe 13. Es ist die Gleichung

$$(67.)\qquad y = \frac{1}{12}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)$$

gegeben: man soll $\int\limits_a^b y dx$ berechnen.

Auflösung. Nach Formel Nr. 9 der Tabelle wird

$$(68.)\qquad F = \int\limits_a^b y dx = \frac{1}{12}\int\limits_a^b (x^3 - 9x^2 + 23x - 15)dx$$
$$= \frac{1}{12}\left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 23\frac{x^2}{2} - 15x\right]_a^b$$
$$= \frac{1}{48}(b^4 - 12b^3 + 46b^2 - 60b - a^4 + 12a^3 - 46a^2 + 60a).$$

Will man sich über die Bedeutung dieses Resultates Rechenschaft geben, so muß man beachten, daß die der Gleichung (67.), oder der Gleichung

(67a.) $$y = \frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-5)$$

entsprechende Kurve die X-Achse in den Punkten A, B, C mit den Abszissen

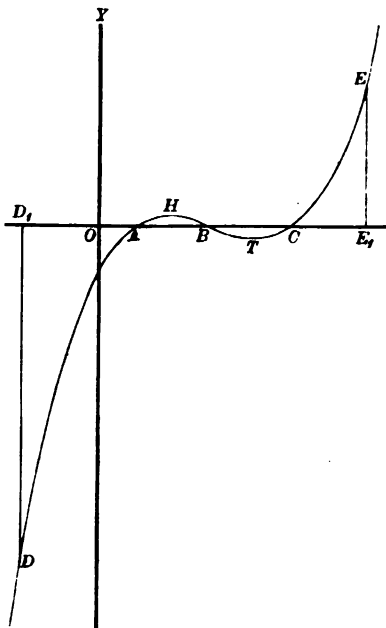
$$OA = 1, \quad OB = 3,$$
$$OC = 5$$

schneidet. Setzt man daher z. B.

$$a = -2, \quad b = +1,$$

so erhält man

(69.) $$D_1AD = \int_{-2}^{+1} y dx$$
$$= \frac{1}{48}(-25 - 416)$$
$$= -\frac{147}{16}.$$



Der Ausdruck ist *negativ*, weil die Figur D_1AD *unterhalb* der X-Achse liegt. Ferner wird der Flächeninhalt der Figur

(70.) $$ABH = \int_{+1}^{+3} y dx = \frac{1}{48}(-9 + 25) = \frac{1}{3},$$

und zwar ist dieser Ausdruck *positiv*, weil die Figur ABH *oberhalb* der X-Achse liegt. Indem man a gleich 3 und b gleich 5 setzt, findet man den Flächeninhalt der Figur

(71.) $$BCT = \int_{3}^{5} y dx = \frac{1}{48}(-25 + 9) = -\frac{1}{3},$$

und zwar ist dieser Ausdruck wieder *negativ,* weil die Figur *unterhalb* der X-Achse liegt. Endlich ist der Flächeninhalt der Figur

$$(72.) \qquad CE_1E = \int_5^7 y dx = \frac{1}{48}(119 + 25) = +3.$$

Dieser Ausdruck ist *positiv*, weil die Figur *oberhalb* der X-Achse liegt. Demnach ist

$$(73.) \quad \int_{-2}^{+7} y dx = \frac{1}{48}(119 - 416) = -\frac{99}{16} = -\frac{147}{16} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 3$$

und kann geometrisch gedeutet werden durch die Summe der Figuren

$$D_1AD, \quad ABH, \quad BCT \quad \text{und} \quad CE_1E,$$

wobei aber die erste und dritte mit *negativem*, die zweite und vierte mit *positivem* Vorzeichen zu nehmen sind.

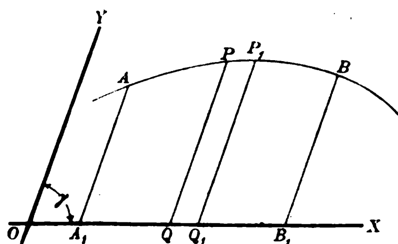
Dies gibt in Übereinstimmung mit der auf Seite 16 ausgeführten Untersuchung den Satz: *Wenn man den Flächeninhalt einer ebenen Figur zwischen einer Kurve $y = f(x)$, der Abszissen-Achse und zwei beliebigen Ordinaten durch Integration berechnet, so sind die Flächenstücke über der Abszissen-Achse mit positivem, und die Flächenstücke unter der Abszissen-Achse mit negativem Vorzeichen berücksichtigt.*

§ 20.

Quadratur der Kurven bei Anwendung schiefwinkliger Koordinaten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 132.)

Fig. 27.



Ist die Gleichung einer Kurve für *schiefwinklige* Koordinaten gegeben, und bezeichnet man den Winkel, welchen die positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen miteinander bilden, durch γ, so wird der Flächeninhalt eines

Streifens QQ_1P_1P (Fig. 27), wenn man ihn unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen höherer Ordnung als Parallelogramm betrachtet,

$$QQ_1P_1P = ydx \,.\, \sin\gamma, \tag{1.}$$

also

$$A_1B_1BA = \sin\gamma\int_a^b ydx. \tag{2.}$$

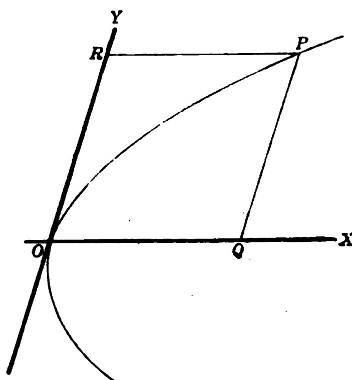
Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Die Gleichung

$$y^2 = 2px, \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{1}{2}} \tag{3.}$$

stellt auch für schiefwinklige Koordinaten eine *Parabel* dar, wobei die Y-Achse eine beliebige Tangente ist, und die X-Achse durch den Berührungspunkt parallel zur Achse der Parabel läuft (Fig. 28): man soll den Flächeninhalt der Figur OQP berechnen.

Fig. 28.



Auflösung. Hier ist nach Gleichung (2.)

$$F = \sin\gamma\,.\,\sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{1}{2}}dx = \sin\gamma\,.\,\sqrt{2p}\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^x = \frac{2xy}{3}\sin\gamma. \tag{4.}$$

Der Flächeninhalt des Parallelogramms $OQPR$ ist gleich $xy\sin\gamma$, folglich bleibt der auf Seite 107 angeführte Satz auch in diesem Falle noch richtig.

Aufgabe 2. Macht man in der Ellipse zwei konjugierte Durchmesser, deren Länge $2r$ und $2s$ sein möge, zu Koordinaten-Achsen, so hat die Ellipse (Fig. 29) die Gleichung

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{s^2} = 1, \tag{5.}$$

oder

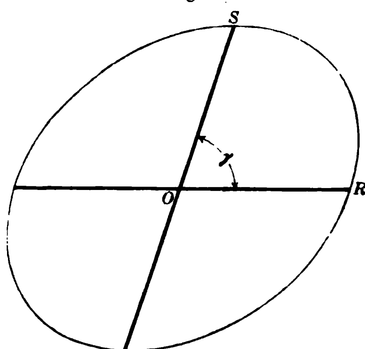


Fig. 29.

$$y = \pm \frac{s}{r} \sqrt{r^2 - x^2};$$

man soll den Flächeninhalt der Ellipse berechnen.

Auflösung. Hier ist nach Gleichung (2.) mit Rücksicht auf Formel Nr. 123 der Tabelle

$$F = 4 \sin\gamma \int_0^r y dx = \frac{4s \,.\, \sin\gamma}{r} \int_0^r dx \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$= \frac{4s \,.\, \sin\gamma}{r} \left[\frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \right]_0^r,$$

oder

(6.) $$F = rs\pi \sin\gamma.$$

Da der Flächeninhalt der Ellipse mit den Halbachsen a und b, wie schon in Aufgabe 4a des vorhergehenden Paragraphen gezeigt wurde, gleich $ab\pi$ ist, so folgt hieraus die wichtige Formel

(7.) $$rs \,.\, \sin\gamma = ab.$$

Aufgabe 3. Die Gleichung einer Hyperbel ist, wenn man die Asymptoten zu Koordinaten-Achsen macht,

(8.) $$4xy = e^2, \quad \text{oder} \quad y = \frac{e^2}{4} \cdot \frac{1}{x};$$

man soll den Flächeninhalt der ebenen Figur $Q_1Q_2P_2P_1$ (Fig. 30) berechnen.

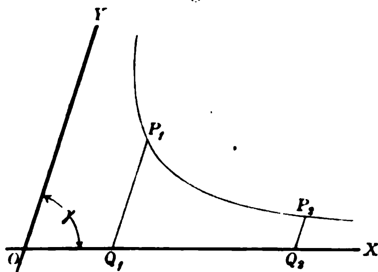


Fig. 30.

Auflösung. Aus Gleichung (2.) folgt in diesem Falle mit Rücksicht auf Formel Nr. 12 der Tabelle

$$(9.)\quad F = \sin\gamma\int\limits_{x_1}^{x_2} y\,dx = \frac{e^2\sin\gamma}{4}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x} = \frac{e^2\sin\gamma}{4}\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

§ 21.

Quadratur von Figuren, welche oben und unten durch eine Kurve begrenzt sind.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 133.)

Eine Figur sei oben begrenzt durch die Kurve (Fig. 31)

$$(1.)\quad y' = f(x),$$

unten durch die Kurve

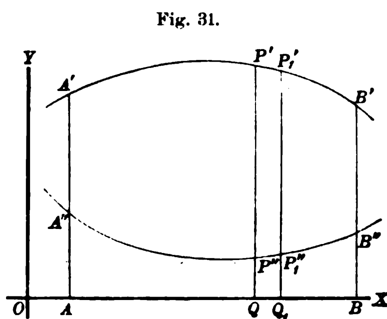
$$(2.)\quad y'' = g(x),$$

links und rechts durch die Ordinaten $A''A'$ und $B''B'$ mit den Gleichungen

(3.) $x = a$ und $x = b$.

Man kann dann den Flächeninhalt der Figur $A''B''B'A'$ berechnen, indem man zuerst den Flächeninhalt der Figur

Fig. 31.



$$(4.)\quad ABB'A' = \int\limits_a^b y'dx$$

berechnet und davon den Flächeninhalt der Figur

$$(5.)\quad ABB''A'' = \int\limits_a^b y''dx$$

abzieht. Dadurch erhält man

$$(6.)\quad F = A''B''B'A' = \int\limits_a^b y'dx - \int\limits_a^b y''dx = \int\limits_a^b (y' - y'')dx.$$

Dasselbe Resultat findet man auch, indem man durch zwei benachbarte Punkte Q und Q_1 der X-Achse Parallele zur Y-Achse legt, welche die beiden Kurven bezw. in den Punkten

P', P'_1 und P'', P''_1 treffen. Den Streifen $P''P_1''P_1'P'$ darf man unter Vernachlässigung von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung als ein Rechteck mit den Seiten

$$P''P' = y' - y'' \quad \text{und} \quad QQ_1 = dx$$

betrachten, wenn QQ_1 verschwindend klein wird. Dadurch erhält man für den Flächeninhalt des Streifens

$$P''P''_1P'_1P' = (y' - y'')dx,$$

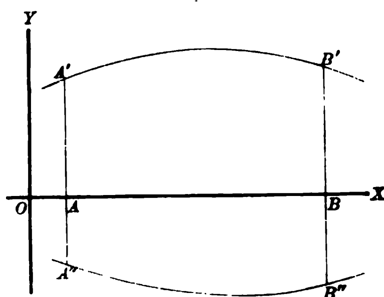
so daß die Summe aller dieser Streifen, nämlich

$$F = \int_a^b (y' - y'')dx,$$

den Flächeninhalt der ganzen Figur $A''B''B'A'$ gibt.

Dabei ist zunächst stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden, daß die Kurvenbögen $A'B'$ und $A''B''$ beide *über* der X-Achse liegen. Das Resultat bleibt aber auch dann noch richtig, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Liegt z. B. der eine Bogen $A''B''$ *unter* der X-Achse (Fig. 32), so hat, wie schon früher hervorgehoben wurde, $\int_a^b y''dx$ einen *negativen* Wert,

Fig. 32.



so daß

$$\int_a^b y'dx - \int_a^b y''dx = \int_a^b (y' - y'')dx$$

die *Summe* der beiden Flächenstücke $ABB'A'$ und $A''B''BA$ gibt.

In ähnlicher Weise kann man zeigen, daß Gleichung (6.) noch richtig bleibt, wenn *beide* Kurvenbögen $A'B'$ und $A''B''$ unter der X-Achse liegen, und schließlich auch, wenn die X-Achse von den Begrenzungskurven geschnitten wird. Den letzten Fall kann man dadurch auf die vorhergehenden Fälle zurückführen, daß man die Figur in mehrere

Teile zerlegt, indem man durch die Schnittpunkte der beiden Kurven mit der X-Achse Parallele zu der Y-Achse zieht. Für jeden einzelnen Teil gelten dann die früheren Voraussetzungen.

Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Von einer Parabel mit der Gleichung

(7.) $$y^2 = 2px, \quad \text{oder} \quad y = \pm \sqrt{2p} \, . \, x^{\frac{1}{2}}$$

ist durch die Sehne OP_1 (Fig. 33) das Segment über OP_1 abgeschnitten; man soll den Flächeninhalt dieses Segmentes berechnen.

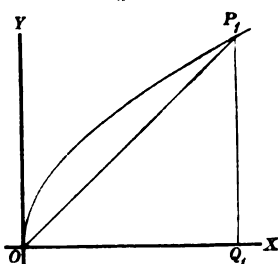


Fig. 33.

Auflösung. Die Gleichungen der beiden begrenzenden Kurven sind in diesem Falle

(8.) $$y' = \sqrt{2p} \, . \, x^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad y'' = \frac{y_1}{x_1} x,$$

folglich erhält man nach Gleichung (6.)

(9.) $$F = \int_0^{x_1} (y' - y'')dx = \int_0^{x_1} \left(\sqrt{2p} \, . \, x^{\frac{1}{2}} - \frac{y_1}{x_1} x \right) dx$$

$$= \left[\sqrt{2p} \, . \, \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{y_1}{x_1} \frac{x^2}{2} \right]_0^{x_1},$$

oder

(10.) $$F = \frac{2}{3} x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_1 y_1 = \frac{x_1 y_1}{6}.$$

Das Segment über OP_1 ist also dreimal kleiner als das zugehörige Dreieck OQ_1P_1.

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man von der Fläche OQ_1P_1, deren Inhalt nach Aufgabe 2 in § 19 gleich $\frac{2}{3} x_1 y_1$ ist, den Flächeninhalt des Dreiecks OQ_1P_1, nämlich $\frac{1}{2} x_1 y_1$, abzieht.

Aufgabe 2. Von der Parabel mit der Gleichung

(11.) $$y^2 = 2px, \quad \text{oder} \quad y' = \pm \sqrt{2p} \, . \, x^{\frac{1}{2}}$$

ist durch eine Gerade $P'_1 P_2$ mit der Gleichung

$$(12.)\qquad y'' = mx + \mu$$

ein Segment $P_1'OP_2$ abgeschnitten (Fig. 34): man soll den Flächeninhalt des Segmentes berechnen.

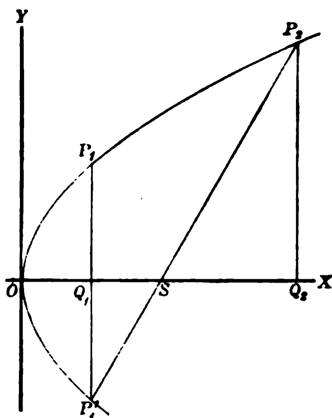


Fig. 34.

Auflösung. In dem vorliegenden Falle, wo der Punkt P'_1 *unter* der X-Achse liegen möge, muß man die Figur durch die Gerade P'_1P_1, welche der Y-Achse parallel ist, in zwei Teile zerlegen und erhält

$$(13.)\qquad P'_1P_1O = \int_0^{x_1} 2y'dx = 2\sqrt{2p}\int_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{4x_1y_1}{3},$$

$$(14.)\qquad P'_1P_2P_1 = \int_{x_1}^{x_2}(y' - y'')dx = \int_{x_1}^{x_2}(\sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{1}{2}} - mx - \mu)dx$$

$$= \left[\sqrt{2p}\,.\,\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{mx^2}{2} - \mu x\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{2}{3}(x_2y_2 - x_1y_1) - \frac{m}{2}(x_2^2 - x_1^2) - \mu(x_2 - x_1).$$

Dabei ist aber bekanntlich

$$(15.)\qquad \begin{cases} m = \dfrac{y_2 - y'_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}, \\[2ex] \mu = \dfrac{x_2y'_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1} = -\dfrac{x_1y_2 + x_2y_1}{x_2 - x_1}, \end{cases}$$

folglich wird, wenn man noch die Gleichungen (13.) und (14.) addiert,

$$(16.)\qquad F = \tfrac{2}{3}(x_1y_1 + x_2y_2) - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + x_1y_2 + x_2y_1$$
$$= \tfrac{1}{6}(x_1y_1 + x_2y_2) + \tfrac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Es sei z. B.

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 16, \quad 2p = 9,$$

so

$$y_1 = 6, \quad y_2 = 12,$$

ann wird

17.) $$F = \tfrac{1}{6}(24 + 192) + \tfrac{1}{2}(48 + 96) = 108.$$

Aufgabe 3. Die Gerade

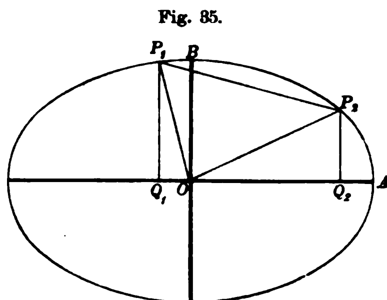
18.) $y'' = mx + \mu$

schneide von der Ellipse

19.) $y' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

ein Segment P_1P_2B (Fig. 35) ab; man soll den Flächeninhalt des Segmentes berechnen.

Fig. 35.



Auflösung. Nach Gleichung (6.) wird in diesem Falle

(20.) $$F = \int_{x_1}^{x_2}(y' - y'')dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - mx - \mu\right)dx$$

$$= \left[\frac{b}{a}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right\} - \frac{mx^2}{2} - \mu x\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[xy - mx^2 - 2\mu x + ab\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(x_2y_2 - x_1y_1) - m(x_2^2 - x_1^2) - 2\mu(x_2 - x_1)$$

$$+ ab\arcsin\left(\frac{x_2}{a}\right) - ab\arcsin\left(\frac{x_1}{a}\right)\Big].$$

Nun ist aber bekanntlich

(21.) $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \mu = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1},$$

folglich wird

(22.) $$m(x_2^2 - x_1^2) + 2\mu(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x_2 + x_1) + 2(x_2y_1 - x_1y_2)$$

$$= (x_2y_2 - x_1y_1) + (x_2y_1 - x_1y_2).$$

Dies gibt

$$(23.)\quad F = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) + \frac{ab}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x_2}{a}\right) - \arcsin\left(\frac{x_1}{a}\right)\right].$$

Es sei z. B.

$$(24.)\quad a = 6, \quad b = 4, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = +5,$$

also

$$(25.)\quad y_1 = \frac{2}{3}\sqrt{35}, \quad y_2 = \frac{2}{3}\sqrt{11},$$

dann geht Gleichung (23.) über in

$$(26.)\quad F = 12\left[\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{6}\right)\right] - \frac{1}{3}(\sqrt{11} + 5\sqrt{35}).$$

Dabei ist

$$12\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) = 11{,}821\,327, \qquad \sqrt{11} = 3{,}327\,708,$$

$$12\arcsin\left(\frac{1}{6}\right) = 2{,}009\,377, \qquad 5\sqrt{35} = 29{,}580\,399,$$

also

$$(27.)\quad F = 13{,}830\,704 - \tfrac{1}{3}\,.\,32{,}908\,107 = 2{,}861\,335.$$

Verbindet man den Nullpunkt O mit den Punkten P_1 und P_2 (Fig. 35), so erhält man ein Dreieck OP_2P_1 mit dem Flächeninhalte $\frac{1}{2}(x_2 y_1 - x_1 y_2)$. Wenn man daher dieses Dreieck zu dem Segmente über der Sehne P_1P_2 hinzufügt, so ergibt sich nach Gleichung (23.) für den Sektor P_1OP_2 der Flächeninhalt

$$(28.)\quad \text{Sektor} = \frac{ab}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x_2}{a}\right) - \arcsin\left(\frac{x_1}{a}\right)\right].$$

Aufgabe 4. Eine *Ellipse* sei durch die Gleichung

$$(29.)\quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

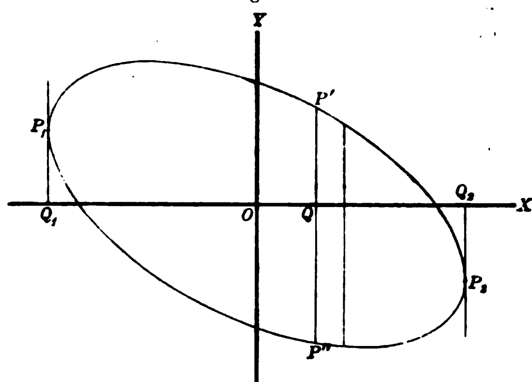
gegeben; man soll den Flächeninhalt derselben berechnen.

Auflösung. Der Anfangspunkt der Koordinaten liegt im Mittelpunkte der Kurve, aber die Koordinaten-Achsen fallen nicht mit den Achsen der Ellipse zusammen (Fig. 36).

Damit die Gleichung eine reelle Ellipse darstellt, müssen die Ungleichungen

$$(30.)\quad \begin{cases} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \\ a_{22}a_{33} < 0 \end{cases}$$

befriedigt werden. Aus Gleichung (29.) folgt dann



$$a_{22}y' = -a_{12}x + \sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})x^2 - a_{22}a_{33}},$$
$$a_{22}y'' = -a_{12}x - \sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})x^2 - a_{22}a_{33}},$$

also

$$(31.)\qquad y' - y'' = \frac{2}{a_{22}}\sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})x^2 - a_{22}a_{33}}.$$

Nach den in den Ungleichungen (30.) ausgesprochenen Voraussetzungen kann man zwei reelle Größen c und k durch die Gleichungen

$$(32.)\qquad c = \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad k = \sqrt{-\frac{a_{22}a_{33}}{c^2}}$$

erklären, so daß Gleichung (31.) übergeht in

$$(33.)\quad y' - y'' = \frac{2}{a_{22}}\sqrt{-c^2x^2 + k^2c^2} = \frac{2c}{a_{22}}\sqrt{k^2 - x^2};$$

folglich wird

$$(34.)\qquad F = \int\limits_{x_1}^{x_2}(y' - y'')dx = \frac{2c}{a_{22}}\int\limits_{x_1}^{x_2}dx\sqrt{k^2 - x^2}.$$

Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen beachte man, daß $(y' - y'')dx$ einer der Streifen ist, in welche man sich die ganze Fläche zerlegt denken muß. Die durch die Integration ausgeführte Summation aller dieser Streifen beginnt in demjenigen Punkte P_1 und endigt in demjenigen Punkte P_2, in welchem der Punkt P' mit dem Punkte P'' zusammenfällt, so daß die Tangenten in den Punkten P_1 und

P_2 zur Y-Achse parallel sind. Die Werte von x_1 und x findet man daher, indem man

$$y' - y'' = \frac{2c}{a_{22}} \sqrt{k^2 - x^2}$$

gleich 0 setzt. Daraus ergibt sich

(35.) $$x_1 = -k \quad \text{und} \quad x_2 = +k,$$

(36.) $$F = \frac{2c}{a_{22}} \int_{-k}^{+k} dx \sqrt{k^2 - x^2},$$

also nach Formel Nr. 123 der Tabelle

(37.) $$F = \frac{2c}{a_{22}} \left[\frac{x}{2} \sqrt{k^2 - x^2} + \frac{k^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{k}\right) \right]_{-k}^{+k}$$

$$= \frac{k^2 c}{a_{22}} [\arcsin 1 - \arcsin(-1)] = \frac{k^2 c \pi}{a_{22}},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (32.)

(38.) $$F = -\frac{a_{22} a_{33} \pi}{a_{22} c} = -\frac{a_{33} \pi}{\sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}.$$

Dasselbe Resultat findet man, wenn man die Halbachsen a und b bestimmt und in die Formel

$$F = ab\pi$$

einsetzt, denn es ist bekanntlich

(39.) $$a = \sqrt{\frac{-2a_{33}}{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}},$$

$$b = \sqrt{\frac{-2a_{33}}{a_{11} + a_{22} \mp \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}},$$

also

(40.) $$ab = \frac{-2a_{33}}{\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - (a_{11} - a_{22})^2 - 4a_{12}^2}}$$

$$= \frac{-a_{33}}{\sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}.$$

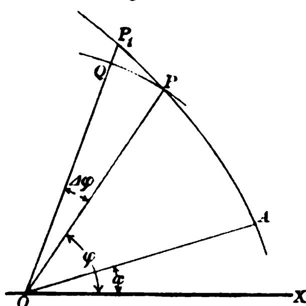
§ 22.

Quadratur der Kurven bei Anwendung von Polarkoordinaten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 134.)

Bei Anwendung von Polarkoordinaten mögen die Koordinaten eines Punktes P immer mit r und φ, die eines Punktes P_1 mit r_1 und φ_1, allgemein die eines Punktes P_n mit r_n und φ_n bezeichnet werden. Nennt man den Flächeninhalt einer Figur AOP, welche durch zwei beliebige *Radii vectores* OA, OP und durch den Kurvenbogen AP begrenzt wird (Fig. 37), S (*Sektor*), so ist S eine Funktion von φ. Den kleinen Zuwachs

Fig. 37.



(1.) $$\Delta S = POP_1,$$

welchen diese Funktion erleidet, wenn der Winkel XOP gleich φ um die kleine Größe POP_1 gleich $\Delta\varphi$ zunimmt, findet man, indem man den *Bogen* PP_1 durch die *Gerade* PP_1 ersetzt und zunächst den Flächeninhalt des geradlinigen Dreiecks POP_1 berechnet. Für diesen erhält man

(2.) $$\triangle POP_1 = \tfrac{1}{2} OP \, . \, OP_1 \sin(\Delta\varphi) = \tfrac{1}{2} r(r + \Delta r) \frac{\sin(\Delta\varphi)}{\Delta\varphi} \Delta\varphi \, .$$

Der Unterschied zwischen dem Kurvensektor POP_1 und dem Dreieck POP_1 ist ein Segment über der Sehne PP_1, das eine unendlich kleine Größe höherer Ordnung wird und deshalb vernachlässigt werden darf, wenn $\Delta\varphi$ verschwindend klein wird. Dann gehen auch die Größen QP_1 gleich Δr und ΔS bezw. in die verschwindend kleinen Größen dr und dS über, und man erhält

(3.) $$\lim_{\Delta\varphi = 0}(r + \Delta r) = r, \quad \lim_{\Delta\varphi = 0} \frac{\sin(\Delta\varphi)}{\Delta\varphi} = 1,$$

also

(4.) $$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

und

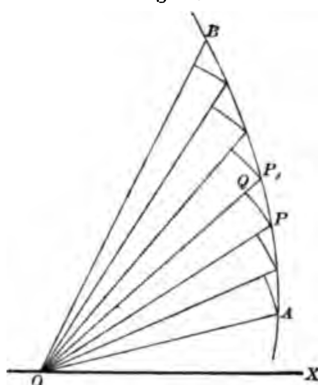
(5.) $$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\varphi} r^2 d\varphi,$$

wobei $\sphericalangle\, XOA = \alpha$ und $\sphericalangle\, XOP = \varphi$ gesetzt ist.

Gewöhnlich wird bei den Anwendungen auch die obere Grenze φ einen konstanten Wert β haben, welcher dem *Radius vector* OB (Fig. 38) entspricht.

Auch dieses Integral kann als eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen betrachtet werden. Teilt man nämlich den Winkel AOB in n (gleiche oder ungleiche) Teile, so wird auch der Sektor AOB in n Teile zerlegt (Fig. 38), von denen man jeden einzelnen POP_1 unter Vernachlässigung unendlich kleiner Größen höherer Ordnung, nämlich unter Vernachlässigung der Dreiecke PQP_1, als einen Kreissektor mit dem Flächeninhalte $\frac{1}{2} r^2 d\varphi$ betrachten kann. Dabei ist die Voraussetzung gemacht, daß die Anzahl n der Sektoren unendlich groß wird, und daß die einzelnen Sektoren gleichzeitig sämtlich unendlich klein werden.

Fig. 38.



Durch Summierung aller dieser unendlich kleinen Sektoren findet man für den Flächeninhalt des ganzen Sektors

(6.) $$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi.$$

Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll den Flächeninhalt des Sektors P_1OP_2 bei der *Archimedischen Spirale*

(7.) $$r = a\varphi$$

berechnen (Fig. 39).

Auflösung. Nach Gleichung (6.) ist in diesem Falle

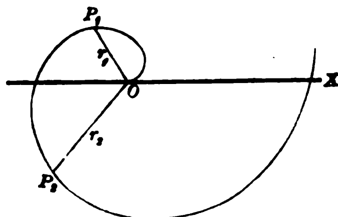


Fig. 39.

$$(8.)\quad S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{6}\left[\varphi^3\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{1}{6a}(a^3\varphi_2^3 - a^3\varphi_1^3),$$

also

$$(9.)\quad S = \frac{r_2^3 - r_1^3}{6a}.$$

Aufgabe 2. Man soll den Flächeninhalt des Sektors P_1OP_2 bei der *allgemeinen Spirale*

$$(10.)\quad r = a\varphi^n$$

berechnen.

Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe erhält man hier

$$(11.)\quad S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^{2n} d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\varphi^{2n+1}}{2n+1}\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{a^2(\varphi_2^{2n+1} - \varphi_1^{2n+1})}{2(2n+1)}.$$

Aufgabe 3. Man soll den Flächeninhalt des Sektors P_1OP_2 bei der *logarithmischen Spirale*

$$(12.)\quad r = e^{a\varphi}$$

berechnen (Fig. 40).

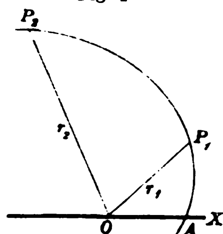


Fig. 40.

Auflösung. Aus Gleichung (6.) erhält man in diesem Falle

$$(13.)\quad S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{2a\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{4a}\int_{(\varphi_1)}^{(\varphi_2)} e^{2a\varphi} d(2a\varphi) = \frac{1}{4a}\left[e^{2a\varphi}\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2},$$

also

$$(14.)\qquad S = \frac{1}{4a}(e^{2a\varphi_2} - e^{2a\varphi_1}) = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4a}.$$

Aufgabe 4. Die Gleichung

Fig. 41.

$$(15.)\qquad r^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}}\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right),$$

oder

$$(15\text{a.})\qquad r = \frac{a}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

stellt eine *Parabel* dar (Fig. 41); man soll das Segment BCA berechnen.

Auflösung. Aus Gleichung (15a.) folgt in diesem Falle

$$(16.)\qquad S = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

oder, wenn man

$$\varphi = 2t$$

setzt und Formel Nr. 61 der Tabelle berücksichtigt,

$$(17.)\qquad S = a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^4 t} = a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} (1 + \operatorname{tg}^2 t)d(\operatorname{tg} t)$$

$$= a^2\left[\operatorname{tg} t + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} = a^2(\tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3}) = \frac{8a^2}{3}.$$

Aufgabe 5. Man soll den Flächeninhalt der *Kardioide* mit der Gleichung

$$(18.)\qquad r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

oder

(18a. $r = a\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

berechnen (Fig. 42).

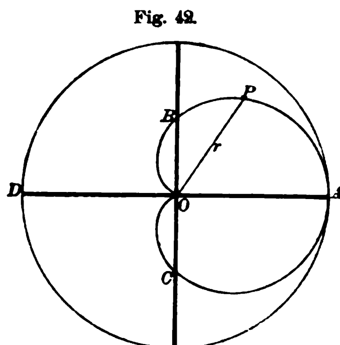


Fig. 42.

Auflösung. Setzt man

$$\varphi = 2t,$$

so wird zunächst mit Rücksicht auf Formel Nr. 102 der Tabelle

$$(19.)\quad S = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\varphi}\cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = a^2\int_0^t \cos^4 t\,dt$$

$$= a^2\left[\tfrac{1}{4}\cos^3 t\sin t + \tfrac{3}{8}\cos t\sin t + \tfrac{3}{8}t\right]_0^t,$$

also

$$(20.)\quad S = \frac{a^2}{8}\left[2\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 3\,\frac{\varphi}{2}\right].$$

Läßt man φ bis π, also $\frac{\varphi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen, so wird

$$(21.)\quad S = \frac{3a^2\pi}{16}$$

die Hälfte des gesuchten Flächeninhalts, für welchen man daher

$$(22.)\quad F = \frac{3a^2\pi}{8}$$

erhält. *Der Flächeninhalt der Kardioide verhält sich also zum Flächeninhalt des Kreises mit dem Halbmesser a wie 3 zu 8.*

Aufgabe 6. Man soll den Flächeninhalt der *Lemniskate* berechnen (Fig. 43).

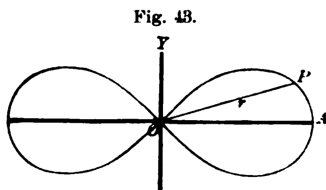


Fig. 43.

Auflösung. Die Gleichung der Lemniskate ist

$$(23.)\quad r^2 = a^2\cos(2\varphi),$$

folglich wird

$$(24.)\quad S = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\varphi}\cos(2\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_0^{(\varphi)}\cos(2\varphi)d(2\varphi)$$

$$= \frac{a^2}{4}\left[\sin(2\varphi)\right]_0^{\varphi} = \frac{a^2}{4}\sin(2\varphi).$$

Den vierten Teil (Quadranten) der Lemniskate erhält man, wenn φ von 0 bis $\frac{\pi}{4}$, also 2φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, folglich wird der Flächeninhalt der ganzen Lemniskate

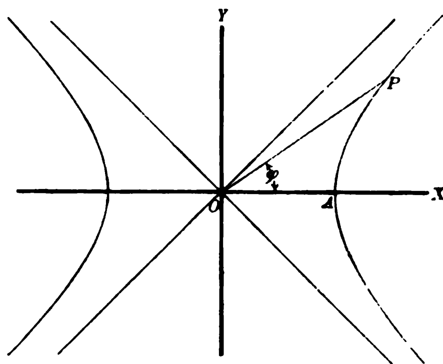
$$(25.)\quad F = a^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2.$$

Aufgabe 7. Man soll den Sektor *AOP* der Hyperbel

$$(26.)\quad x^2 - y^2 = a^2, \quad \text{oder} \quad r^2\cos(2\varphi) = a^2$$

berechnen (Fig. 44).

Fig. 44.



Auflösung. In diesem Falle wird

$$(26\text{a.})\quad r^2 = \frac{a^2}{\cos(2\varphi)},$$

also

$$(27.)\quad S = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2 d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos(2\varphi)}$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_{(0)}^{(\varphi)}\frac{d(2\varphi)}{\cos(2\varphi)}.$$

Dies gibt nach Formel Nr. 48 der Tabelle

$$(28.)\quad S = \frac{a^2}{4}\left[\ln\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)\right\}\right]_0^{\varphi} = \frac{a^2}{4}\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)\right].$$

Aufgabe 8. Die Gleichung des *Folium Cartesii* war für rechtwinklige Koordinaten

$$(29.)\quad x^3 + y^3 - 3axy = 0;$$

man soll den Flächeninhalt der Schleife berechnen (Fig. 45).

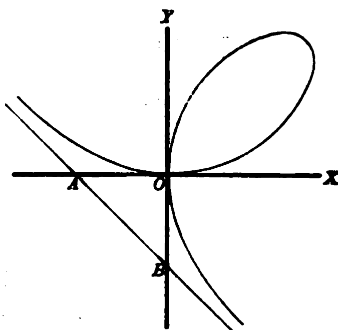


Fig. 45.

Auflösung. Bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten müßte man die kubische Gleichung (29.) nach y auflösen und erhielte einen Ausdruck für $y' - y''$, dessen Integration große Schwierigkeiten bereiten würde. Führt man dagegen durch die Gleichungen

(30.) $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$

Polarkoordinaten ein, so geht Gleichung (29.) über in

(31.) $$r = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi};$$

deshalb findet man für den gesuchten Flächeninhalt

(32.) $$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}.$$

Indem man Zähler und Nenner des Bruches, der unter dem Integralzeichen steht, durch $\cos^6\varphi$ dividiert und beachtet, daß

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = d(\operatorname{tg}\varphi)$$

ist, ergibt sich

(33.) $$S = \frac{9a^2}{2}\int_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{\operatorname{tg}^2\varphi\, d(\operatorname{tg}\varphi)}{(1 + \operatorname{tg}^3\varphi)^2} = \frac{9a^2}{2}\int_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{t^2 dt}{(1 + t^3)^2},$$

wobei $\operatorname{tg}\varphi$ mit t bezeichnet ist. Setzt man noch

$$1 + t^3 = z, \quad \text{also} \quad 3t^2 dt = dz,$$

so wird

(34.) $$\int \frac{3t^2 dt}{(1 + t^3)^2} = \int \frac{dz}{z^2} = \int z^{-2} dz = -\frac{1}{z},$$

folglich ist

$$(35.)\quad S = \frac{3a^2}{2}\Big[-\frac{1}{z}\Big]_{(0)}^{(\frac{\pi}{2})} = \frac{3a^2}{2}\Big[-\frac{1}{1+\mathrm{tg}^3\varphi}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{2}.$$

Der Flächeninhalt der Schleife ist daher dreimal so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks AOB.

§ 23.

Übergang von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 135.)

Ist eine Kurve durch die Gleichungen

$$(1.)\quad x = \varphi(t),\quad y = \psi(t)$$

gegeben, so führt man zur Berechnung des von ihr eingeschlossenen Flächeninhalts häufig mit gutem Erfolge Polarkoordinaten ein. Aus den Gleichungen

$$(2.)\quad x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi$$

findet man nämlich

$$(3.)\quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

$$(4.)\quad \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{xdy - ydx}{x^2},$$

und wenn man diese Gleichung mit

$$r^2\cos^2\varphi = x^2$$

multipliziert,

$$(5.)\quad r^2 d\varphi = xdy - ydx = \Big(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\Big)dt.$$

Dadurch geht Formel Nr. 134 der Tabelle über in

$$(6.)\quad S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{(\alpha)}^{(\beta)}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_{(\alpha)}^{(\beta)}\Big(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\Big)dt.$$

Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll den Sektor AOP der Hyperbel mit den Gleichungen

(7.) $x = a\mathfrak{Cos}\,u,\quad y = a\mathfrak{Sin}\,u\quad (\text{also}\quad x^2 - y^2 = a^2)$

berechnen (Fig. 44).

Auflösung. Aus den Gleichungen (7.) folgt

(8.) $$dx = a\mathfrak{Sin}\,u\,.\,du,\quad dy = a\mathfrak{Cos}\,u\,.\,du,$$

also

(9.) $$xdy - ydx = a^2(\mathfrak{Cos}^2 u - \mathfrak{Sin}^2 u)du = a^2 du,$$

(10.) $$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^u (xdy - ydx) = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^u du = \frac{a^2 u}{2}.$$

Für a gleich 1 wird deshalb

(11.) $$u = 2S,$$

d. h. u ist der doppelte Flächeninhalt des Sektors AOP, wie schon in § 28, Seite 134 der Differential-Rechnung hervorgehoben wurde.

Dieses Resultat stimmt auch mit dem in Aufgabe 7 des vorhergehenden Paragraphen gefundenen überein, denn aus den Gleichungen

(12.) $$x = a\mathfrak{Cos}\,u = r\cos\varphi,\quad y = a\mathfrak{Sin}\,u = r\sin\varphi$$

folgt

(13.) $$\mathfrak{Tg}\,u = \operatorname{tg}\varphi,$$

(14.) $$\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4} + \varphi\Big) = \frac{1 + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi} = \frac{1 + \mathfrak{Tg}\,u}{1 - \mathfrak{Tg}\,u} = \frac{\mathfrak{Cos}\,u + \mathfrak{Sin}\,u}{\mathfrak{Cos}\,u - \mathfrak{Sin}\,u}.$$

Nun ist aber nach D.-R., Formel Nr. 50 und 51 der Tabelle

(15.) $$\mathfrak{Cos}\,u + \mathfrak{Sin}\,u = e^u,\quad \mathfrak{Cos}\,u - \mathfrak{Sin}\,u = e^{-u},$$

deshalb geht Gleichung (14.) über in

(16.) $$\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4} + \varphi\Big) = \frac{e^u}{e^{-u}} = e^{2u},$$

folglich wird

(17.) $$\ln\Big[\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4} + \varphi\Big)\Big] = 2u$$

und

(18.) $$S = \frac{a^2}{4}\ln\Big[\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4} + \varphi\Big)\Big] = \frac{a^2 u}{2}.$$

Aufgabe 2. Man soll den Sektor der *Kreisevolvente* mit den Gleichungen

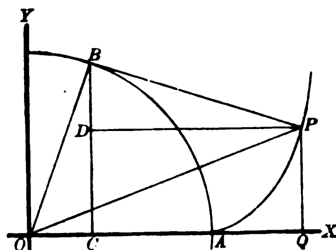


Fig. 46.

$$(19.)\quad \begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$

berechnen (Fig. 46).

Auflösung. Aus den Gleichungen (19.) findet man

$$(20.)\quad \begin{cases} dx = at\cos t dt, \\ dy = at\sin t dt, \end{cases}$$

folglich wird

$$(21.)\quad xdy - ydx = a^2t^2dt,$$

$$(22.)\quad S = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^t t^2dt = \frac{a^2t^3}{6} = AOP.$$

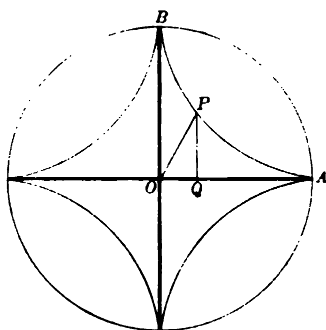


Fig. 47.

Aufgabe 3. Man soll den Flächeninhalt der *Astroide* mit den Gleichungen

$$(23.)\quad x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$$

berechnen (Fig. 47).

Auflösung. Aus den Gleichungen (11.) findet man

$$(24.)\quad \begin{cases} dx = -3a\cos^2 t\sin t dt, \\ dy = +3a\sin^2 t\cos t dt, \end{cases}$$

folglich wird

$$(25.)\quad xdy - ydx = 3a^2(\sin^2 t\cos^4 t + \sin^4 t\cos^2 t)dt = 3a^2\sin^2 t\cos^2 t dt$$

$$(26.)\quad S = \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^t \sin^2 t\cos^2 t dt = AOP,$$

oder

$$(27.)\quad S = \frac{3a^2}{8}\int\limits_0^t 4\sin^2 t\cos^2 t \,.\, dt = \frac{3a^2}{16}\int\limits_{(0)}^{(t)} \sin^2(2t)d(2t).$$

Dies gibt nach Formel Nr. 100 der Tabelle

$$(28.)\quad S = \frac{3a^2}{16}\left[-\tfrac{1}{2}\sin(2t)\cos(2t) + t\right]_0^t = \frac{3a^2}{16}\left[t - \tfrac{1}{4}\sin(4t)\right].$$

Für $t = \frac{\pi}{2}$ erhält man den Sektor AOB, d. h. den vierten Teil der Astroide, folglich ist der Flächeninhalt der ganzen Astroide in Übereinstimmung mit Aufgabe 11 in § 19

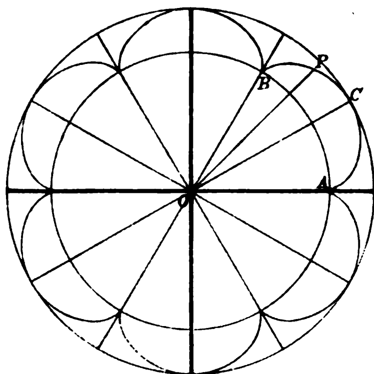
(29.) $$F = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

Aufgabe 4. Man soll den Flächeninhalt der *Epizykloiden* mit den Gleichungen

(30.) $$\begin{cases} x = a[m\cos t - \cos(mt)], \\ y = a[m\sin t - \sin(mt)] \end{cases}$$

berechnen (Fig. 48).

Fig. 48.



Auflösung. Aus den Gleichungen (30.) folgt

(31.) $$\begin{cases} dx = ma[-\sin t + \sin(mt)]dt, \\ dy = ma[\cos t - \cos(mt)]dt, \end{cases}$$

also, wenn man beachtet, daß hier $m = n + 1$ zu setzen ist,

(32.) $$\begin{aligned} xdy - ydx &= ma^2[(m+1) - (m+1)\cos(nt)]dt \\ &= m(m+1)a^2[1 - \cos(nt)]dt. \end{aligned}$$

Dies gibt für den Sektor AOP

(33.) $$\begin{aligned} S &= \frac{m(m+1)a^2}{2}\int_0^t [1 - \cos(nt)]dt \\ &= \frac{m(m+1)a^2}{2}\left[t - \frac{1}{n}\sin(nt)\right]. \end{aligned}$$

Wenn der Sektor durch einmaliges Abrollen des rollenden Kreises entstanden ist, wenn es sich also um den Sektor $AOBC$ handelt, so hat man den Wälzungswinkel des rollenden Kreises

$$nt = 2\pi, \quad \text{also} \quad t = \frac{2\pi}{n}$$

zu setzen und erhält

(34.) $$S = \frac{m(m+1)a^2\pi}{n} = \frac{(n+1)(n+2)a^2\pi}{n} = AOBC.$$

Ist n eine ganze Zahl, so schließt sich die Kurve, und die ganze Fläche besteht genau aus n solchen Sektoren: in diesem Falle wird also der Flächeninhalt der Epizykloide

(35.) $$F = n\,.\,AOBC = (n+1)(n+2)a^2\pi.$$

Ist z. B. $n = 6$, wie es in Figur 48 der Fall ist, so wird

(36.) $$F = 56a^2\pi.$$

Für $n = 1$ ist die Epizykloide eine *Kardioide*, deren Flächeninhalt demnach

(37.) $$F = 6a^2\pi$$

ist. Dieses Resultat stimmt mit dem in § 22 Aufgabe 5 gefundenen überein: nur war damals der Halbmesser a viermal größer als in den hier benutzten Gleichungen.

Aufgabe 5. Man soll den Flächeninhalt der *Hypozykloiden* mit den Gleichungen

(38.) $$x = a[m\cos t + \cos(mt)], \quad y = a[m\sin t - \sin(mt)]$$

berechnen (Fig. 49).

Auflösung. Aus den Gleichungen (26.) folgt

(39.) $$\begin{cases} dx = ma[-\sin t - \sin(mt)]dt \\ dy = ma[\cos t - \cos(mt)]dt, \end{cases}$$

also, wenn man beachtet, daß hier $m = n - 1$ zu setzen ist,

(40.) $$\begin{aligned} xdy - ydx &= ma^2[(m-1) - (m-1)\cos(nt)]dt \\ &= m(m-1)a^2[1 - \cos(nt)]dt, \end{aligned}$$

folglich wird

(41.) $$\begin{aligned} S &= \frac{m(m-1)a^2}{2}\int_0^t [1 - \cos(nt)]dt \\ &= \frac{m(m-1)a^2}{2}\left[t - \frac{1}{n}\sin(nt)\right] = AOP. \end{aligned}$$

Wenn der Sektor durch einmaliges Abrollen des rollenden Kreises entstanden ist, so hat man den Wälzungswinkel dieses Kreises

$nt = 2\pi$, also $t = \frac{2\pi}{n}$

zu setzen; dann wird

(42.) $S = \frac{m(m-1)a^2\pi}{n}$

$= \frac{(n-1)(n-2)a^2\pi}{n}$

$= AOBD.$

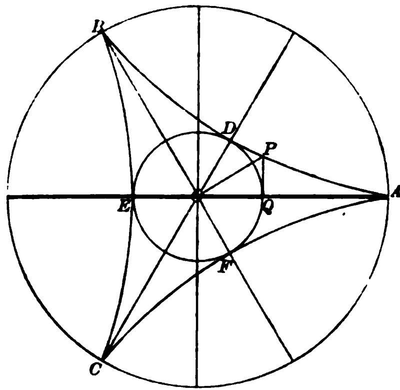


Fig. 49.

Ist n eine ganze Zahl, so schließt sich die Kurve, und man erhält für den Flächeninhalt der ganzen Hypozykloide

(43.) $$F = n\,.\,AOBD = (n-1)(n-2)a^2\pi.$$

Für den in Figur 49 berücksichtigten Fall ist

(44.) $$n = 3 \quad \text{und} \quad F = 2a^2\pi,$$

also doppelt so groß wie der rollende Kreis, oder wie der durch die Punkte DEF gelegte Kreis.

Bei der *Astroide* hat man $n = 4$ zu setzen und erhält in Übereinstimmung mit Aufgabe 11 in § 19 und Aufgabe 3 in diesem Paragraphen

(45.) $$F = 6a^2\pi,$$

nur ist in der vorliegenden Darstellung der Wert von a viermal kleiner als dort.

VI. Abschnitt.

Kubatur der Rotationskörper.

§ 24.

Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers.

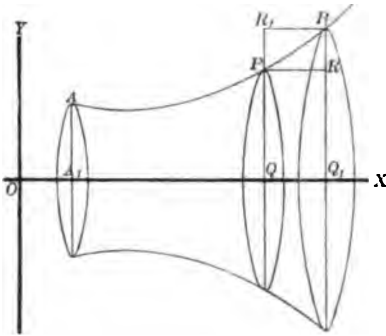
(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 136 bis 138.)

Eine Kurve (Fig. 50) mit der Gleichung

(1.) $$y = f(x)$$

rotiere um die X-Achse, dann beschreibt jeder Punkt der Kurve einen Kreis. Um das Volumen V des Körpers zu berechnen, welcher bei der Rotation von der Figur A_1QPA beschrieben wird, beachte man zunächst, daß V eine Funktion von x ist. Wenn nämlich $OQ = x$ um die Größe $QQ_1 = \Delta x$ wächst, so wächst auch V um den von dem Viereck QQ_1P_1P beschriebenen Rotationskörper ΔV. Dabei ist ΔV *größer* als der von dem Rechteck QQ_1RP bei der Rotation beschriebene Zylinder $y^2\pi \cdot \Delta x$ und *kleiner* als der von dem Rechteck $QQ_1P_1R_1$ bei der Rotation beschriebene Zylinder $y_1^2\pi \cdot \Delta x$; es ist daher

Fig. 50.



(2.) $$y^2\pi \cdot \Delta x \leqq \Delta V \leqq y_1^2\pi \cdot \Delta x.$$

Dies gilt nur, wenn die Kurve (wie in Figur 50) vom Punkte P bis zum Punkte P_1 *steigt*; wenn sie dagegen in diesem Intervalle *fällt*, so wird

$$(3.)\qquad y^2\pi \,.\, \varDelta x \geqq \varDelta V \geqq y_1^2\pi \,.\, \varDelta x.$$

Steigt und fällt die Kurve in dem Intervalle von P bis P_1 abwechselnd (vergl. Fig. 3), so sei y' die Ordinate des höchsten Punktes H und y'' die Ordinate des tiefsten Punktes T, dann wird

$$(4.)\qquad y'^2\pi \,.\, \varDelta x \geqq \varDelta V \geqq y''^2\pi \,.\, \varDelta x.$$

In dieser Ungleichung sind die beiden vorhergehenden Ungleichungen (2.) und (3.) als besondere Fälle inbegriffen. Indem man die Ungleichung (4.) durch $\varDelta x$ dividiert, erhält man

$$(5.)\qquad y'^2\pi \geqq \frac{\varDelta V}{\varDelta x} \geqq y''^2\pi.$$

Da nun für $\lim \varDelta x = 0$

$$\lim y' = \lim y'' = y$$

wird, so folgt hieraus

$$(6.)\qquad \frac{dV}{dx} = y^2\pi, \quad \text{oder} \quad dV = y^2\pi dx;$$

dies gibt

$$(7.)\qquad V = \pi \int_a^x y^2 dx,$$

wobei die untere Grenze a die Abszisse OA_1 des Kurvenpunktes A ist, denn für x gleich a wird das Volumen des Körpers gleich Null.

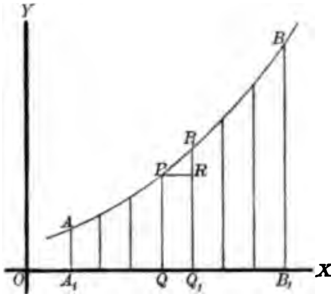
Gewöhnlich wird man auch für die obere Grenze einen *konstanten* Wert b einsetzen müssen, so daß man erhält

$$(8.)\qquad V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Auch dieses Integral kann man als eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen ansehen. Zerlegt man nämlich die ebene Figur A_1B_1BA durch Parallele zur Y-Achse in n Streifen, die alle verschwindend klein werden, wenn n ins Unbegrenzte wächst (Fig. 51), so darf

man diese Streifen als Rechtecke betrachten, denn die kleinen Dreiecke PRP_1, welche dabei vernachlässigt werden, beschreiben bei der Rotation ringförmige Körper, deren Volumina unendlich kleine Größen *höherer Ordnung* sind.

Fig. 51.



Das Volumen des Zylinders, welcher bei der Rotation von dem Rechteck QQ_1RP beschrieben wird, ist aber

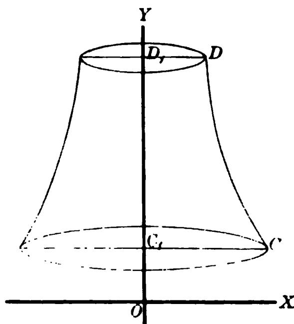
$$y^2\pi \, . \, dx,$$

wenn man die Höhe dx des Zylinders sogleich verschwindend klein annimmt. Die Summe aller dieser unendlich vielen, unendlich flachen Zylinder gibt dann das gesuchte Volumen des Rotationskörpers, nämlich in Übereinstimmung mit Gleichung (8.)

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

In ähnlicher Weise findet man auch das Volumen eines Rotationskörpers, bei welchem die Y-Achse die Rotationsachse ist; nur muß man in diesem Falle x und y miteinander vertauschen, so daß man

Fig. 52



$$(9.) \qquad V = \pi \int_c^d x^2 dy$$

erhält. Es ist dabei zu beachten, daß hier y die Integrations-Veränderliche ist, und daß man deshalb erst integrieren kann, nachdem man in Gleichung (9.) x^2 als Funktion von y dargestellt hat, während in Gleichung (8.) x die Integrations-Veränderliche war.

Um dies anzudeuten, mögen die Integrationsgrenzen a und b in Gleichung (8.), da sie besondere Werte von x sind,

mit x_1 und x_2 bezeichnet werden; und ebenso mögen in Gleichung (9.) die Integrationsgrenzen c und d, da sie besondere Werte von y sind, mit y_1 und y_2 bezeichnet werden.

Man erhält daher

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx, \tag{10.}$$

wenn die X-Achse die Rotations-Achse ist, und

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy, \tag{11.}$$

wenn die Y-Achse die Rotations-Achse ist.

Durch Verlegung der Koordinaten-Achsen kann man es immer erreichen, daß die X-Achse oder die Y-Achse mit der Rotations-Achse zusammenfällt. Ist z. B. in Figur 53 die Gerade C_1D_1 mit der Gleichung

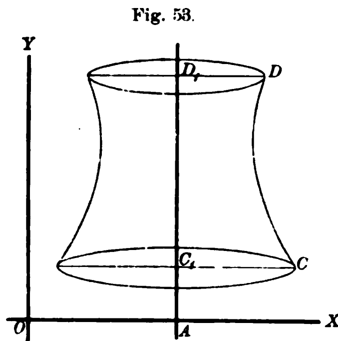
$$x = a$$

Rotations-Achse, so verschiebe man die Y-Achse parallel mit sich um die Strecke OA gleich a, indem man

$$x = x' + a, \quad \text{oder} \quad x' = x - a$$

setzt, dann wird

Fig. 53.



$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x'^2 dy = \pi \int_{y_1}^{y_2} (x - a)^2 dy. \tag{12.}$$

Die Berechnung des Volumens der Körper nennt man „*Kubatur der Körper*“.

§ 25.

Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Ein *gerader Kreiskegel*, dessen Grundkreis den Halbmesser a hat, und dessen Höhe gleich h ist, entsteht, indem ein rechtwinkliges Dreieck OCA (Fig. 54) um die X-Achse rotiert; man soll das Volumen des Kegels berechnen.

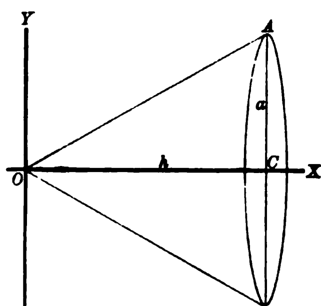


Fig. 54.

Auflösung. In dem rechtwinkligen Dreieck OCA ist die Kathete OC gleich h, und die andere Kathete CA gleich a, folglich hat die Hypotenuse OA die Gleichung

$$(1.)\qquad y = \frac{ax}{h}.$$

Das Volumen des Kegels wird daher nach Formel Nr. 136 der Tabelle

$$(2.)\qquad V = \pi\int_0^h y^2dx = \frac{a^2\pi}{h^2}\int_0^h x^2dx,$$

also

$$(3.)\qquad V = \frac{a^2\pi}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{a^2\pi h}{3}.$$

Aufgabe 2. Ein *abgestumpfter gerader Kreiskegel* habe die Höhe h und sei begrenzt durch die beiden Kreise mit den Halbmessern a_1 und a_2; man soll das Volumen des Kegelstumpfes berechnen.

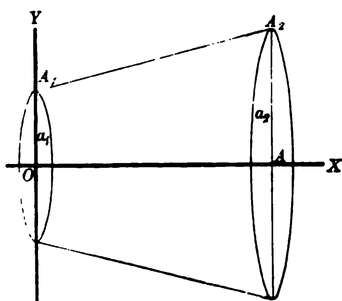


Fig. 55.

Auflösung. Der Kegelstumpf entsteht durch Rotation des Paralleltrapezes OAA_2A_1 um die X-Achse (Fig. 55), wobei OA gleich h mit der X-Achse und OA_1 gleich a_1 mit der Y-Achse zusammenfällt. Die Gleichung der Geraden A_1A_2 ist daher

$$(4.)\qquad y = \frac{a_2 - a_1}{h}x + a_1,$$

folglich wird

$$(5.)\quad V = \pi\int\limits_0^h y^2 dx = \pi\int\limits_0^h \left[\frac{(a_2-a_1)^2x^2}{h^2} + \frac{2(a_2-a_1)a_1x}{h} + a_1^2\right]dx$$

$$= \pi\left[\frac{(a_2-a_1)^2x^3}{3h^2} + \frac{2(a_2-a_1)a_1x^2}{2h} + a_1^2x\right]_0^h$$

$$= \frac{h\pi}{3}\,[(a_2-a_1)^2 + 3(a_2-a_1)a_1 + 3a_1^2],$$

also

$$(6.)\qquad V = \frac{h\pi}{3}\,(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2).$$

Aufgabe 3. Der Halbmesser einer *Kugel* sei a; man soll das Volumen einer *Kugelschicht* berechnen, welche unten und oben von zwei Kreisen mit den Halbmessern x_1 und x_2 begrenzt ist und die Höhe h hat.

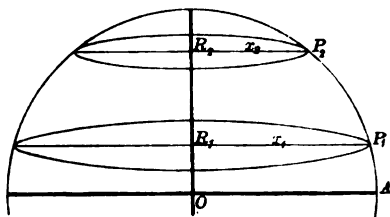


Fig. 56.

Auflösung. Die Kugelschicht entsteht (Fig. 56) durch Rotation der Figur $R_1P_1P_2R_2$ um die Y-Achse, wobei P_1P_2 der Bogen eines Kreises mit der Gleichung

$$(7.)\qquad x^2 + y^2 = a^2, \quad \text{oder} \quad x^2 = a^2 - y^2$$

ist. Nach Formel Nr. 137 der Tabelle erhält man daher

$$(8.)\quad V = \pi\int\limits_{y_1}^{y_2} x^2dy = \pi\int\limits_{y_1}^{y_2}(a^2-y^2)dy = \pi\left[a^2y - \frac{y^3}{3}\right]_{y_1}^{y_2},$$

also

$$(9.)\quad V = \frac{\pi}{3}\,[3a^2(y_2-y_1) - (y_2^3 - y_1^3)]$$

$$= \frac{(y_2-y_1)\pi}{3}\,[3a^2 - y_2^2 - y_1y_2 - y_1^2],$$

$$= \frac{(y_2-y_1)\pi}{6}\,[3(a^2-y_2^2) + 3(a^2-y_1^2) + (y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2)].$$

Nun ist aber

(10.) $$y_2 - y_1 = h,\quad y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2 = h^2,$$

und nach Gleichung (7.)

$$a^2 - y_1^2 = x_1^2,\quad a^2 - y_2^2 = x_2^2,$$

folglich wird

(11.) $$V = \frac{h\pi}{6}(3x_1^2 + 3x_2^2 + h^2).$$

Setzt man in Gleichung (8.) y_1 gleich 0 und y_2 gleich a, so geht die Kugelschicht in die Halbkugel über, so daß man für das Volumen der ganzen Kugel

(12.) $$V = 2\pi\left[a^2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^a = \frac{4a^3\pi}{3}$$

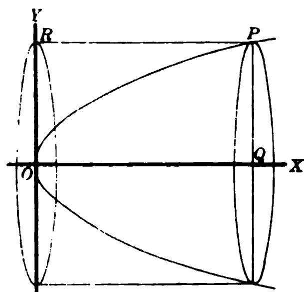
erhält.

Aufgabe 4. Die *Parabel OP* mit der Gleichung

(13.) $$y^2 = 2px$$

rotiere um die X-Achse (Fig. 57); man soll das Volumen des von der Figur OQP beschriebenen *Rotations-Paraboloids* berechnen.

Fig. 57.



Auflösung. Nach Formel Nr. 136 der Tabelle ist

(14.) $$V = \pi\int_0^x y^2dx = 2p\pi\int_0^x xdx$$
$$= 2p\pi\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x\,.\,2px\,.\,\pi}{2}$$
$$= \frac{xy^2\pi}{2}.$$

Dies gibt den Satz: *Das Volumen des Rotations-Paraboloids ist halb so groß wie der von dem entsprechenden Rechteck OQPR mit den Seiten x und y bei der Rotation beschriebene Zylinder.*

Für x gleich y wird

(15.) $$V = \frac{x^3\pi}{2}.$$

Beschreibt man über einem Kreise mit dem Halbmesser x einen Zylinder mit der Höhe x, eine *Halbkugel*, ein *Rotations-Paraboloid* und einen *Kegel* mit der Höhe x (Fig. 58), so sind die Volumina dieser vier Körper bezw.

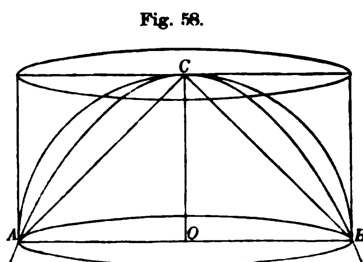


Fig. 58.

$$x^3\pi, \quad \frac{2x^3\pi}{3}, \quad \frac{x^3\pi}{2}, \quad \frac{x^3\pi}{3}$$

und verhalten sich daher zueinander wie

$$6 : 4 : 3 : 2.$$

Aufgabe 5. Rotiert eine *Ellipse* mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{16.}$$

oder

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \tag{16a.}$$

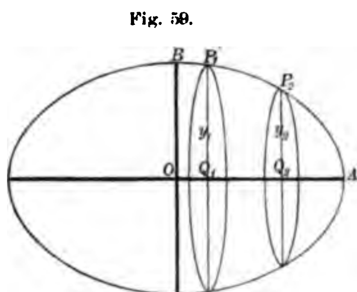


Fig. 59.

um die große Achse (Fig. 59), so heißt der dabei beschriebene Rotationskörper *„längliches Rotations-Ellipsoid"*; man soll das Volumen der Schicht berechnen, welche bei der Rotation von der Figur $Q_1Q_2P_2P_1$ beschrieben wird.

Auflösung. Nach Formel Nr. 136 der Tabelle wird in diesem Falle

$$V = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2dx = \frac{b^2\pi}{a^2}\int_{x_1}^{x_2}(a^2 - x^2)dx = \frac{b^2\pi}{a^2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{x_1}^{x_2} \tag{17.}$$

$$= \frac{b^2\pi}{3a^2}[3a^2(x_2 - x_1) - (x_2^3 - x_1^3)]$$

$$= \frac{b^2\pi(x_2 - x_1)}{3a^2}(3a^2 - x_2^2 - x_1x_2 - x_1^2),$$

$$(17a.)\quad V = \frac{\pi(x_2 - x_1)}{6}\left[\frac{3b^2}{a^2}(a^2 - x_2^2) + \frac{3b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2) + \frac{b^2}{a^2}(x_2 - x_1)^2\right],$$

oder, wenn man die Höhe $x_2 - x_1$ der Schicht wieder mit h bezeichnet und Gleichung (16a.) beachtet,

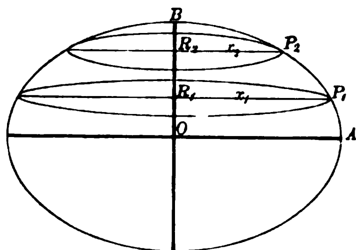
$$(18.)\quad V = \frac{h\pi}{6}\left(3y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{b^2h^2}{a^2}\right).$$

Für y_1 gleich 0, y_2 gleich 0, h gleich $2a$ erhält man das Volumen des ganzen Rotations-Ellipsoids, nämlich

$$(19.)\quad V = \frac{4ab^2\pi}{3}.$$

Aufgabe 6. Rotiert eine *Ellipse* mit der Gleichung

Fig. 60.



$$(20.)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder

$$(20a.)\quad x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$$

um die *kleine Achse*, so heißt der dabei beschriebene Rotationskörper „*Sphäroid*" (Fig. 60); man soll das Volumen der Schicht berechnen, welche bei der Rotation durch die Figur $R_1P_1P_2R_2$ beschrieben wird.

Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man hier

$$(21.)\quad V = \frac{a^2\pi}{b^2}\int_{y_1}^{y_2}(b^2 - y^2)dy = \frac{a^2\pi}{b^2}\left[b^2y - \frac{y^3}{3}\right]_{y_1}^{y_2}$$

$$= \frac{h\pi}{6}\left(3x_1^2 + 3x_2^2 + \frac{a^2h^2}{b^2}\right),$$

wobei die Höhe $y_2 - y_1$ mit h bezeichnet ist.

Für x_1 gleich 0, x_2 gleich 0, h gleich $2b$ erhält man das Volumen des ganzen Sphäroids, nämlich

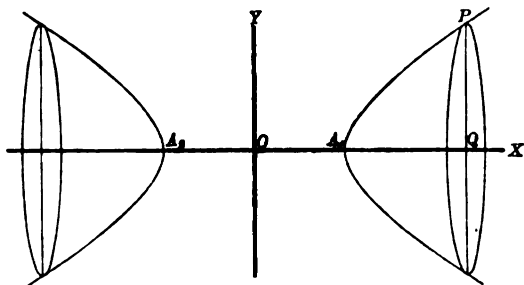
$$(22.)\quad V = \frac{4a^2b\pi}{3}.$$

Aufgabe 7. Rotiert eine *Hyperbel* mit der Gleichung

$$(23.)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

um die X-Achse, so entsteht das *„zweischalige Rotations-Hyperboloid"* (Fig. 61): man soll das Volumen einer Schicht dieses Körpers berechnen.

Fig. 61.



Auflösung. Hier ist

$$(24.)\qquad V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = \frac{b^2\pi}{a^2} \int_{x_1}^{x_2} (x^2 - a^2) dx = \frac{b^2\pi}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} - a^2 x\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{b^2\pi}{3a^2} [x_2^3 - x_1^3 - 3a^2(x_2 - x_1)]$$

$$= \frac{b^2\pi(x_2 - x_1)}{3a^2} (x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 - 3a^2)$$

$$= \frac{\pi(x_2 - x_1)}{6} \left[\frac{3b^2}{a^2}(x_2^2 - a^2) + \frac{3b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2) - \frac{b^2}{a^2}(x_2 - x_1)^2\right],$$

der, wenn man $x_2 - x_1$ mit h bezeichnet und Gleichung (23.) berücksichtigt,

$$(25.)\qquad V = \frac{h\pi}{6}\left(3y_1^2 + 3y_2^2 - \frac{b^2h^2}{a^2}\right).$$

Für

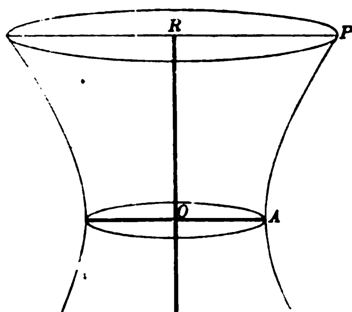
$$x_1 = a, \; y_1 = 0; \quad x_2 = x, \; y_2 = y; \quad h = x - a$$

erhält man das Volumen des Körpers, der bei der Rotation von der Figur A_1QP beschrieben wird, nämlich

$$(26.)\quad V = \frac{(x-a)\pi}{6}\left[3y^2 - \frac{b^2(x-a)^2}{a^2}\right] = \frac{b^2(x-a)^2\pi}{3a^2}(x+2a).$$

Aufgabe 8. Rotiert eine *Hyperbel* mit der Gleichung

Fig. 62.



$$(27.)\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder

$$(27\text{a.})\quad x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2)$$

um die Y-Achse, so entsteht das *„einschalige Rotations-Hyperboloid“* (Fig. 62); man soll das Volumen einer Schicht dieses Körpers berechnen.

Auflösung. Hier ist

$$(28.\quad V = \pi\int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \frac{a^2\pi}{b^2}\int_{y_1}^{y_2}(y^2 + b^2)dy = \frac{a^2\pi}{b^2}\left[\frac{y^3}{3} + b^2y\right]_{y_1}^{y_2}$$

$$= \frac{a^2\pi(y_2 - y_1)}{3b^2}(y_2^2 + y_1y_2 + y_1^2 + 3b^2),$$

oder

$$(29.)\quad V = \frac{(y_2 - y_1)\pi}{6}\left[\frac{3a^2}{b^2}(y_2^2 + b^2) + \frac{3a^2}{b^2}(y_1^2 + b^2) - \frac{a^2}{b^2}(y_2 - y_1)^2\right].$$

Bezeichnet man die Höhe $y_2 - y_1$ der Schicht wieder mit h, so wird mit Rücksicht auf die Gleichungen (27a.)

$$(30.)\qquad V = \frac{h\pi}{6}\left(3x_1^2 + 3x_2^2 - \frac{a^2h^2}{b^2}\right).$$

Für

$$x_1 = a,\ y_1 = 0:\quad x_2 = x,\ y_2 = y,\ h = y$$

erhält man das Volumen des Körpers, der bei der Rotation der Figur $OAPR$ um die Y-Achse beschrieben wird, nämlich

$$(31.)\quad V = \frac{y\pi}{6}\left(3a^2 + 3x^2 - \frac{a^2y^2}{b^2}\right) = \frac{a^2y\pi}{3b^2}(y^2 + 3b^2).$$

Aufgabe 9. Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Kettenlinie* um die X-Achse entsteht (Fig. 63).

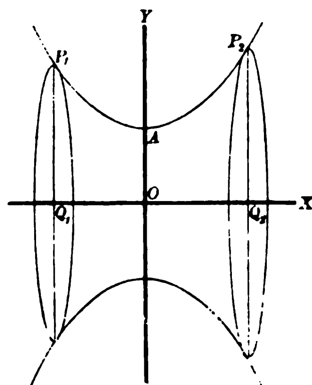
Auflösung. Die Gleichung der Kettenlinie ist

$$(32.)\quad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right),$$

oder

$$\pm\sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right),$$

Fig. 63.



folglich wird

$$(33.)\quad V = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$$

$$= \frac{a^2\pi}{4}\int_{x_1}^{x_2}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx$$

$$= \frac{a^2\pi}{4}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Unter der Voraussetzung, daß x_1 und x_2 beide positiv sind, erhält man

$$(34.)\quad V = \frac{a\pi}{2}\left[\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\cdot\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + ax\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{a\pi}{2}\left[y\sqrt{y^2 - a^2} + ax\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{a\pi}{2}\left[y_2\sqrt{y_2^2 - a^2} - y_1\sqrt{y_1^2 - a^2} + a(x_2 - x_1)\right].$$

Wird dagegen x_1 negativ, wie es in Figur 63 der Fall ist, so wird

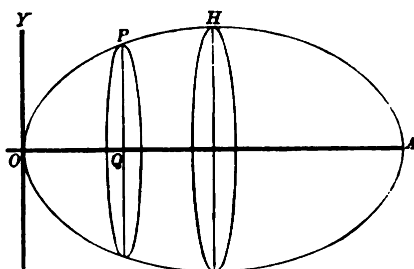
$$(34a.)\quad V = \frac{a\pi}{2}\left[y_2\sqrt{y_2^2 - a^2} + y_1\sqrt{y_1^2 - a^2} + a(x_2 - x_1)\right].$$

Für $x_1 = 0,\ y_1 = a;\ x_2 = x,\ y_2 = y$ erhält man

$$V = \frac{a\pi}{2}\left(y\sqrt{y^2 - a^2} + ax\right). \tag{35.}$$

Aufgabe 10. Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Zykloide* um die X-Achse entsteht (Fig. 64).

Fig. 64.



Auflösung. Die Gleichungen der Zykloide sind

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases} \tag{36.}$$

d. h. x und y sind beide als Funktionen einer dritten Veränderlichen t dargestellt; deshalb wird es zweckmäßig sein, t als Integrations-Veränderliche einzuführen.

Dies gibt

$$dx = a(1 - \cos t)dt, \tag{37.}$$

also, wenn der Körper durch Rotation der Figur OQP entsteht,

$$V = \pi\int_0^x y^2 dx = a^3\pi\int_0^t (1 - \cos t)^3 dt \tag{38.}$$

$$= a^3\pi\int_0^t (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt,$$

folglich wird nach den Formeln Nr. 10, 13, 99 und 54 der Tabelle

$$V = a^3\pi(t - 3\sin t + \tfrac{3}{2}\sin t\cos t + \tfrac{3}{2}t - \sin t + \tfrac{1}{3}\sin^3 t) \tag{39.}$$

$$= a^3\pi\left[\tfrac{5}{2}t + \sin t(-4 + \tfrac{3}{2}\cos t + \tfrac{1}{3}\sin^2 t)\right].$$

Für $t = 2\pi$ erhält man das Volumen des Körpers, welcher durch Rotation der ganzen Zykloide $OAHP$ entsteht, nämlich

$$V = 5a^3\pi^2. \tag{40.}$$

Aufgabe 11. Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Astroide* um die X-Achse entsteht (Fig. 65).

Auflösung. Die Gleichungen der Astroide sind

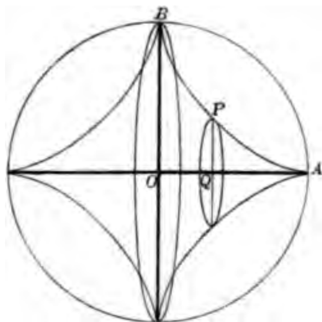


Fig. 65.

(41.) $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t,$

folglich ist, wenn man wieder t zur Integrations-Veränderlichen macht und zunächst den Körper berechnet, welcher durch Rotation der Figur $OQPB$ entsteht,

(42.) $dx = -3a\cos^2 t \sin t dt,$

$$(43.)\qquad V = \pi\int_0^x y^2 dx = -3a^3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \sin^6 t\cos^2 t\sin t dt$$

$$= 3a^3\pi\int_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{(t)} (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t\,.\,d(\cos t).$$

Setzt man also

$$\cos t = z,$$

so wird, wenn man beachtet, daß $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ gleich 0 ist,

$$(44.)\qquad V = 3a^3\pi\int_0^z (z^2 - 3z^4 + 3z^6 - z^8)dz$$

$$= 3a^3\pi\left(\frac{z^3}{3} - \frac{3z^5}{5} + \frac{3z^7}{7} - \frac{z^9}{9}\right)$$

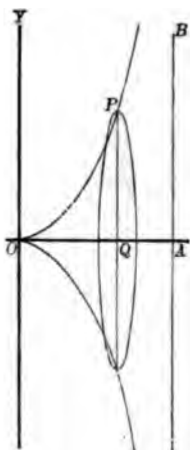
$$= \frac{a^3\pi}{105}(105\cos^3 t - 189\cos^5 t + 135\cos^7 t - 35\cos^9 t).$$

Für t gleich 0 erhält man das Volumen des Körpers welcher bei der Rotation von dem Quadranten OAB beschrieben wird, folglich ist das Volumen des ganzen Rotationskörpers

$$(45.)\qquad V = \frac{2a^3\pi}{105}(105 - 189 + 135 - 35) = \frac{32a^3\pi}{105}.$$

Aufgabe 12. Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Zissoide* um die X-Achse entsteht (Fig. 66).

Fig. 66.



Auflösung. Die Gleichungen der *Zissoide* sind

$$(46.)\qquad x = 2a\sin^2\varphi,\quad y = \frac{2a\sin^3\varphi}{\cos\varphi},$$

folglich wird

$$(47.)\qquad dx = 4a\sin\varphi\cos\varphi d\varphi,$$

$$(48.)\quad V = \pi\int_0^x y^2dx = 16a^3\pi\int_0^\varphi\frac{\sin^7\varphi d\varphi}{\cos\varphi}.$$

Setzt man also

$$(49.)\qquad \cos\varphi = t,\quad \sin^2\varphi = 1 - t^2,$$
$$\sin\varphi d\varphi = -dt,$$

so wird

$$t = 1 \quad \text{für} \quad \varphi = 0,$$

und man erhält

$$(50.)\quad V = -16a^3\pi\int_1^t\frac{(1-t^2)^3dt}{t}$$

$$= -16a^3\pi\int_1^t\left(\frac{1}{t} - 3t + 3t^3 - t^5\right)dt$$

$$= -16a^3\pi\left[\ln t - \frac{3t^2}{2} + \frac{3t^4}{4} - \frac{t^6}{6}\right]_1^t$$

$$= \frac{4a^3\pi}{3}(-12\ln t + 18t^2 - 9t^4 + 2t^6 - 11)$$

$$= \frac{4a^3\pi}{3}[-6\ln(t^2) - 2(1-t^2)^3 - 3(1-t^2)^2 - 6(1-t^2)].$$

Nun ist

$$(51.)\quad t^2 = \cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = \frac{2a - x}{2a},\quad 1 - t^2 = \frac{x}{2a},$$

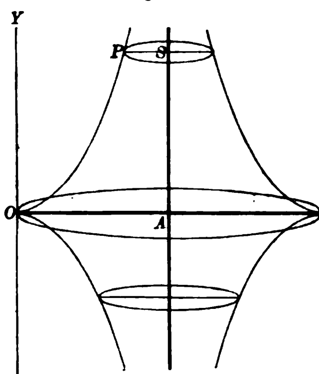
folglich wird

$$(52.)\quad V = \frac{\pi}{3}\left[24a^3\ln\left(\frac{2a}{2a - x}\right) - x^3 - 3ax^2 - 12a^2x\right].$$

Aufgabe 13. Man soll das Volumen des Körpers berechnen, der durch Rotation der *Zissoide* um die Asymptote mit der Gleichung $x = 2a$ entsteht (Fig. 67).

Auflösung. Zunächst möge das Volumen des Körpers berechnet werden, welcher bei der Rotation von der Figur $OASP$ beschrieben wird. Nach Formel Nr. 138 der Tabelle findet man in diesem Falle

Fig. 67.



$$V = \pi \int_0^y (x - 2a)^2 dy. \tag{53.}$$

Dabei folgt aus den Gleichungen (46.)

$$\left\{ \begin{aligned} x - 2a &= -2a\cos^2\varphi, \\ dy &= \frac{2a}{\cos^2\varphi}(3\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\sin^2\varphi d\varphi, \end{aligned} \right. \tag{54.}$$

also

$$\begin{aligned} V &= 8a^3\pi \int_0^\varphi \sin^2\varphi\cos^2\varphi(3\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)d\varphi \\ &= 8a^3\pi \int_0^\varphi (1 - \cos^2\varphi)\cos^2\varphi(1 + 2\cos^2\varphi)d\varphi \\ &= 8a^3\pi \int_0^\varphi (\cos^2\varphi + \cos^4\varphi - 2\cos^6\varphi)d\varphi. \end{aligned} \tag{55.}$$

Nun ist nach Formel Nr. 101 der Tabelle

$$\int \cos^6\varphi d\varphi = \frac{1}{6}\cos^5\varphi\sin\varphi + \frac{5}{6}\int \cos^4\varphi d\varphi, \tag{56.}$$

$$\int \cos^4\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\cos^3\varphi\sin\varphi + \frac{3}{4}\int \cos^2\varphi d\varphi, \tag{57.}$$

$$\int \cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi. \tag{58.}$$

Multipliziert man Gleichung (56.) mit -2, Gleichung (57.) mit $-2 \cdot \frac{5}{6} + 1 = -\frac{2}{3}$, Gleichung (58.) mit $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{2}$ und addiert diese drei Gleichungen, so erhält man unter Hinzufügung des Faktors $8a^3\pi$

$$(59.)\quad V = 8a^3\pi\int_0^{\varphi}(\cos^2\varphi + \cos^4\varphi - 2\cos^6\varphi)d\varphi$$

$$= 8a^3\pi\Big[-\frac{1}{3}\cos^5\varphi\sin\varphi - \frac{1}{6}\cos^3\varphi\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{4}\varphi\Big].$$

Wenn φ bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, so wird y unendlich groß. Gleichzeitig erstreckt sich auch der Rotationskörper bis ins Unendliche; trotzdem bleibt aber sein Volumen endlich, denn man erhält

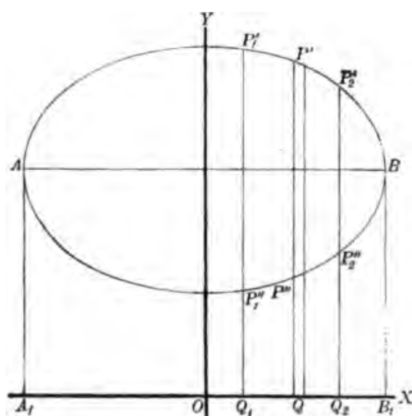
$$(60.)\quad \lim_{\varphi=\frac{\pi}{2}} V = a^3\pi^2.$$

Aufgabe 14. Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Ellipse*

$$(61.)\quad y = c \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

um die X-Achse entsteht (Fig. 68), wenn c größer als b ist.

Fig. 68.



Auflösung. Man kann das gesuchte Volumen V als die Differenz zweier Volumina V' und V'' betrachten, von denen V' bei der Rotation von der Figur $Q_1Q_2P_2'P_1'$ und V'' von der Figur $Q_1Q_2P_2''P_1''$ beschrieben wird. Dabei ist

$$(62.)\quad V' = \pi\int_{x_1}^{x_2} y'^2 dx, \quad V'' = \pi\int_{x_1}^{x_2} y''^2 dx,$$

also

$$(63.)\quad V = V' - V'' = \pi\int_{x_1}^{x_2}(y'^2 - y''^2)dx.$$

Bei der vorliegenden Aufgabe ist

$$y' = c + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y'' = c - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

also

$$y' + y'' = 2c, \quad y' - y'' = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

folglich wird

$$(64.) \qquad (y' + y'')(y' - y'') = y'^2 - y''^2 = \frac{4bc}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$(65.) \qquad V = \frac{4bc\pi}{a}\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Will man das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *ganzen* Ellipse entsteht, so hat man

$$x_1 = -a, \quad x_2 = +a$$

zu setzen und erhält nach Formel Nr. 123 der Tabelle

$$(66.) \qquad V = \frac{4bc\pi}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-a}^{+a}$$

$$= \frac{4bc\pi}{a}\left[\frac{a^2}{2}\arcsin(+1) - \frac{a^2}{2}\arcsin(-1)\right]$$

$$= 2abc\pi^2.$$

VII. Abschnitt.

Rektifikation der ebenen Kurven.

§ 26.

Rektifikation ebener Kurven, deren Gleichung auf ein rechtwinkliges Koordinaten-System bezogen ist.

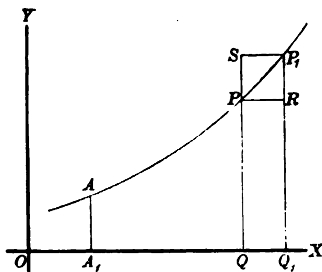
(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 139.)

Ist

$$y = f(x) \tag{1.}$$

die Gleichung einer Kurve (Fig. 69), so wird der Bogen AP gleich s ebenfalls eine Funktion von x. Wächst nämlich x um die Größe QQ_1 gleich Δx, so wächst auch der Bogen s um die Größe $\widehat{PP_1}$ gleich Δs. Betrachtet man zunächst Δs als die Sehne $\overline{PP_1}$, so ist Δs die Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck PRP_1, so daß man erhält

Fig. 69.



$$\overline{PP_1}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RP_1}^2, \quad \text{oder} \quad \Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \tag{2.}$$

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \tag{2a.}$$

Läßt man die beiden Punkte P und P_1 einander unendlich nahe rücken, so gehen Δx, Δy, Δs bezw. in die Differentiale dx, dy, ds über, und der unendlich kleine Bogen $\widehat{PP_1}$ fällt mit der unendlich kleinen Sehne $\overline{PP_1}$ gleich ds zusammen. Deshalb erhält man für den unendlich kleinen Zuwachs ds des Bogens s aus Gleichung (2a.)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{3.}$$

Daraus folgt durch Integration für den Bogen AP selbst

$$s = \int_a^x ds = \int_a^x dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{4.}$$

Man wird hierbei die Integrationsgrenzen zweckmäßiger Weise mit x_1 und x_2 bezeichnen, um anzudeuten, daß x die Integrations-Veränderliche ist. Dadurch geht Gleichung (4.) über in

$$s = \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{4a.}$$

Man kann nämlich auch y zur Integrations-Veränderlichen machen, denn aus Gleichung (3.) folgt

$$ds = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}, \tag{5.}$$

also

$$s = \int_{y_1}^{y_2} ds = \int_{y_1}^{y_2} dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}. \tag{6.}$$

Sind x und y als Funktionen einer dritten Veränderlichen t gegeben, so wird man in den meisten Fällen mit gutem Erfolge t zur Integrations-Veränderlichen machen und schreiben

$$ds = dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \tag{7.}$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \tag{8.}$$

In dieser Formel sind die Gleichungen (4a.) und (6.) als besondere Fälle enthalten, welche sich ergeben, wenn man

$$t = x \quad \text{bezw.} \quad t = y$$

setzt.

Auch hier kann man das bestimmte Integral als den Grenzwert einer Summe von unendlich vielen, unendlich

kleinen Größen betrachten. Zerlegt man nämlich den Abschnitt Q_1Q_2 auf der X-Achse (Fig. 70) in n (gleiche oder ungleiche) Teile und legt durch die Schnittpunkte Parallele zur Y-Achse, so wird auch der Bogen P_1P_2 gleich s in n Teile zerlegt.

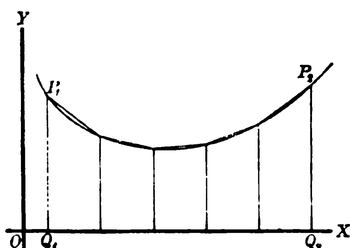


Fig. 70.

Indem man die aufeinander folgenden Schnittpunkte des Bogens durch gerade Linien miteinander verbindet, erhält man zwischen P_1 und P_2 ein Polygon von n Seiten. Wird nun n unendlich groß, und werden die einzelnen Seiten des Polygons unendlich klein, so fallen sie mit den Bogen, deren Sehnen ds sie sind, zusammen.

Der ganze Bogen P_1P_2 oder s wird daher die Summe von diesen unendlich vielen, unendlich kleinen Sehnen ds, so daß man wieder erhält

$$s = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

§ 27.

Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Länge des Bogens OP der *Parabel* mit der Gleichung

(1.) $$y^2 = 2px$$

berechnen (Fig. 71).

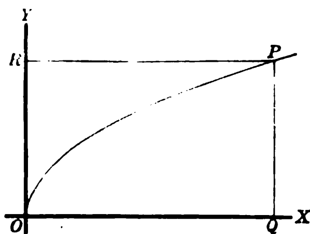


Fig. 71.

Auflösung. Aus Gleichung (1.) folgt

(2.) $$ydy = pdx, \text{ oder } \frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}.$$

Man wird hier nämlich y zur Integrations-Veränderlichen machen, weil sich x und $\frac{dx}{dy}$

rational durch y darstellen lassen. Dadurch erhält man **nach** Formel Nr. 139 der Tabelle

$$(3.)\qquad s = \int_0^y dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{1}{p}\int_0^y dy \sqrt{p^2 + y^2},$$

und dies gibt nach Formel Nr. 129 der Tabelle

$$(4.)\qquad s = \frac{1}{p}\left[\frac{y}{2}\sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p^2}{2}\ln\left(\frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}\right)\right]_0^y$$

$$= \frac{y}{2p}\sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p}{2}\ln\left(\frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}\right)$$

$$= \frac{y}{2p}\sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{y}{p}\right).$$

Aufgabe 2. Man soll die Länge des Bogens P_1P_2 der *Ellipse* mit der Gleichung

$$(5.)\qquad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

berechnen (Fig. 72).

Auflösung. Aus Gleichung (5.) folgt

$$(6.)\qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

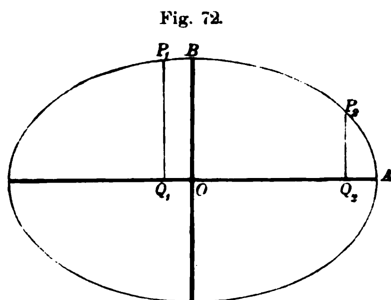


Fig. 72.

$$(7.)\qquad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$= \frac{a^4 - e^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)},$$

wobei

$$e^2 = a^2 - b^2$$

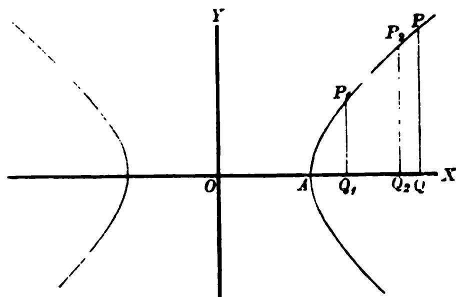
ist. Daraus ergibt sich

$$(8.)\qquad s = \frac{1}{a}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx\sqrt{a^4 - e^2x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\int_{x_1}^{x_2} \frac{(a^4 - e^2x^2)dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - e^2x^2)}}.$$

Dieses Integral, das ein *„elliptisches Integral zweiter Gattung“* genannt wird, kann erst an einer späteren Stelle ermittelt werden, da es sich weder durch algebraische

Funktionen noch durch die bisher bekannten transzendenten Funktionen ausdrücken läßt. Man erkennt daher aus dieser Aufgabe, wie die Anwendungen der Integral-Rechnung auf neue transzendente Funktionen führen.

Fig. 73.



Aufgabe 3. Man soll die Länge des Bogens P_1P_2 der *Hyperbel* mit der Gleichung

(9.) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

berechnen (Fig. 73).

Auflösung. Man findet hier in ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe

$$(10.)\quad s = -\frac{1}{a}\int_{x_1}^{x_2}\frac{(a^4 - e^2x^2)dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - e^2x^2)}} = \frac{1}{a}\int_{x_1}^{x_2}\frac{(e^2x^2 - a^4)dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(e^2x^2 - a^4)}},$$

nur ist bei der Hyperbel e^2 gleich $a^2 + b^2$.

Aufgabe 4. Man soll die Länge des Bogens P_1P_2 der *Kettenlinie* mit der Gleichung

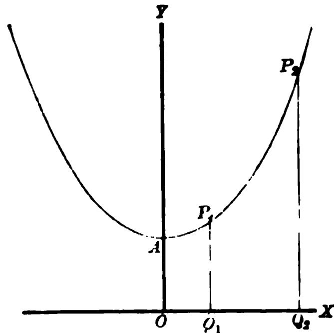
$$(11.)\qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right),$$

oder

$$(11\text{a.})\qquad \pm\sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right)$$

berechnen (Fig. 74).

Fig. 74.



Auflösung. Aus den Gleichungen (11.) und (11a.) folgt

$$(12.)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right),$$

$$(13.)\quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \mathfrak{Sin}^2\left(\frac{x}{a}\right) = \mathfrak{Cof}^2\left(\frac{x}{a}\right),$$

oder

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \tag{13a.}$$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right)dx = a\int_{x_1}^{x_2} \mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right)d\left(\frac{x}{a}\right) = a\left[\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{x_1}^{x_2} \tag{14.}$$

$$= \sqrt{y_2^2 - a^2} - \sqrt{y_1^2 - a^2}.$$

Für x_1 gleich 0, x_2 gleich x wird der Bogen

$$AP = \sqrt{y^2 - a^2} \tag{15.}$$

und kann sehr leicht konstruiert werden. Beschreibt man nämlich um A (Fig. 75) mit dem Halbmesser y einen Kreisbogen, welcher die X-Achse im Punkte B trifft, und vervollständigt das Rechteck $OBCA$, so ist

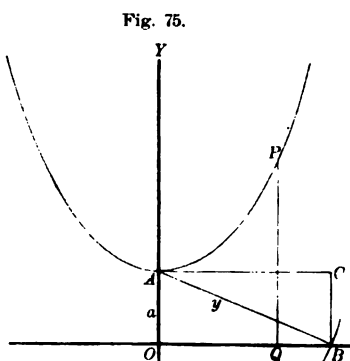


Fig. 75.

$$AC = \sqrt{y^2 - a^2} = \widehat{AP}. \tag{16.}$$

In ähnlicher Weise könnte man die Bogen AP_1 und AP_2 als gerade Linien AC_1 und AC_2 darstellen, deren Differenz

$$AC_2 - AC_1 = C_1C_2 = \widehat{P_1P_2} \tag{17.}$$

sein würde.

Aufgabe 5. Man soll die Länge des Bogens OP bei der *Zykloide* mit den Gleichungen

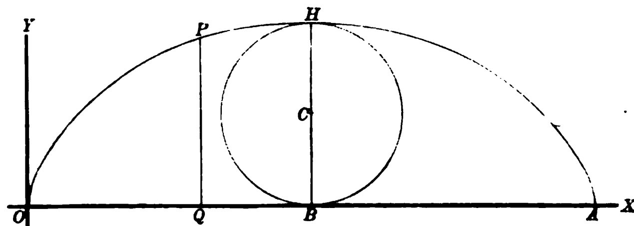
$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \tag{18.}$$

berechnen (Fig. 76).

Auflösung. Aus den Gleichungen (18.) folgt

$$dx = a(1 - \cos t)dt, \quad dy = a\sin t dt, \tag{19.}$$

Fig. 76.



$$(20.)\quad ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)dt^2$$
$$= 2a^2(1 - \cos t)dt^2 = 4a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt^2.$$

$$(21.)\quad ds = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = 4a\sin\left(\frac{t}{2}\right)d\left(\frac{t}{2}\right),$$

folglich ist

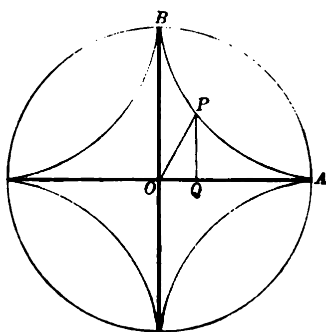
$$(22.)\quad s = 4a\int_{(0)}^{(t)}\sin\left(\frac{t}{2}\right)d\left(\frac{t}{2}\right) = 4a\left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^t$$
$$= 4a\left[1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right] = 8a\sin^2\left(\frac{t}{4}\right).$$

Wird der Wälzungswinkel t gleich 2π, so rollt der di Kurve erzeugende Kreis einmal ab. Dadurch erhält ma für den Bogen der *ganzen* Zykloide

$$(23.)\quad s = 8a,$$

ein Resultat, das schon bei der Krümmung der Kurve (D.-R., Seite 464) ermittelt wurde.

Fig. 77.



Aufgabe 6. Man soll d Länge des Bogens BP bei d *Astroide* mit den Gleichungen

$$(24.)\quad x = a\cos^3 t,\quad y = a\sin^3 t$$

berechnen (Fig. 77).

Auflösung. Aus den Gle chungen (24.) folgt

$$(25.)\quad \begin{cases} dx = -3a\cos^2 t\sin t\,dt, \\ dy = +3a\sin^2 t\cos t\,dt. \end{cases}$$

$$(26.)\quad ds^2 = dx^2 + dy^2$$
$$= 9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)dt^2$$
$$= 9a^2\sin^2 t\cos^2 t\,dt^2,$$

also

$$(27.)\quad ds = \pm 3a\sin t\cos t\,dt.$$

Hierbei ist das untere Zeichen zu nehmen, weil s zu nimmt, wenn t abnimmt. Dies gibt

$$(28.)\qquad s = -3a\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\sin t\cos t dt = -\frac{3a}{2}\left[\sin^2 t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{t}$$

$$= \frac{3a}{2}(1-\sin^2 t) = \frac{3a}{2}\cos^2 t.$$

Für t gleich 0 wird s dem Quadranten BA der Astroide gleich, nämlich

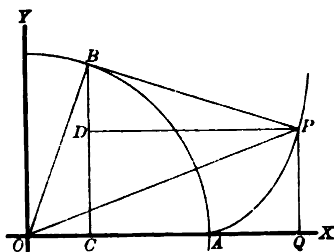
$$(29.)\qquad s = \frac{3a}{2}.$$

Aufgabe 7. Man soll die Länge des Bogens AP der *Kreisevolvente* mit den Gleichungen

$$(30.)\qquad \begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$

berechnen (Fig. 78).

Fig. 78.



Auflösung. Aus den Gleichungen (30.) folgt

$$(31.)\qquad \begin{cases} dx = at\cos t dt, \\ dy = at\sin t dt, \end{cases}$$

$$(32.)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)dt^2 = a^2t^2dt^2,$$

$$(33.)\qquad ds = at\,dt,$$

$$(34.)\qquad s = a\int_0^t t dt = \frac{at^2}{2}.$$

Aufgabe 8. Man soll die Länge des Bogens AP bei den *Epizykloiden* mit den Gleichungen

$$(35.)\qquad x = a[m\cos t - \cos(mt)],\quad y = a[m\sin t - \sin(mt)]$$

berechnen (Fig. 79).

Auflösung. Aus den Gleichungen (35.) folgt

$$(36.)\qquad dx = ma[-\sin t + \sin(mt)]dt,\quad dy = ma[\cos t - \cos(mt)]dt;$$

dies gibt, wenn man wieder $m-1$ mit n bezeichnet,

(37.) $ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2m^2a^2[1 - \cos(nt)]dt^2$

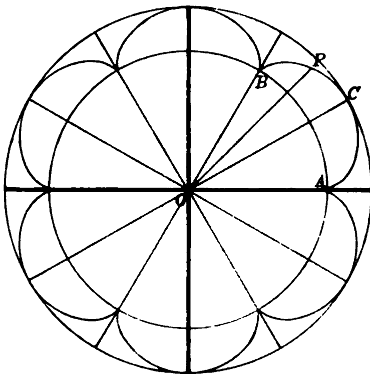
$$= 4m^2a^2\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)dt^2,$$

(38.) $ds = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)dt = \frac{4ma}{n}\sin\left(\frac{nt}{2}\right)d\left(\frac{nt}{2}\right),$

(39.) $s = \frac{4ma}{n}\int\limits_{(0)}^{(t)}\sin\left(\frac{nt}{2}\right)d\left(\frac{nt}{2}\right) = \frac{4ma}{n}\left[-\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right]_0^t$

$$= \frac{4ma}{n}\left[1 - \cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right] = \frac{8ma}{n}\sin^2\left(\frac{nt}{4}\right).$$

Fig. 79.



Wird der Wälzungswinkel nt des rollenden Kreises gleich 2π, so erhält man für den vollständigen Bogen ACB (Fig. 79)

(40.) $s = \frac{8ma}{n} = \frac{8(n+1)a}{n}.$

Ist n eine ganze Zahl, so schließt sich die Kurve; ihr Umfang U besteht aus n solchen Bogen, so daß man erhält

(41.) $U = 8(n + 1)a.$

Auch dieses Resultat ergab sich bereits bei der Krümmung der Kurven (D.-R., S. 467).

Für den Fall $n = 6$, welcher durch die Figur dargestellt ist, erhält man also

(42.) $$U = 56a$$

In dem Falle, wo $n = 1$ ist, wird die Kurve eine *Kardioide,* deren Umfang also

(43.) $$U = 16a$$

ist.

Aufgabe 9. Man soll die Länge des Bogens AP bei den *Hypozykloiden* mit den Gleichungen

(44.) $x = a[m\cos t + \cos(mt)], \quad y = a[m\sin t - \sin(mt)]$

berechnen (Fig. 80).

Auflösung. Aus den Gleichungen (44.) folgt

(45.) $dx = ma[-\sin t - \sin(mt)]dt,\quad dy = ma[\cos t - \cos(mt)]dt;$

dies gibt, wenn man (in Übereinstimmung mit der früher gebrauchten Bezeichnung) $m+1$ gleich n setzt,

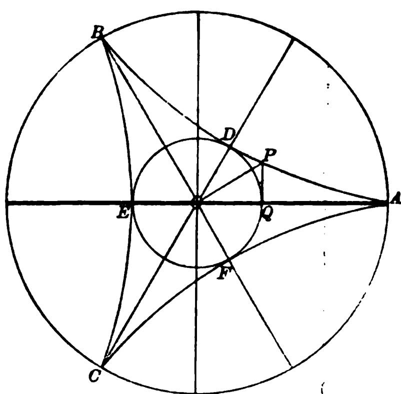


Fig. 80.

(46.) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2m^2a^2[1-\cos(nt)]dt^2 = 4m^2a^2\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)dt^2,$$

(47.) $$ds = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)dt = \frac{4ma}{n}\sin\left(\frac{nt}{2}\right)d\left(\frac{nt}{2}\right),$$

(48.) $$s = \frac{4ma}{n}\int\limits_{(0)}^{(t)}\sin\left(\frac{nt}{2}\right)d\left(\frac{nt}{2}\right) = \frac{4ma}{n}\left[-\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right]_0^t$$
$$= \frac{4ma}{n}\left[1-\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right] = \frac{8ma}{n}\sin^2\left(\frac{nt}{4}\right).$$

Wird der Wälzungswinkel nt des rollenden Kreises gleich 2π, so erhält man für den vollständigen Bogen ADB (Fig. 80)

(49.) $$s = \frac{8ma}{n} = \frac{8(n-1)a}{n}.$$

Ist n eine ganze Zahl, so schließt sich die Kurve; ihr Umfang U besteht dann aus n solchen Bogen, so daß man erhält

(50.) $$U = 8(n-1)a.$$

Für den in Figur 80 gewählten Fall, in welchem n gleich 3 ist, erhält man z. B.

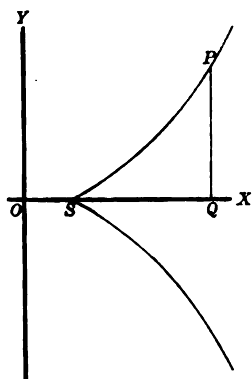
(51.) $$U = 16a.$$

Bei der *Astroide* hat man n gleich 4 zu setzen und erhält

(52.) $$U = 24a.$$

Aufgabe 10. Man soll die Bogenlänge bei der *Neils Parabel* berechnen (Fig. 81).

Fig. 81.



Auflösung. Die Evolute Parabel

(53.) $$y^2 = 2px$$

ist bekanntlich (vergl. D.-R., § 457)

(54.) $$F(x, y) = 27py^2 - 8(x - p)^3 =$$

eine Kurve, welche man auch „*Neil*sche *Parabel*" nennt. Berechnung der Bogenlänge dieser Kurve bilde man zunä

(55.) $$F_1 = -24(x - p)^2, \quad F_2 = 54py,$$

folglich wird

(56.) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1}{F_2} = +\frac{4(x-p)^2}{9py},$$

also mit Rücksicht auf Gleichung (54.)

(57.) $$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{16(x-p)^4}{81p^2y^2} = 1 + \frac{2(x-p)}{3p} = \frac{p + 2x}{3p},$$

(57 a.) $$\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{p + 2x}}{\sqrt{3p}}.$$

Setzt man daher

(58.) $$\sqrt{p + 2x} = t, \quad \text{also} \quad p + 2x = t^2, \quad dx = tdt,$$

so erhält man

(59.) $$s = \frac{1}{\sqrt{3p}}\int_p^x dx\sqrt{p + 2x} = \frac{1}{\sqrt{3p}}\int_{(p)}^{(x)} t^2dt = \frac{1}{3\sqrt{3p}}\left[t^3\right]_{(p)}^{(x)}$$

oder

(60.) $$s = \frac{1}{3\sqrt{3p}}\left[(2x + p)\sqrt{2x + p} - 3p\sqrt{3p}\right].$$

§ 28.

Rektifikation ebener Kurven, deren Gleichung auf Polarkoordinaten bezogen ist.

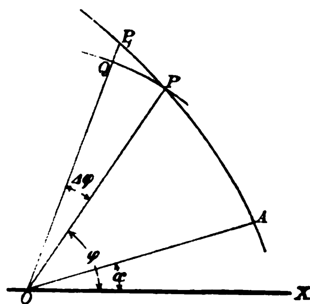
(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 140.)

Bei Anwendung von Polarkoordinaten sei die Gleichung einer Kurve AP (Fig. 82)

(1.) $$r = F(\varphi),$$

dann ist auch die Länge s des Bogens AP eine Funktion von φ, denn der Bogen wächst gleichzeitig mit dem Winkel φ. Nimmt man sogleich an, daß der Zuwachs POP_1 von φ verschwindend klein wird, und bezeichnet denselben dem entsprechend mit $d\varphi$, so wird auch der Zuwachs PP_1 oder ds des Bogens verschwindend klein. Beschreibt man daher um O mit dem Halbmesser OP gleich r einen Kreisbogen PQ, so kann man das rechtwinklige Dreieck

Fig. 82.



PQP_1 als ein *geradliniges* Dreieck betrachten und findet nach dem Pythagoräischen Lehrsatze, wie auch schon früher gezeigt wurde,

$$\overline{PP_1}^2 = \overline{QP_1}^2 + \overline{PQ}^2,$$

oder (vergl. D.-R., Formel Nr. 152 der Tabelle)

(2.) $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Dies gibt

(3.) $$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = d\varphi \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2},$$

also, wenn man die Grenzen sogleich mit φ_1 und φ_2 bezeichnet,

(4.) $$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}.$$

Man kann natürlich statt φ auch andere Integrati Veränderliche einführen. Sind z. B. r und φ beide Fi tionen von t, so folgt aus Gleichung (3.)

$$(5.)\qquad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = dt\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2},$$

und für t gleich r

$$(6.)\qquad ds = dr\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2};$$

dies gibt

$$(7.)\qquad s = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \int_{r_1}^{r_2} dr\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}.$$

§ 29.

Übungs-Aufgaben.

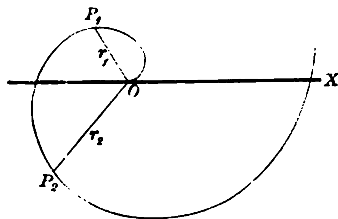
Aufgabe 1. Man soll die Länge des Bogens bei *Archimedischen Spirale* mit der Gleichung

$$(1.)\qquad r = a\varphi$$

berechnen (Fig. 83).

Auflösung. Aus Gleichung (1.) folgt

Fig. 83.



$$(2.)\qquad dr = ad\varphi,$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$= a^2(1 + \varphi^2)d\varphi^2,$$

folglich wird

$$(3.)\qquad ds = ad\varphi\sqrt{1 + \varphi^2},$$

$$(4.)\qquad s = a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\sqrt{1 + \varphi^2}.$$

Dies gibt nach Formel Nr. 129 der Tabelle

$$(5.)\qquad s = a\left[\frac{\varphi}{2}\sqrt{1 + \varphi^2} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\,\varphi\right]$$

$$= a\left[\frac{\varphi}{2}\sqrt{1 + \varphi^2} + \frac{1}{2}\ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2})\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2},$$

oder

$$(5a.)\quad s = \frac{a}{2}\left[\varphi_2\sqrt{1+\varphi_2^2} - \varphi_1\sqrt{1+\varphi_1^2} + \ln\left(\frac{\varphi_2+\sqrt{1+\varphi_2^2}}{\varphi_1+\sqrt{1+\varphi_1^2}}\right)\right]$$

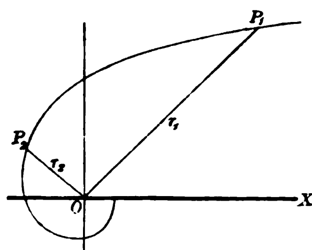
$$= \frac{r_2\sqrt{a^2+r_2^2} - r_1\sqrt{a^2+r_1^2}}{2a} + \frac{a}{2}\ln\left(\frac{r_2+\sqrt{a^2+r_2^2}}{r_1+\sqrt{a^2+r_1^2}}\right).$$

Aufgabe 2. Man soll die Länge des Bogens bei der *hyperbolischen Spirale* mit der Gleichung

$$(6.)\quad r\varphi = a, \quad \text{oder} \quad r = a\varphi^{-1},$$

berechnen (Fig. 84).

Fig. 84.



Auflösung. Aus Gleichung (6.) folgt

$$(7.)\quad dr = -a\varphi^{-2}d\varphi,$$

$$(8.)\quad ds^2 = dr^2 + r^2d\varphi^2$$
$$= a^2(\varphi^{-4} + \varphi^{-2})d\varphi^2,$$

$$(9.)\quad ds = \frac{a}{\varphi^2}\sqrt{1+\varphi^2}\,.\,d\varphi,$$

$$(10.)\quad s = a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi^2} = a\left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\varphi^2\sqrt{1+\varphi^2}} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}\right].$$

Dies gibt nach den Formeln Nr. 40 und 35 der Tabelle

$$(11.)\quad s = a\left[-\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi} + \ln(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2})\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

$$= \left[-\sqrt{a^2+r^2} + a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+r^2}}{r}\right)\right]_{r_1}^{r_2},$$

also

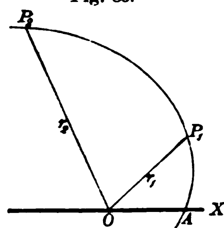
$$(12.)\quad s = \sqrt{a^2+r_1^2} - \sqrt{a^2+r_2^2} + a\ln\left(\frac{r_1(a+\sqrt{a^2+r_2^2})}{r_2(a+\sqrt{a^2+r_1^2})}\right).$$

Aufgabe 3. Man soll die Länge des Bogens bei der *logarithmischen Spirale* mit der Gleichung

$$(13.)\quad r = e^{a\varphi}$$

berechnen (Fig. 85).

Fig. 85.



Auflösung. Aus Gleichung (13.) folgt

(14.) $$dr = e^{a\varphi} . ad\varphi = ard\varphi,$$

oder

(14a.) $$d\varphi = \frac{dr}{ar},$$

(15.) $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = dr^2\left(1 + \frac{1}{a^2}\right),$$

(16.) $$ds = dr\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} = \frac{dr}{a}\sqrt{a^2 + 1};$$

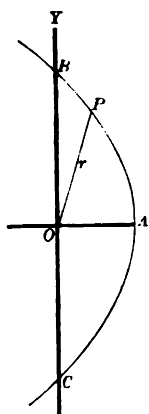
dies gibt

(17.) $$s = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}\int_{r_1}^{r_2} dr = \frac{r_2 - r_1}{a}\sqrt{a^2 + 1}.$$

Aufgabe 4. Man soll die Länge des Bogens A der *Parabel* mit der Gleichung

(18.) $$r^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}}\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right), \quad \text{oder} \quad r = \frac{a}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

Fig. 86.



berechnen (Fig. 86).

Auflösung. Aus Gleichung (18.)

(19.) $$dr = \frac{a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi}{\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

(20.) $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{a^2 d\varphi^2}{\cos^6\left(\frac{\varphi}{2}\right)},$$

(21.) $$ds = \frac{ad\varphi}{\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)},$$

also, wenn man $\varphi = 2t$ setzt und die Formeln Nr. 1(48 der Tabelle beachtet,

(22.) $$s = 2a\int_0^{\varphi} \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = 2a\int_0^t \frac{dt}{\cos^3 t}$$

$$= 2a\left[\frac{\sin t}{2\cos^2 t} + \frac{1}{2}\ln\left\{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right.\right.\right.$$

oder

$$(23.)\qquad s = \frac{a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} + a\ln\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi-\varphi}{4}\right)\right].$$

Aufgabe 5. Man soll die Länge des Bogens AP bei der *Kardioide* mit der Gleichung

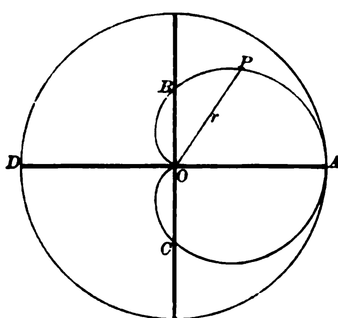


Fig. 87.

$$(24.)\qquad r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

oder

$$(24a.)\qquad r = a\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

berechnen (Fig. 87).

Auflösung. Aus Gleichung (24a.) folgt

$$(25.)\quad dr = -a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi,$$

$$(26.)\quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

$$= a^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]d\varphi^2 = a^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi^2,$$

$$(27.)\qquad ds = a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = 2a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$(28.)\qquad s = 2a\int_0^\varphi \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Für φ gleich π erhält man die Länge des Bogens APO, nämlich

$$(29.)\qquad s = 2a,$$

d. h. *der Bogen APO ist dem Durchmesser des in Figur 87 der Kardioide umschriebenen Kreises gleich.*

Aufgabe 6. Man soll die Länge des Bogens OP bei der *Zissoide* mit der Gleichung

$$(30.)\qquad r = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

berechnen (Fig. 88).

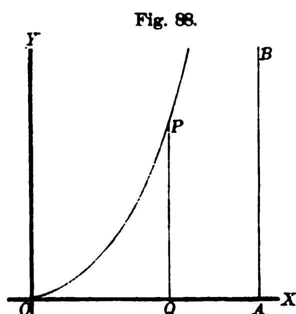
Auflösung. Aus Gleichung (30.) folgt

$$(31.)\qquad dr = \frac{2a\sin\varphi(1+\cos^2\varphi)d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$$(32.)\qquad ds^2 = dr^2 + r^2d\varphi^2 = \frac{4a^2\sin^2\varphi(1+3\cos^2\varphi)d\varphi^2}{\cos^4\varphi},$$

also

Fig. 88.



$$(33.)\qquad ds = \frac{2a\sin\varphi d\varphi\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{\cos^2\varphi}$$

Setzt man

$$(34.)\qquad \sqrt{3}\,.\cos\varphi = t,$$

also

$$-\sqrt{3}\sin\varphi d\varphi = dt,$$

so wird

$$(35.)\qquad ds = -\frac{2a\sqrt{3}\,.\,dt\sqrt{1+t^2}}{t^2}$$

$$(36.)\qquad s = -2a\sqrt{3}\int\limits_{(0)}^{(\varphi)}\frac{dt\sqrt{1+t^2}}{t^2}$$

$$= -2a\sqrt{3}\left(\int\limits_{(0)}^{(\varphi)}\frac{dt}{t^2\sqrt{1+t^2}} + \int\limits_{(0)}^{(\varphi)}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\right),$$

folglich erhält man mit Rücksicht auf die Formeln Nr. und 35 der Tabelle

$$(37.)\qquad s = -2a\sqrt{3}\left[-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} + \ln(t+\sqrt{1+t^2})\right]_{(0)}^{(\varphi)},$$

oder

$$(38.)\qquad s = 2a\left[\frac{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}\right.$$

$$\left. -2-\sqrt{3}\,.\ln\left(\frac{\sqrt{3}\,.\cos\varphi+\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{2+\sqrt{3}}\right)\right].$$

VIII. Abschnitt.

Komplanation der Rotationsflächen.

§ 30.

Berechnung des Flächen-Elementes bei einer Rotationsfläche.

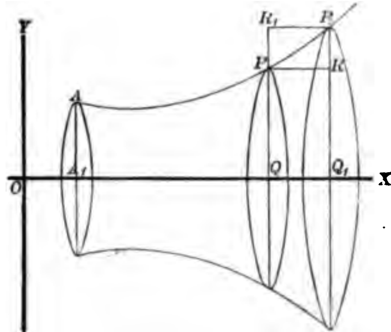
(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 141 und 142.)

Rotiert eine Kurve mit der Gleichung

(1.) $$y = f(x)$$

um die X-Achse, so beschreibt der Bogen AP (Fig. 89) eine Rotationsfläche, deren Oberfläche O eine Funktion von x ist. Wächst nämlich x um die Größe QQ_1 gleich Δx, so wächst auch die Oberfläche um denjenigen Teil ΔO der Rotationsfläche, welcher bei der Rotation von dem Bogen PP_1 beschrieben wird.

Fig. 89.



Zur Berechnung von ΔO betrachte man zunächst den Mantel des Kegelstumpfes, welcher bei der Rotation von der Sehne PP_1 gleich Δs beschrieben wird. Der Mantel dieses Kegelstumpfes ist nach bekannten Sätzen aus der Stereometrie

(2.) $$M = \pi(QP + Q_1P_1) \,.\, PP_1$$
$$= \pi(y + y_1) \,.\, \Delta s.$$

Rückt nun der Punkt P_1 dem Punkte P unendlich nahe, so fällt der Bogen PP_1 mit der Sehne PP_1 zusammen; dabei geht Δs über in ds, und $\lim y_1$ wird gleich y; folglich findet man für das *Oberflächen-Element* dO aus Gleichung (2.)

$$(3.)\qquad dO = 2\pi y ds.$$

Daraus ergibt sich durch Integration

$$(4.)\qquad O = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y ds,$$

wobei die Grenzen mit x_1 und x_2 bezeichnet sind, weil man x als die Integrations-Veränderliche betrachtet.

Auch hier kann man das bestimmte Integral als eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen betrachten, und zwar sind die einzelnen Summanden Mäntel von Kegelstumpfen mit der Seitenkante ds, begrenzt von zwei Kreisen mit den Halbmessern y und $y + dy$.

Rotiert die Kurve um die Y-Achse, so erhält man in ähnlicher Weise für den Flächeninhalt der Rotationsoberfläche durch Vertauschung von x mit y

$$(5.)\qquad O = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x ds.$$

Die auf diese Weise ausgeführte Berechnung der Oberfläche nennt man: „*Komplanation der Rotationsflächen*".

§ 31.

Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll den Flächeninhalt einer *Kugelzone* berechnen (Fig. 90).

Auflösung. Rotiert der Bogen P_1P_2 des Kreises mit der Gleichung

$$(1.)\qquad x^2 + y^2 = a^2, \quad \text{oder} \quad x = \sqrt{a^2 - y^2}$$

um die Y-Achse, so beschreibt er eine Kugelzone, deren Oberfläche nach Formel Nr. 142 der Tabelle

(2.) $$O = 2\pi\int_{y_1}^{y_2} x ds$$

wird. Dabei folgt aus Gleichung (1.)

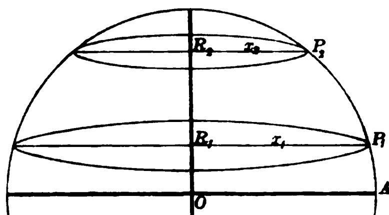


Fig. 90.

(3.) $$dx = -\frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

(4.) $$ds^2 = \frac{(y^2+a^2-y^2)dy^2}{a^2-y^2} = \frac{a^2dy^2}{a^2-y^2},$$

(5.) $$ds = \frac{ady}{\sqrt{a^2-y^2}} = \frac{ady}{x},$$

(6.) $$xds = ady,$$

(7.) $$O = 2a\pi\int_{y_1}^{y_2} dy = 2a\pi(y_2-y_1) = 2a\pi h,$$

wenn man die Höhe $y_2 - y_1$ der Kugelzone wieder mit h bezeichnet.

Setzt man y_2 gleich $+a$, y_1 gleich $-a$, also h gleich $2a$, so erhält man für die Oberfläche der ganzen Kugel

(8.) $$O = 4a^2\pi.$$

Aufgabe 2. Man soll die Oberfläche des *Rotationsparaboloids* berechnen (Fig. 91).

Auflösung. Die Gleichung der Parabel ist

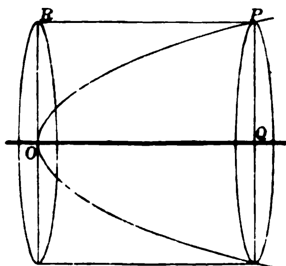


Fig. 91.

(9.) $$y^2 = 2px;$$

daraus folgt

(10.) $$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y},$$

(11.) $$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{p^2+y^2}{y^2} = \frac{p^2+2px}{y^2},$$

(11a.) $$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{y}\sqrt{p^2+2px},$$

(12.) $$yds = dx\sqrt{p^2+2px}.$$

Setzt man

(13.) $\sqrt{p^2 + 2px} = t$, also $p^2 + 2px = t^2$, $pdx = tdt$,

so wird

(14.) $$yds = \frac{t^2dt}{p},$$

also nach Formel Nr. 141 der Tabelle

(15.) $$O = 2\pi\int_0^x yds = \frac{2\pi}{p}\int_{(0)}^{(x)} t^2dt = \frac{2\pi}{3p}\left[(\sqrt{p^2 + 2px})^3\right]_0^x.$$

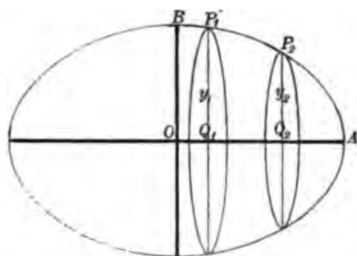
Dies gibt mit Rücksicht auf Gleichung (9.)

(16.) $$O = \frac{2\pi}{3p}\left[(p^2 + y^2)\sqrt{p^2 + y^2} - p^3\right].$$

Aufgabe 3. Man soll die Oberfläche des *Rotati ellipsoids* berechnen (Fig. 92).

Auflösung. Die Gleichung der Ellipse ist

Fig. 92.



(17.) $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 =$

daraus folgt

(18.) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

(19.) $$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2}$$
$$= \frac{b^2(a^4 - e^2x^2)}{a^4y^2}$$

(20.) $$\frac{ds}{dx} = \frac{b}{a^2y}\sqrt{a^4 - e^2x^2},$$

(21.) $$yds = \frac{b\,.\,dx}{a^2}\sqrt{a^4 - e^2x^2} = \frac{b\,.\,d(ex)}{a^2e}\sqrt{a^4 - e^2x^2},$$

(22.) $$O = \frac{2b\pi}{a^2e}\int_{(x_1)}^{(x_2)} d(ex)\sqrt{a^4 - e^2x^2}.$$

Dies gibt nach Formel Nr. 123 der Tabelle, wenn
a^2 mit a^4 und x mit ex vertauscht,

(23.) $$O = \frac{2b\pi}{a^2e}\left[\frac{ex}{2}\sqrt{a^4 - e^2x^2} + \frac{a^4}{2}\arcsin\left(\frac{ex}{a^2}\right)\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Für x_2 gleich a wird

$$\sqrt{a^4 - e^2x_2^2} = a\sqrt{a^2 - e^2} = ab;$$

deshalb erhält man, indem man Gleichung (23.) mit 2 multipliziert und x_1 gleich 0 setzt, für die ganze Oberfläche des Rotationsellipsoids

$$(24.)\qquad O = \frac{2b\pi}{a^2e}\left[a^2be + a^4\arcsin\left(\frac{e}{a}\right)\right]$$

$$= 2b^2\pi + \frac{2a^2b\pi}{e}\arcsin\left(\frac{e}{a}\right).$$

Man kann sich davon überzeugen, daß der gefundene Ausdruck die Oberfläche der Kugel liefert, wenn die rotierende Ellipse in einen Kreis übergeht, wenn man also a gleich b und e gleich 0 macht. Allerdings nimmt dann das zweite Glied die Form $\frac{0}{0}$ an; setzt man aber

$$e = az,$$

so findet man nach der Regel, welche für die Berechnung von solchen unbestimmten Ausdrücken in D.-R., Seite 337 angegeben ist,

$$(25.)\qquad \lim_{e=0}\left[\frac{a}{e}\cdot\arcsin\left(\frac{e}{a}\right)\right] = \lim_{z=0}\frac{\arcsin z}{z} = \lim\frac{\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}}{1} = 1$$

und

$$(26.)\qquad \lim_{b=a} O = 2a^2\pi + 2a^2\pi = 4a^2\pi.$$

Aufgabe 4. Man soll die Oberfläche des *Sphäroids* berechnen (Fig. 93).

Auflösung. Aus der Gleichung (17.) der Ellipse folgt

$$(27.)\qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{a^2y}{b^2x},$$

$$(28.)\qquad \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{a^4y^2}{b^4x^2}$$

$$= \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{b^4x^2}$$

$$= \frac{a^2(b^4 + e^2y^2)}{b^4x^2},$$

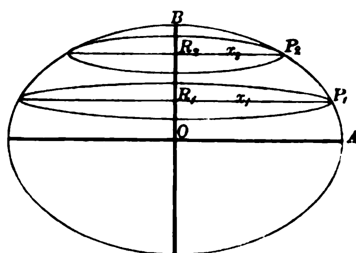


Fig. 93.

$$(29.)\quad \frac{ds}{dy} = \frac{a}{b^2x}\sqrt{b^4 + e^2y^2},$$

$$(30.)\quad xds = \frac{a\,.\,dy}{b^2}\sqrt{b^4 + e^2y^2} = \frac{a\,.\,d(ey)}{b^2e}\sqrt{b^4 + e^2y^2},$$

$$(31.)\quad O = \frac{2a\pi}{b^2e}\int\limits_{(y_1)}^{(y_2)} d(ey)\sqrt{b^4 + e^2y^2}.$$

Dies gibt nach Formel Nr. 129 der Tabelle, wenn man a^2 mit b^4 und x mit ey vertauscht,

$$(32.)\quad O = \frac{2a\pi}{b^2e}\left[\frac{ey}{2}\sqrt{b^4 + e^2y^2} + \frac{b^4}{2}\ln\left(\frac{ey + \sqrt{b^4 + e^2y^2}}{b^2}\right)\right]_{y_1}^{y_2}.$$

Für y_2 gleich b wird

$$\sqrt{b^4 + e^2y_2{}^2} = b\sqrt{b^2 + e^2} = ab;$$

deshalb erhält man, indem man Gleichung (32.) mit 2 multipliziert und y_1 gleich 0 setzt, für die ganze Oberfläche des Sphäroids

$$(33.)\quad O = \frac{2a\pi}{b^2e}\left[ab^2e + b^4\ln\left(\frac{be + ab}{b^2}\right)\right]$$

$$= 2a^2\pi + \frac{2ab^2\pi}{e}\ln\left(\frac{a + e}{b}\right).$$

Nun ist

$$\frac{(a + e)^2}{b^2} = \frac{(a + e)^2}{a^2 - e^2} = \frac{a + e}{a - e},$$

folglich kann man den Ausdruck für O auch auf die Form bringen

$$(34.)\quad O = 2a^2\pi + \frac{ab^2\pi}{e}\ln\left(\frac{a + e}{a - e}\right).$$

Auch hier kann man sich davon überzeugen, daß der gefundene Ausdruck die Oberfläche der Kugel liefert, wenn die rotierende Ellipse in den Kreis übergeht, wenn man also a gleich b und e gleich 0 macht. Allerdings nimmt das zweite Glied wieder die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an; setzt man aber

$$e = az,$$

so findet man nach der Regel, welche für die Berechnung von solchen unbestimmten Formen in D.-R., Seite 337 angegeben ist,

$$(35.)\quad \lim_{e=0} \frac{a}{e} \ln\left(\frac{a+e}{a-e}\right) = \lim_{z=0} \frac{\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}{z} = \lim \frac{\ln(1+z) - \ln(1-z)}{z}$$

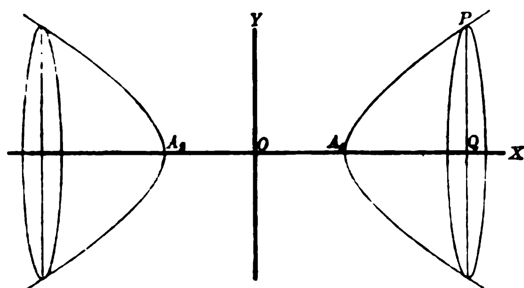
$$= \lim \frac{\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}}{1} = 2$$

und

$$(36.)\quad \lim_{b=a} O = 2a^2\pi + a^2\pi \,.\, 2 = 4a^2\pi \,.$$

Aufgabe 5. Man soll die Oberfläche des *zweischaligen Rotationshyperboloids* berechnen (Fig. 94).

Fig. 94.



Auflösung. Die Gleichung der Hyperbel ist

$$(37.)\quad b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0;$$

daraus folgt

$$(38.)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y},$$

$$(39.)\quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{b^2(e^2x^2 - a^4)}{a^4y^2},$$

$$(40.)\quad \frac{ds}{dx} = \frac{b}{a^2y}\sqrt{e^2x^2 - a^4},$$

$$(41.)\quad yds = \frac{b\,.\,dx}{a^2}\sqrt{e^2x^2 - a^4} = \frac{b\,.\,d(ex)}{a^2e}\sqrt{e^2x^2 - a^4},$$

$$(42.)\quad O = \frac{2b\pi}{a^2e}\int\limits_{(x_1)}^{(x_2)} d(ex)\sqrt{e^2x^2 - a^4}.$$

Dies gibt nach Formel Nr. 129a der Tabelle, wenn man a^2 mit a^4 und x mit ex vertauscht,

$$(43.)\quad O = \frac{2b\pi}{a^2e}\left[\frac{ex}{2}\sqrt{e^2x^2 - a^4} - \frac{a^4}{2}\ln\left(\frac{ex + \sqrt{e^2x^2 - a^4}}{a^2}\right)\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Setzt man x_1 gleich a und x_2 gleich x, so wird

$$\sqrt{e^2x_1^2 - a^4} = a\sqrt{e^2 - a^2} = ab,$$

und man erhält für die von dem Bogen AP bei der Rotation beschriebene Fläche

$$(44.)\quad O = \frac{bx\pi}{a^2}\sqrt{e^2x^2 - a^4} - b^2\pi - \frac{a^2b\pi}{e}\ln\left(\frac{ex + \sqrt{e^2x^2 - a^4}}{a(e + b)}\right).$$

Aufgabe 6. Man soll die Oberfläche des *einschaligen Rotationshyperboloids* berechnen (Fig. 95).

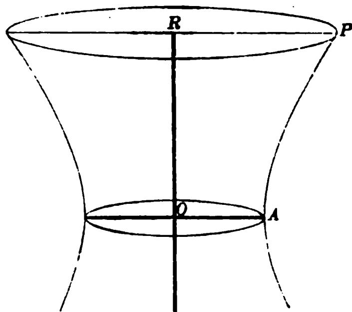


Fig. 95.

Auflösung. Aus der Gleichung (37.) der Hyperbel folgt

$$(45.)\quad \frac{dx}{dy} = \frac{a^2y}{b^2x},$$

$$(46.)\quad \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{b^4x^2} = \frac{a^2(b^4 + e^2y^2)}{b^4x^2},$$

$$(47.)\quad \frac{ds}{dy} = \frac{a}{b^2x}\sqrt{b^4 + e^2y^2},$$

$$(48.)\quad xds = \frac{a\,.\,dy}{b^2}\sqrt{b^4 + e^2y^2} = \frac{a\,.\,d(ey)}{b^2e}\sqrt{b^4 + e^2y^2},$$

$$(49.)\quad O = \frac{2a\pi}{b^2e}\int\limits_{(y_1)}^{(y_2)} d(ey)\sqrt{b^4 + e^2y^2}.$$

Dies gibt nach Formel Nr. 129 der Tabelle, wenn man a^2 mit b^4 und x mit ey vertauscht,

$$(50.)\quad O = \frac{2a\pi}{b^2e}\left[\frac{ey}{2}\sqrt{b^4 + e^2y^2} + \frac{b^4}{2}\ln\left(\frac{ey + \sqrt{b^4 + e^2y^2}}{b^2}\right)\right]_{y_1}^{y_2}.$$

Für y_1 gleich 0, y_2 gleich y erhält man daher

(51.) $$O = \frac{ay\pi}{b^2}\sqrt{b^4 + e^2y^2} + \frac{ab^2\pi}{e}\ln\left(\frac{ey + \sqrt{b^4 + e^2y^2}}{b^2}\right).$$

Aufgabe 7. Man soll die Oberfläche des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Kettenlinie* mit der Gleichung

(52.) $$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right),$$

oder

(52a.) $$\pm\sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right)$$

um die X-Achse entsteht (Fig. 96).

Auflösung. Aus Gleichung (52.) folgt

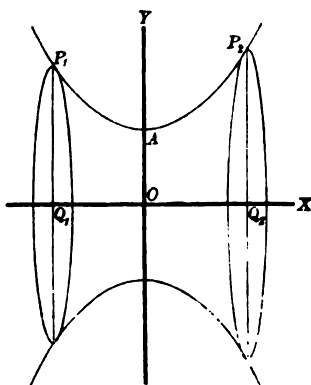


Fig. 96.

(53.) $$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right),$$

(54.) $$O = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\,ds$$

$$= \frac{a\pi}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx$$

$$= \frac{a\pi}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx$$

$$= \frac{a\pi}{2}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]_{x_1}^{x_2},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (52.) und (52a.)

(55.) $$O = \pi\left[\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + ax\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \pi\left[y\sqrt{y^2 - a^2} + ax\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \pi\left[y_2\sqrt{y_2{}^2 - a^2} \mp y_1\sqrt{y_1{}^2 - a^2} + a(x_2 - x_1)\right].$$

Hierbei gilt das obere oder das untere Vorzeichen, je nachdem x_1 positiv oder negativ ist.

Aufgabe 8. Man soll die Oberfläche des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Zykloide*

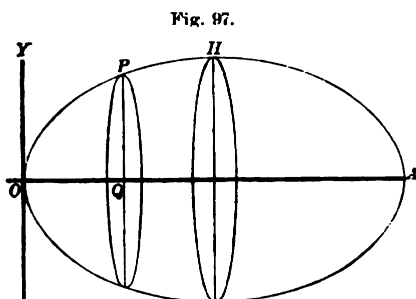


Fig. 97.

$$(56.)\quad \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

um die X-Achse entsteht (Fig. 97).

Auflösung. Aus den Gleichungen (56.) folgt

$$(57.)\quad ds = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt,$$

$$(58.)\quad yds = 2a^2(1 - \cos t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = 4a^2\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)dt.$$

Dies gibt

$$(59.)\quad O = 16a^2\pi\int_0^t \sin^3\left(\frac{t}{2}\right)d\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= -16a^2\pi\int_{(0)}^{(t)}\left[1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]d\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= -16a^2\pi\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^t$$

$$= \frac{16a^2\pi}{3}\left[2 - 3\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\right].$$

Für t gleich 2π erhält man die Oberfläche, welche bei der Rotation von dem ganzen Zykloidenbogen OHA beschrieben wird, nämlich

$$(60.\quad O = \frac{16a^2\pi}{3}(2 + 3 - 1) = \frac{64a^2\pi}{3}.$$

Aufgabe 9. Man soll die Oberfläche des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Astroide*

$$(61.)\quad x = a\cos^3 t,\quad y = a\sin^3 t$$

um die X-Achse entsteht (Fig. 98).

Auflösung. Aus den Gleichungen (61.) folgt

2.) $$ds = -3a\sin t\cos t dt,$$

3.) $$yds = -3a^2\sin^4 t\cos t dt.$$

Dies gibt für die ganze Oberfläche

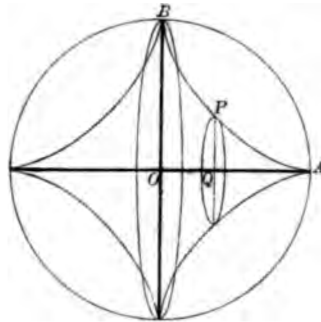


Fig. 98.

4.) $$O = -12a^2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4 t\cos t dt,$$

oder

5.) $$O = +12a^2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,.\,d(\sin t)$$

$$= \frac{12a^2\pi}{5}\left[\sin^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12a^2\pi}{5}.$$

Aufgabe 10. Man soll die Oberfläche des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Kreisevolvente*

6.) $$x = a(\cos t + t\sin t),\quad y = a(\sin t - t\cos t)$$

um die X-Achse entsteht.

Auflösung. Aus den Gleichungen (66.) folgt

7.) $$ds = atdt,$$

8.) $$yds = a^2(t\sin t - t^2\cos t)dt,$$

9.) $$O = 2a^2\pi\int_0^t (t\sin t - t^2\cos t)dt.$$

Setzt man

10.) $u = t^2,\quad dv = \cos t dt,\quad$ also $\quad du = 2tdt,\quad v = \sin t$

in die Formel Nr. 98 der Tabelle, nämlich in die Gleichung

11.) $$\int udv = uv - \int vdu$$

ein, so erhält man

12.) $$\int t^2\cos t dt = t^2\sin t - 2\int t\sin t dt.$$

Setzt man dagegen

13.) $u = t,\quad dv = \sin t dt,\quad$ also $\quad du = dt,\quad v = -\cos t$

in die Gleichung (71.) ein, so ergibt sich

14.) $$\int t\sin t dt = -t\cos t + \int\cos t dt = -t\cos t + \sin t.$$

Indem man Gleichung (72.) mit -1, Gleichung (74.) mit $+3$ multipliziert und dann beide Gleichungen addiert, findet man

(75.) $\int t\sin t dt - \int t^2\cos t dt = -t^2\sin t - 3t\cos t + 3\sin t.$

Deshalb wird

(76.) $$O = 2a^2\pi(3\sin t - 3t\cos t - t^2\sin t).$$

Aufgabe 11. Man soll die Oberfläche des Körpers berechnen, welcher durch die Rotation der ***Kardioide***

(77.) $x = a[2\cos t - \cos(2t)], \quad y = a[2\sin t - \sin(2t)]$

um die X-Achse entsteht.

Auflösung. Aus den Gleichungen (77.) folgt

(78.) $dx = 2a[-\sin t + \sin(2t)]dt = 4a\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right)dt,$

(79.) $dy = 2a[\cos t - \cos(2t)]dt = 4a\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{3t}{2}\right)dt,$

also

(80.) $$ds^2 = 16a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt^2, \quad ds = 4a\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt,$$

(81.) $$yds = 4a^2[2\sin t - \sin(2t)]\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

$$= 8a^2\sin t(1 - \cos t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

$$= 32a^2\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)dt = 64a^2\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)d\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Dies gibt

(82.) $$O = 128a^2\pi\int_0^{(\pi)}\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)d\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= \frac{128a^2\pi}{5}\left[\sin^5\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^\pi = \frac{128a^2\pi}{5}.$$

IX. Abschnitt.

Rektifikation der Raumkurven.

§ 32.

Berechnung des Bogen-Elementes einer Raumkurve.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 143.)

Der Durchschnitt zweier krummen Flächen mit den Gleichungen

(1.) $$F(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad G(x, y, z) = 0$$

ist im allgemeinen eine Raumkurve (vergl. § 143 der D.-R.). Indem man aus den beiden Gleichungen (1.) die Veränderliche z eliminiert, erhält man

(2.) $$H(x, y) = 0, \quad \text{oder} \quad y = f(x).$$

Dies ist die Gleichung eines Zylinders, welcher die Schnittkurve in die XY-Ebene projiziert. Ebenso findet man durch Elimination der Veränderlichen y aus den Gleichungen (1.)

(3.) $$K(x, z) = 0, \quad \text{oder} \quad z = g(x).$$

Dies ist die Gleichung eines Zylinders, welcher die Schnittkurve in die XZ-Ebene projiziert.

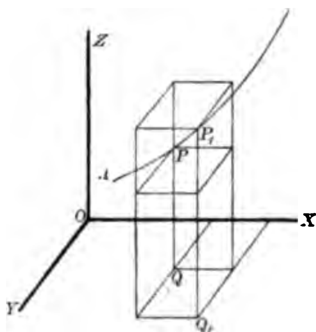
Setzt man noch für x irgend eine Funktion von einer vierten Veränderlichen t, so werden mit Rücksicht auf die Gleichungen (2.) und (3.) auch y und z Funktionen von t, so daß man die Raumkurve auch durch die drei Gleichungen

(4.) $$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

darstellen kann. Umgekehrt lassen sich drei solche Gleichungen auch immer als Raumkurve geometrisch deuten.

Um nun die Länge s des Kurvenbogens AP zu bestimmen, nehme man auf der Kurve zwei benachbarte Punkte P und P_1 an und lege durch dieselben Ebenen, parallel zu den Koordinaten-Ebenen (Fig. 99). Dann erhält man ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit den Kanten

Fig. 99.



$$x_1 - x, \quad y_1 - y, \quad z_1 - z$$

und mit der Diagonale

$$(5.) \quad \overline{PP_1} = \sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}.$$

Rücken die Punkte P und P_1 einander unendlich nahe, so fällt der *Bogen* PP_1 mit der *Sehne* PP_1 zusammen, die Größen

$$PP_1, \quad x_1 - x, \quad y_1 - y, \quad z_1 - z$$

gehen bezw. über in

$$ds, \quad dx, \quad dy, \quad dz,$$

und aus der Gleichung (5.) ergibt sich

$$(6.) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Daraus folgt für die Länge des Bogens AP

$$(7.) \quad s = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Für x gleich t wird z. B.

$$(8.) \qquad s = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

§ 33.

Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Bogenlänge bei der *zylindrischen Schraubenlinie* (vergl. D.-R., Seite 645 und 646)

$$(1.) \qquad x^2 + y^2 = a^2, \quad y = x\,\mathrm{tg}\left(\frac{z}{c}\right)$$

berechnen.

Auflösung. In dem vorliegenden Falle wird es zweckmäßig sein, x, y und z als Funktionen einer einzigen Veränderlichen φ auszudrücken, indem man

$$x = a\cos\varphi \tag{2.}$$

setzt, dann folgt aus den Gleichungen (1.)

$$y = a\sin\varphi, \quad z = c\varphi, \tag{3.}$$

und man erhält

$$dx = -a\sin\varphi d\varphi, \quad dy = a\cos\varphi d\varphi, \quad dz = cd\varphi, \tag{4.}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (a^2 + c^2)d\varphi^2, \tag{5.}$$

$$ds = d\varphi\sqrt{a^2 + c^2}, \tag{6.}$$

$$s = \sqrt{a^2 + c^2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)\sqrt{a^2 + c^2}. \tag{7.}$$

Dieses Resultat ergibt sich auch daraus, daß die Schraubenlinie entsteht, indem man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a\varphi$, $c\varphi$ und der Hypotenuse $\varphi\sqrt{a^2 + c^2}$ auf den Kreiszylinder

$$x^2 + y^2 = a^2$$

so aufwickelt, daß die Kathete $a\varphi$ mit der Basiskurve (d. h. mit dem Kreise) zusammenfällt. Die Hypotenuse bildet dann die Schraubenlinie.

Aufgabe 2. Man soll die Bogenlänge bei der *konischen Spirale*

$$x = e^{a\varphi}\cos\varphi, \quad y = e^{a\varphi}\sin\varphi, \quad z = ce^{a\varphi} \tag{8.}$$

berechnen.

Auflösung. Die Projektion der Kurve in die XY-Ebene ist eine Kurve, bei welcher φ der Winkel zwischen der X-Achse und dem Radius vector ist, denn aus den Gleichungen (8.) folgt

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi. \tag{9.}$$

Die Projektion hat daher die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2 = e^{2a\varphi}, \quad \text{oder} \quad r = e^{a\varphi}, \tag{10.}$$

d. h. die konische Spirale liegt auf einem Zylinder, welcher auf der XY-Ebene senkrecht steht und die *logarithmische*

Spirale zur Basiskurve hat. Außerdem folgt aus den Gleichungen (8.)

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{c^2} = 0; \tag{11.}$$

die konische Spirale liegt also auch auf einem Kreiskegel, dessen Spitze in dem Anfangspunkt der Koordinaten liegt, und dessen Achse mit der Z-Achse zusammenfällt.

Aus den Gleichungen (8.) findet man

$$\begin{cases} dx = e^{a\varphi}(a\cos\varphi - \sin\varphi)d\varphi, \\ dy = e^{a\varphi}(a\sin\varphi + \cos\varphi)d\varphi, \\ dz = e^{a\varphi} . acd\varphi. \end{cases} \tag{12.}$$

Dies gibt

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = e^{2a\varphi}(a^2 + 1 + a^2c^2)d\varphi^2, \tag{13.}$$

$$ds = e^{a\varphi} . d\varphi \sqrt{1 + a^2 + a^2c^2}, \tag{14.}$$

$$s = \sqrt{1+a^2+a^2c^2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{a\varphi} . d\varphi = \frac{1}{a}\sqrt{1+a^2+a^2c^2}(e^{a\varphi_2} - e^{a\varphi_1}), \tag{15.}$$

oder

$$s = \frac{z_2 - z_1}{ac}\sqrt{1 + a^2 + a^2c^2}. \tag{16.}$$

Für einen ganzen Umgang wird

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi, \quad z_2 = ce^{a(\varphi+2\pi)} = z_1 . e^{2a\pi}, \tag{17.}$$

also

$$s = \frac{z_1}{ac}(e^{2a\pi} - 1)\sqrt{1 + a^2 + a^2c^2}. \tag{18.}$$

Aufgabe 3. Man soll die Bogenlänge einer Raumkurve dritten Grades mit den Gleichungen

$$x = 2a^2t, \quad y = 3abt^2, \quad z = 3b^2t^3 \tag{19.}$$

berechnen, wobei a und b zwei beliebige konstante Größen sind.

Auflösung. Aus den Gleichungen (19.) findet man

$$dx = 2a^2dt, \quad dy = 6abt\,dt, \quad dz = 9b^2t^2dt, \tag{20.}$$

folglich wird

$$(21.)\quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (4a^4 + 36a^2b^2t^2 + 81b^4t^4)dt^2$$
$$= (2a^2 + 9b^2t^2)^2 \,.\, dt^2,$$

also

$$(22.)\quad ds = (2a^2 + 9b^2t^2)dt.$$

Macht man den Anfangspunkt der Koordinaten, durch den die Kurve hindurchgeht, auch zum Anfangspunkte des Kurvenbogens; so erhält man

$$(23.)\quad s = \int_0^t (2a^2 + 9b^2t^2)dt = 2a^2t + 3b^2t^3 = x + z.$$

Zweiter Teil.

X. Abschnitt.

Integration der gebrochenen rationalen Funktionen.

§ 34.

Echt gebrochene und unecht gebrochene rationale Funktionen.

Wie schon in der Differential-Rechnung (Seite 16) gezeigt wurde, läßt sich jede *gebrochene* rationale Funktion als Quotient zweier *ganzen* rationalen Funktionen darstellen, d. h. sie läßt sich auf die Form

$$(1.)\quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \cdots + A_{m-1}x + A_m}{ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}$$

bringen. Hierbei sind die Koeffizienten $A, A_1, A_2, \ldots a, a_1, a_2, \ldots$ beliebige konstante Zahlen, und die Exponenten m und n sind beliebige *positive ganze* Zahlen. Den Koeffizienten a der höchsten Potenz von x im Nenner kann man immer gleich 1 machen, weil man, wenn a von 1 verschieden ist, Zähler und Nenner des Bruches durch a dividieren kann. Der Nenner $f(x)$ soll daher in dem folgenden immer die Form

$$(2.)\quad f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

haben.

Man teilt die gebrochenen rationalen Funktionen in echt *gebrochene* und *unecht gebrochene* rationale Funktionen ein, und zwar *heißt eine gebrochene rationale Funktion „echt*

gebrochen", wenn der Grad des Zählers kleiner ist als der Grad des Nenners; sie heißt dagegen „unecht gebrochen", wenn der Grad des Zählers größer oder mindestens ebenso groß ist wie der Grad des Nenners.

Hiernach ist die durch Gleichung (1.) erklärte Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$ *echt gebrochen*, wenn $m < n$, und sie ist *unecht gebrochen*, wenn $m \geqq n$ ist.

Satz 1. *Jede unecht gebrochene rationale Funktion läßt sich als die Summe einer ganzen und einer echt gebrochenen rationalen Funktion darstellen.* Es ist also

$$\frac{F(x)}{f(x)} = g(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}, \tag{3.}$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Funktion und der Grad von $\varphi(x)$ kleiner ist als der von $f(x)$.

Der Beweis des Satzes ergibt sich einfach durch Division. Ist nämlich bei der Division von $F(x)$ durch $f(x)$ der Quotient gleich $g(x)$ und der Rest gleich $\varphi(x)$, so ist

$$F(x) = f(x)g(x) + \varphi(x), \tag{4.}$$

wobei der Grad des Restes $\varphi(x)$ kleiner gemacht werden kann als der Grad des Divisors $f(x)$. Aus Gleichung (4.) ergibt sich sofort

$$\frac{F(x)}{f(x)} = g(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}. \tag{5.}$$

Am besten erkennt man das Verfahren aus einem Beispiele. Es sei

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{x^3 + 9x^2 + 12x - 16}{x^2 + 2x - 3},$$

dann erhält man durch Division

$$\begin{array}{l} x^3 + 9x^2 + 12x - 16 = (x^2 + 2x - 3)(x + 7) + (x + 5), \\ \underline{x^3 + 2x^2 - 3x } \\ + 7x^2 + 15x - 16 \\ \underline{+ 7x^2 + 14x - 21} \\ x + 5 \end{array}$$

oder

$$(6.)\quad \frac{x^3+9x^2+12x-16}{x^2+2x-3} = (x+7) + \frac{x+5}{x^2+2x-3}.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(7.)\quad \frac{2x^4-3x^3-6x^2+34x-9}{x^2-3x+4} = (2x^2+3x-5) + \frac{7x+11}{x^2-3x+4}.$$

Sind $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$ und $\frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)}$ zwei echt gebrochene rationale Funktionen, bei denen $f_1(x)$ den Grad n_1 und $f_2(x)$ den Grad n_2 haben möge, während der Grad von $\varphi_1(x)$ höchstens $n_1 - 1$ und der von $\varphi_2(x)$ höchstens $n_2 - 1$ sein kann, so ist

$$(8.)\quad \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} + \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)} = \frac{\varphi_1(x) \cdot f_2(x) + \varphi_2(x) \cdot f_1(x)}{f_1(x) \cdot f_2(x)}$$

wieder eine echt gebrochene rationale Funktion, denn der Nenner hat den Grad $n_1 + n_2$, während $\varphi_1(x) . f_2(x)$ und $\varphi_2(x) . f_1(x)$ höchstens den Grad $n_1 + n_2 - 1$ haben. Eine ähnliche Betrachtung gilt für die Differenz zweier echt gebrochenen rationalen Funktionen. Dies gibt

Satz 2. *Die Summe oder Differenz zweier echt gebrochenen rationalen Funktionen ist wieder eine echt gebrochene rationale Funktion.*

Dieser Satz läßt sich unmittelbar auf die Summe von beliebig vielen echt gebrochenen rationalen Funktionen übertragen.

§ 35.

Zerlegung der echt gebrochenen rationalen Funktionen in Partialbrüche, wenn die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sämtlich voneinander verschieden sind.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 144.)

Nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze kommt es bei der Integration der gebrochenen rationalen Funktionen nur auf die Integration der *echt* gebrochenen rationalen Funktionen an; denn, wäre die vorgelegte Funktion *unecht* gebrochen, so könnte man sie in eine *ganze* und in eine *echt* gebrochene rationale Funktion

zerlegen. Die Integration der *ganzen* rationalen Funktionen ist aber bereits auf Seite 18 in § 4 erledigt.

Die Integration der *echt* gebrochenen rationalen Funktionen kann man durch *Zerlegung in Partialbrüche* ausführen, wobei der Generalnenner der einzelnen Partialbrüche $f(x)$ sein muß. Deshalb muß man hier die Zerlegung der ganzen rationalen Funktion $f(x)$ in lineare Faktoren benutzen. In § 111 der Differential-Rechnung (Seite 520) war nämlich der Satz bewiesen worden: *Jede ganze rationale Funktion n^{ten} Grades läßt sich in n lineare Faktoren zerlegen.* Es ist also

$$(1.)\quad f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$
$$= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n),$$

und $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$(2.)\quad f(x) = 0.$$

Für das Folgende muß man zwei Fälle unterscheiden, je nachdem diese Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sämtlich voneinander verschieden sind oder nicht.

Hier möge zunächst der *erste Fall* behandelt werden, wo die Wurzeln der Gleichung (2.) sämtlich voneinander verschieden sind. Um die vielen Indizes zu vermeiden, mögen dabei diese Wurzeln mit $a, b, c, \ldots k, l$ bezeichnet werden, so daß die Gleichung (1.) übergeht in

$$(3.)\quad f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)\ldots(x - k)(x - l).$$

Es soll dann gezeigt werden, daß die echt gebrochene rationale Funktion $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ auf die Form

$$(4.)\quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{K}{x-k} + \frac{L}{x-l}$$

gebracht werden kann, wobei die Zähler $A, B, C, \ldots K, L$ der Partialbrüche konstante Größen sind.*)

Beweis. Es sei

$$(5.)\quad f_1(x) = \frac{f(x)}{x-a} = (x - b)(x - c)\ldots(x - k)(x - l),$$

---

*) Für den Fall $n = 2$ ist die Zerlegung in Partialbrüche schon in § 13 durchgeführt worden.

dann ist $f_1(x)$ nur noch eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades; ferner sei

$$A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)}. \tag{6.}$$

Nach diesen Festsetzungen wird die ganze rationale Funktion

$$\varphi(x) - Af_1(x) = \frac{\varphi(x)f_1(a) - \varphi(a)f_1(x)}{f_1(a)} \tag{7.}$$

gleich 0 für $x = a$, so daß nach Satz 2 in § 111 der D.-R. (Seite 519) $\varphi(x) - Af_1(x)$ durch $x - a$ teilbar sein muß. Man erhält also

$$\varphi(x) - Af_1(x) = (x - a)\varphi_1(x), \tag{8.}$$

oder

$$\varphi(x) = Af_1(x) + (x - a)\varphi_1(x), \tag{8a.}$$

wo $\varphi_1(x)$ eine *ganze* rationale Funktion von x ist, deren Grad höchstens gleich $n - 2$ sein kann. Hieraus folgt

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{Af_1(x) + (x - a)\varphi_1(x)}{(x - a)f_1(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}. \tag{9.}$$

Dabei ist $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$ nach den gemachten Angaben wieder eine echt gebrochene rationale Funktion, welche aber einfacher ist als $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, denn $f_1(x)$ ist nur noch vom Grade $n - 1$, und $\varphi_1(x)$ ist höchstens vom Grade $n - 2$.

In derselben Weise kann man jetzt zeigen, daß

$$\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \frac{B}{x - b} + \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)}, \tag{10.}$$

wo $f_2(x)$ vom Grade $n - 2$ und $\varphi_2(x)$ höchstens vom Grade $n - 3$ ist. So kann man fortfahren und findet die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\varphi_2(x)}{f_2(x)} = \dfrac{C}{x - c} + \dfrac{\varphi_3(x)}{f_3(x)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\varphi_{n-2}(x)}{f_{n-2}(x)} = \dfrac{K}{x - k} + \dfrac{\varphi_{n-1}(x)}{f_{n-1}(x)}, \\ \dfrac{\varphi_{n-1}(x)}{f_{n-1}(x)} = \dfrac{L}{x - l}. \end{array}\right. \tag{11.}$$

Addiert man die Gleichungen (9.), (10.) und (11.) und läßt die Glieder fort, welche auf beiden Seiten der Gleichung stehen, so erhält man

$$(12.)\quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{K}{x-k} + \frac{L}{x-l}.$$

Dieser Beweis liefert sogleich den Wert von A; es ist nämlich

$$(13.)\quad A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)} = \frac{\varphi(a)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-k)(a-l)}.$$

In derselben Weise, wie A aus $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ berechnet ist, könnte man jetzt B aus $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$, C aus $\frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)}, \cdots$ berechnen. Dazu würde aber erstens die Bildung von $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}, \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)}, \cdots$ erforderlich sein, und zweitens könnte man leicht glauben, daß die durch Gleichung (12.) erfolgte Zerlegung in Partialbrüche verschiedene Resultate liefere, je nachdem man zuerst das Glied $\frac{A}{x-a}$ oder ein anderes absondert. Dies ist aber nicht der Fall, es gilt vielmehr der Satz: *Die Zerlegung in Partialbrüche ist eindeutig*; d. h. die Werte von $A, B, C, \ldots K, L$ sind unabhängig von der Reihenfolge, in der man sie herleitet. Multipliziert man nämlich Gleichung (12.) mit

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l),$$

so erhält man

$$\begin{aligned}(14.)\quad \varphi(x) = {} & A(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l)\\ & + B(x-a)(x-c)\ldots(x-k)(x-l)\\ & + C(x-a)(x-b)\ldots(x-k)(x-l)\\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ & + K(x-a)(x-b)\ldots(x-i)(x-l)\\ & + L(x-a)(x-b)\ldots(x-i)(x-k).\end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung der Reihe nach

$$x=a,\quad x=b,\quad x=c, \ldots x=k,\quad x=l,$$

so wird

$$(15.)\quad \begin{cases} \varphi(a) = A(a-b)(a-c)\ldots(a-k)(a-l), \\ \varphi(b) = B(b-a)(b-c)\ldots(b-k)(b-l), \\ \varphi(c) = C(c-a)(c-b)\ldots(c-k)(c-l), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(l) = L(l-a)(l-b)\ldots(l-i)(l-k). \end{cases}$$

Dies gibt

$$(16.)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\varphi(a)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-k)(a-l)}, \\ B = \dfrac{\varphi(b)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-k)(b-l)}, \\ C = \dfrac{\varphi(c)}{(c-a)(c-b)\ldots(c-k)(c-l)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L = \dfrac{\varphi(l)}{(l-a)(l-b)\ldots(l-i)(l-k)}. \end{cases}$$

Man erhält also für die Zähler der Partialbrüche genau dieselben Werte, gleichviel ob man mit der Absonderung des betreffenden Partialbruches anfängt oder nicht.

Die Gleichungen (16.) lassen sich noch etwas einfacher schreiben. Es war nämlich

$$A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)},$$

wobei nach Gleichung (5.)

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{x-a},$$

oder, da $f(a) = 0$ ist,

$$(17.)\qquad f_1(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

Hieraus folgt (vergl. D.-R., Formel Nr. 16 oder 124 der Tabelle)

$$f_1(a) = \lim_{x=a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{1} = f'(a),$$

also

$$(18.)\qquad A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}$$

und ebenso

$$(18a.)\quad B=\frac{\varphi(b)}{f'(b)},\quad C=\frac{\varphi(c)}{f'(c)},\dots\quad K=\frac{\varphi(k)}{f'(k)},\quad L=\frac{\varphi(l)}{f'(l)}.$$

Hätten $f(x)$ und $\varphi(x)$ einen gemeinsamen Teiler, z. B. den gemeinsamen Teiler $x-a$, so würde der erste Partialbruch $\frac{A}{x-a}$ wegfallen, weil $\varphi(a)$ und deshalb auch A in diesem Falle gleich Null wären.

Für die Ausführung der numerischen Berechnung ist dasselbe Verfahren wie bei dem oben gegebenen Beweise am meisten geeignet; man schaffe also in Gleichung (12.) durch Multiplikation mit

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-k)(x-l)$$

die Nenner fort, um die Gleichung (14.) zu erhalten, aus der sich dann die Werte von $A,\ B,\ C,\dots K,\ L$ unmittelbar ergeben, indem man bezw.

$$x=a,\quad x=b,\quad x=c,\dots x=k,\quad x=l$$

einsetzt.

Man kann allerdings zur Berechnung der Größen A, $B, C,\dots K, L$ auch das folgende Verfahren anwenden, das später in dem allgemeineren Falle noch in Betracht kommen wird, wo die Wurzeln von $f(x)$ nicht alle voneinander verschieden sind.

In Gleichung (14.) ist die linke Seite höchstens vom Grade $n-1$; ebenso ist die rechte Seite eine Funktion vom Grade $n-1$, die man sich nach Potenzen von x geordnet denken kann. Da die Gleichung für alle Werte von x gilt, so müssen die einzelnen Koeffizienten der linken Seite gleich sein den gleichstelligen Koeffizienten auf der rechten Seite, welche lineare Funktionen (d. h. Funktionen ersten Grades) der gesuchten Größen $A,\ B,\ C,\dots K,\ L$ sind. Nun hat aber eine Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades im ganzen n Koeffizienten. Man erhält also n lineare Gleichungen mit n Unbekannten, welche sich in diesem Falle stets auflösen lassen.

Am besten wird man dieses Verfahren durch die Behandlung einiger Aufgaben verstehen.

Aufgabe 1. Man soll den Bruch $\frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Man setzt den Nenner gleich Null und erhält dadurch die Gleichung

(19.) $$x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = 0.$$

Löst man diese Gleichung auf, so ergeben sich folgende Wurzeln

(20.) $$a = 7, \quad b = -3, \quad c = 2,$$

deshalb wird

(21.) $$x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = (x - 7)(x + 3)(x - 2).$$

Hieraus folgt

(22.) $$\frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} = \frac{15x^2 - 70x - 95}{(x - 7)(x + 3)(x - 2)}$$
$$= \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2}.$$

Um die Werte von A, B und C zu ermitteln, schaffe man die Nenner fort, indem man Gleichung (22.) mit

$$x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = (x - 7)(x + 3)(x - 2)$$

multipliziert. Dadurch erhält man

(23.) $$15x^2 - 70x - 95 = A(x + 3)(x - 2)$$
$$+ B(x - 7)(x - 2) + C(x - 7)(x + 3).$$

Da diese Gleichung für alle Werte von x gilt, so findet man daraus für $x = 7$

$$150 = 50A, \quad \text{oder} \quad A = 3,$$

für $x = -3$

$$250 = 50B, \quad \text{oder} \quad B = 5,$$

und für $x = 2$

$$-175 = -25C, \quad \text{oder} \quad C = 7,$$

folglich wird

(24.) $$\frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} = \frac{3}{x-7} + \frac{5}{x+3} + \frac{7}{x-2}.$$

Man kann auch die rechte Seite von Gleichung (23.) nach fallenden Potenzen von x ordnen und erhält dann

(25.) $$15x^2 - 70x - 95$$
$$= x^2(A + B + C) + x(A - 9B - 4C) + (-6A + 14B - 21C).$$

Diese Gleichung gilt für jeden Wert von x, folglich müssen die Koeffizienten gleicher Potenzen von x auf beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich sein, d. h. es muß

(26.) $$A + B + C = 15,$$

(27.) $$A - 9B - 4C = -70,$$

(28.) $$-6A + 14B - 21C = -95$$

sein. Löst man diese Gleichungen zwischen A, B und C auf, so ergibt sich wieder

(29.) $$A = 3, \quad B = 5, \quad C = 7.$$

Zu demselben Resultate kommt man natürlich auch durch Anwendung der Gleichungen (18.) und (18a.), indem man

(30.) $$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \quad B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)}$$

setzt. In dem vorliegenden Falle ist

(31.) $$a = 7, \quad b = -3, \quad c = 2$$

und

(32.) $$f'(x) = 3x^2 - 12x - 13;$$

dies gibt

(33.) $$\begin{cases} A = \dfrac{\varphi(7)}{f'(7)} = \dfrac{15.49 - 70.7 - 95}{3.49 - 12.7 - 13} = \dfrac{150}{50} = 3, \\[2ex] B = \dfrac{\varphi(-3)}{f'(-3)} = \dfrac{15.\ 9 + 70.3 - 95}{3.\ 9 + 12.3 - 13} = \dfrac{250}{50} = 5, \\[2ex] C = \dfrac{\varphi(2)}{f'(2)} = \dfrac{15.\ 4 - 70.2 - 95}{3.\ 4 - 12.2 - 13} = \dfrac{-175}{-25} = 7. \end{cases}$$

Aufgabe 2. Man soll die Funktion $\dfrac{x^2 + 1}{x^3 - x}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Hier ist

(34.) $$f(x) = x^3 - x = x(x - 1)(x + 1),$$

also

$$(35.)\qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{x^2+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Um die Größen A, B, C zu bestimmen, multipli
man beide Seiten der Gleichung (35.) mit $x^3 - x$ und er

$$(36.)\qquad x^2+1 = A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x).$$

Diese Gleichung gilt für alle Werte von x, desl
findet man für $x = 0$

$$(37.)\qquad 1 = -A, \quad \text{oder} \quad A = -1,$$

für $x = 1$

$$(38.)\qquad 2 = 2B, \quad \text{oder} \quad B = +1$$

und für $x = -1$

$$(39.)\qquad 2 = 2C, \quad \text{oder} \quad C = +1;$$

folglich wird

$$(40.)\qquad \frac{x^2+1}{x^3-x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Ordnet man die rechte Seite von Gleichung (36.) n
fallenden Potenzen von x, so erhält man

$$(36\text{a.})\qquad x^2+1 = x^2(A+B+C) + x(B-C) - A.$$

Da die gleichstelligen Koeffizienten auf beiden Se
dieser Gleichung einander gleich sein müssen, so zer
die Gleichung (36a.) in die Gleichungen

$$(41.)\qquad \begin{cases} A+B+C = 1, \\ \quad\;\; B-C = 0, \\ \qquad\; -A = 1. \end{cases}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt wieder

$$(42.)\qquad A = -1, \quad B = 1, \quad C = 1.$$

Dasselbe Resultat erhält man auch, indem man

$$(43.)\qquad A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \quad B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)},$$

$$(44.)\qquad a = 0, \quad b = 1, \quad c = -1,$$

$$(45.)\qquad f'(x) = 3x^2 - 1, \quad \varphi(x) = x^2 + 1$$

setzt, denn es wird

$$(46.)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\varphi(0)}{f'(0)} = \dfrac{0+1}{0-1} = -1, \\ B = \dfrac{\varphi(1)}{f'(1)} = \dfrac{1+1}{3-1} = +1, \\ C = \dfrac{\varphi(-1)}{f'(-1)} = \dfrac{1+1}{3-1} = +1. \end{cases}$$

Aufgabe 3. Man soll die echt gebrochene rationale Funktion $\dfrac{4x^2 - 15x + 19}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Hier ist

$$(47.)\quad \frac{4x^2 - 15x + 19}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

oder, wenn man beide Seiten der Gleichung mit

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$

multipliziert,

$$(48.)\quad 4x^2 - 15x + 19 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

Dies gibt für $x = 1$

$$8 = 2A, \quad \text{oder} \quad A = 4,$$

für $x = 2$

$$5 = -B, \quad \text{oder} \quad B = -5$$

und für $x = 3$

$$10 = 2C, \quad \text{oder} \quad C = 5,$$

also

$$(49.)\quad \frac{4x^2 - 15x + 19}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{4}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}.$$

Aufgabe 4. Man soll die echt gebrochene rationale Funktion $\dfrac{1}{1 + x - x^2}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Hier muß man erst Zähler und Nenner des Bruches mit -1 multiplizieren, damit der Koeffizient von x^2 im Nenner gleich $+1$ wird. Dadurch erhält man

$$(50.)\quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{-1}{x^2 - x - 1}.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung

$$(51.)\quad f(x) = x^2 - x - 1 = 0$$

sind

$$(52.)\qquad a = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad b = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Deshalb ist

$$(53.)\qquad \frac{-1}{x^2 - x - 1} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})} + \frac{B}{x - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})},$$

oder

$$(54.)\qquad \frac{-1}{x^2 - x - 1} = \frac{2A}{2x - 1 - \sqrt{5}} + \frac{2B}{2x - 1 + \sqrt{5}}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit

$$(2x - 1 - \sqrt{5})(2x - 1 + \sqrt{5}) = 4(x^2 - x - 1),$$

so erhält man

$$-4 = 2A(2x - 1 + \sqrt{5}) + 2B(2x - 1 - \sqrt{5}),$$

oder

$$(55.)\qquad -2 = 2x(A + B) + A(-1 + \sqrt{5}) + B(-1 - \sqrt{5})$$

daraus folgt

$$(56.)\qquad \begin{cases} A + B = 0, \\ A(1 - \sqrt{5}) + B(1 + \sqrt{5}) = 2, \end{cases}$$

oder

$$(57.)\qquad A = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad B = +\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Dies gibt

$$(58.)\qquad \frac{1}{1 + x - x^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2x - 1 + \sqrt{5}} - \frac{1}{2x - 1 - \sqrt{5}}\right)$$

Aufgabe 5. Man soll die gebrochene rationale Funkt[ion] $\frac{2x^3 - 7x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 7}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Die vorgelegte Funktion ist eine *un[echt] gebrochene*; deshalb muß man sie zunächst durch Divi[sion] in eine *ganze* und eine *echt gebrochene* rationale Funk[tion] zerlegen. Dadurch erhält man

$$(59.)\qquad \frac{2x^3 - 7x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 7} = 2x + 5 + \frac{10x - 27}{x^2 - 6x + 7}.$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = x^2 - 6x + 7 = 0$$

sind

(60.) $$a = 3 + \sqrt{2}, \quad b = 3 - \sqrt{2},$$

folglich wird

(61.) $$f(x) = (x - 3 - \sqrt{2})(x - 3 + \sqrt{2}),$$

(62.) $$\frac{10x - 27}{x^2 - 6x + 7} = \frac{A}{x - 3 - \sqrt{2}} + \frac{B}{x - 3 + \sqrt{2}},$$

(63.) $$10x - 27 = A(x - 3 + \sqrt{2}) + B(x - 3 - \sqrt{2}).$$

Für $x = 3 + \sqrt{2}$ erhält man daher

(64.) $$3 + 10\sqrt{2} = 2A\sqrt{2}, \quad \text{oder} \quad A = \frac{1}{2\sqrt{2}}(3 + 10\sqrt{2}),$$

und für $x = 3 - \sqrt{2}$

(65.) $$3 - 10\sqrt{2} = -2B\sqrt{2}, \quad \text{oder} \quad B = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-3 + 10\sqrt{2}),$$

also

(66.) $$\frac{2x^3 - 7x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 7} =$$
$$2x + 5 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{3 + 10\sqrt{2}}{x - 3 - \sqrt{2}} + \frac{-3 + 10\sqrt{2}}{x - 3 + \sqrt{2}}\right).$$

Die angegebene Methode für die Zerlegung in Partialbrüche bleibt richtig, gleichviel ob die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ reelle oder komplexe Größen*) sind.

Im letzteren Falle werden aber die Partialbrüche selbst eine komplexe Form annehmen, die man vermeiden kann, wenn die Koeffizienten von $\varphi(x)$ und $f(x)$ reell sind.

Wie dies geschieht, möge zunächst die folgende Aufgabe lehren.

Aufgabe 6. Man soll die echt gebrochene rationale Funktion $\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Indem man den Nenner gleich Null setzt, erhält man die Gleichung

(67.) $$x^3 - 11x^2 + 43x - 65 = 0$$

mit den Wurzeln

(68.) $$a = 5, \quad b = 3 + 2\sqrt{-1}, \quad c = 3 - 2\sqrt{-1},$$

oder, wenn man $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet,

(68a.) $$a = 5, \quad b = 3 + 2i, \quad c = 3 - 2i.$$

---

*) Vergl. D.-R., § 102—110.

Demnach ist der Nenner der gebrochenen Funktion

(69.) $x^3 - 11x^2 + 43x - 65 = (x-5)(x-3-2i)(x-3+2i$

Dies gibt

(70.) $$\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3-11x^2+43x-65} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-3-2i} + \frac{C}{x-3+2i},$$

und wenn man beide Seiten dieser Gleichung mit $x^3 - 11x^2 + 43x - 65$ multipliziert,

(71.) $$\begin{aligned} 13x^2 - 68x + 95 = {} & A(x-3-2i)(x-3+2i) \\ & + B(x-5)(x-3+2i) \\ & + C(x-5)(x-3-2i). \end{aligned}$$

Dies gibt für $x = 5$

(72.) $80 = A(2-2i)(2+2i) = 8A,$ oder $A = 10,$

für $x = 3 + 2i$

(73.) $-44 + 20i = (-2 + 2i)4i \, . \, B,$ oder $B = \frac{3-8i}{2}$

und für $x = 3 - 2i$

(74.) $-44 - 20i = -(-2-2i)4i \, . \, C,$ oder $C = \frac{3+8i}{2}$

folglich ist

(75.) $$\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3-11x^2+43x-65} = \frac{10}{x-5} + \frac{3-8i}{2(x-3-2i)} + \frac{3+8i}{2(x-3+2i)}.$$

Da die beiden letzten Glieder konjugiert komplex Größen sind, so muß ihre Summe reell sein*). In der Tat es ist

$$\frac{3-8i}{2(x-3-2i)} + \frac{3+8i}{2(x-3+2i)} = \frac{3x+7}{x^2-6x+13},$$

also

(76.) $$\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{10}{x-5} + \frac{3x+7}{x^2-6x+13}.$$

Ganz allgemein gilt nun folgendes. Sind in $f(x)$ di Koeffizienten reell, so treten die komplexen Wurzeln i $f(x) = 0$ bekanntlich paarweise auf**). Ist z. B. b gleic $g + hi$, so ist eine andere Wurzel, sie heiße c, gleich $g - h$ also

*) Vergl. D.-R., Seite 491, Satz 1.

**) Vergl. D.-R., § 113.

(77.) $$b = g + hi, \quad c = g - hi.$$

Sind nun auch in $\varphi(x)$ die Koeffizienten reell, so wird

(78.) $$\begin{cases} B = \dfrac{\varphi(b)}{f'(b)} = \dfrac{\varphi(g+hi)}{f'(g+hi)} = G + Hi, \\ C = \dfrac{\varphi(c)}{f'(c)} = \dfrac{\varphi(g-hi)}{f'(g-hi)} = G - Hi, \end{cases}$$

folglich erhält man

(79.) $$\frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} = \frac{G+Hi}{x-g-hi} + \frac{G-Hi}{x-g+hi} = \frac{2G(x-g)-2Hh}{(x-g)^2+h^2},$$

oder

(80.) $$\frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} = \frac{Px+Q}{(x-g)^2+h^2},$$

wo

(81.) $$P = 2G, \quad Q = -2Gg - 2Hh$$

reelle Größen sind.

Durch Anwendung der Gleichung (80.) kann man also bei der Partialbruch-Zerlegung die komplexen Größen ganz vermeiden.

In Aufgabe 6 hätte man z. B. setzen können

(82.) $$\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{A}{x-5} + \frac{Px+Q}{x^2 - 6x + 13}.$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit
$$x^3 - 11x^2 + 43x - 65 = (x-5)(x^2 - 6x + 13),$$
so erhält man

(83.) $$\begin{aligned} 13x^2 - 68x + 95 &= A(x^2 - 6x + 13) + P(x^2 - 5x) + Q(x-5) \\ &= x^2(A+P) + x(-6A - 5P + Q) + (13A - 5Q). \end{aligned}$$

Daraus folgen die Gleichungen

(84.) $$\begin{cases} A + P = +13, \\ -6A - 5P + Q = -68, \\ 13A - 5Q = +95. \end{cases}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergibt sich

(85.) $$A = 10, \quad P = 3, \quad Q = 7,$$

und wenn man diese Werte in Gleichung (82.) einsetzt,

$$\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{10}{x - 5} + \frac{3x + 7}{x^2 - 6x + 13}.$$

Dieses Resultat stimmt natürlich mit dem früheren überein.

Noch einfacher gestaltet sich die Rechnung durch die folgenden Überlegungen. Aus Gleichung (83.), nämlich aus der Gleichung

$$13x^2 - 68x + 95 = A(x^2 - 6x + 13) + P(x^2 - 5x) + Q(x - 5)$$

ergibt sich für $x = 5$

$$80 = 8A, \quad \text{oder} \quad A = 10,$$

und für

(86.) $$x^2 - 6x + 13 = 0, \quad \text{oder} \quad x^2 = 6x - 13$$

(87.) $$10x - 74 = (P + Q)x - 13P - 5Q.$$

Da Gleichung (86.) für *zwei* Werte von x befriedigt wird, nämlich für

$$x = 3 + 2i \quad \text{und} \quad x = 3 - 2i,$$

so wird auch Gleichung (87.) für diese beiden Werte von x befriedigt. Nun ist aber Gleichung (87.) nur vom *ersten* Grade, folglich müssen (nach D.-R., § 111, Satz 5a auf Seite 521) die gleichstelligen Koeffizienten auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich sein, d. h. es wird

(88.) $$P + Q = 10, \quad 13P + 5Q = 74, \quad \text{also} \quad P = 3, \quad Q = 7.$$

Wie sich dieses Verfahren allgemein durchführen läßt, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

Aufgabe 7. Man soll die echt gebrochene rationale Funktion $\dfrac{6x^2 - 25x + 89}{x^3 - 7x^2 + 32x - 60}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Indem man den Nenner

(89.) $$x^3 - 7x^2 + 32x - 60 = 0$$

setzt, erhält man für die Wurzeln dieser Gleichung

(90.) $$a = 3, \quad b = 2 + 4i, \quad c = 2 - 4i.$$

Deshalb ist

(91.) $$x^3 - 7x^2 + 32x - 60 = (x - 3)(x - 2 - 4i)(x - 2 + 4i)$$
$$= (x - 3)(x^2 - 4x + 20),$$

(92.) $$\frac{6x^2 - 25x + 89}{x^3 - 7x^2 + 32x - 60} = \frac{A}{x - 3} + \frac{Px + Q}{x^2 - 4x + 20}.$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit $(x-3)(x^2-4x+20)$, so ergibt sich

(93.) $6x^2-25x+89=A(x^2-4x+20)+P(x^2-3x)+Q(x-3)$.

Daraus folgt für $x=3$

(94.) $$68=17A, \quad \text{oder} \quad A=4,$$

und für

(95.) $$x^2-4x+20=0, \quad \text{oder} \quad x^2=4x-20$$

(96.) $$-x-31=(P+Q)x-20P-3Q.$$

Indem man die gleichstelligen Koeffizienten auf beiden Seiten dieser Gleichung einander gleichsetzt, findet man

(97.) $$P+Q=-1, \quad 20P+3Q=31,$$

(98.) $$P=2, \quad Q=-3;$$

und wenn man diese Werte in Gleichung (82.) einsetzt,

(99.) $$\frac{6x^2-25x+89}{x^3-7x^2+32x-60}=\frac{4}{x-3}+\frac{2x-3}{x^2-4x+20}.$$

Aufgabe 8. Man soll die echt gebrochene rationale Funktion $\frac{7x^3-6x^2+9x+108}{(x^2-4x+13)(x^2+2x+5)}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Indem man den Nenner

(100.) $$f(x)=(x^2-4x+13)(x^2+2x+5)=0$$

setzt, erhält man die vier komplexen Wurzeln

(101.) $a=2+3i, \quad b=2-3i, \quad c=-1+2i, \quad d=-1-2i,$

deshalb wird man den vorgelegten Bruch auf die Form

(102.) $$\frac{7x^3-6x^2+9x+108}{(x^2-4x+13)(x^2+2x+5)}=\frac{Px+Q}{x^2-4x+13}+\frac{Rx+S}{x^2+2x+5}$$

bringen. Hieraus erhält man durch Fortschaffung der Nenner

(103.) $$7x^3-6x^2+9x+108=(Px+Q)(x^2+2x+5) \\ +(Rx+S)(x^2-4x+13).$$

Dies gibt für

$$x^2-4x+13=0, \quad \text{oder} \quad x^2=4x-13, \quad x^3=3x-52$$

(104.) $$6x-178=P(16x-78)+Q(6x-8).$$

Da die gleichstelligen Koeffizienten auf beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich sein müssen, so gelten die Gleichungen

(105.) $$8P + 3Q = 3, \quad 39P + 4Q = 89,$$

folglich wird

(106.) $$P = 3, \quad Q = -7.$$

Setzt man in Gleichung (103.)

$$x^2 + 2x + 5 = 0, \text{ oder } x^2 = -2x - 5, \; x^3 = -x + 10,$$

so findet man in ähnlicher Weise die Gleichungen

(107.) $$14x + 208 = R(20x + 30) + S(-6x + 8),$$

(108.) $$10R - 3S = 7, \quad 15R + 4S = 104,$$

(109.) $$R = 4, \quad S = 11,$$

und wenn man diese Werte in die Gleichung (102.) einsetzt,

(110.) $$\frac{7x^3 - 6x^2 + 9x + 108}{(x^2 - 4x + 13)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{3x - 7}{x^2 - 4x + 13} + \frac{4x + 11}{x^2 + 2x + 5}.$$

In ähnlicher Weise findet man

Aufgabe 9.

$$\frac{2x^2 - 10x + 14}{(x - 4)(x - 3)(x - 2)} = \frac{3}{x - 4} - \frac{2}{x - 3} + \frac{1}{x - 2}.$$

Aufgabe 10.

$$\frac{-22x + 12}{(x^2 - 4)(x - 4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{12}{x - 2} + \frac{7}{x + 2} - \frac{19}{x - 4}\right).$$

Aufgabe 11.

$$\frac{12x^2 + 36x - 18}{x^3 - 9x} = \frac{2}{x} + \frac{11}{x - 3} - \frac{1}{x + 3}.$$

Aufgabe 12.

$$\frac{8x^2 - 16x + 3}{(x - 1)(x^2 - 4x + 2)} = \frac{5}{x - 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{13 + 3\sqrt{2}}{x - 2 - \sqrt{2}} - \frac{13 - 3\sqrt{2}}{x - 2 + \sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{5}{x - 1} + \frac{3x + 7}{x^2 - 4x + 2}.$$

Aufgabe 13.

$$\frac{7x^2 - 10x + 37}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)} = \frac{3}{x + 1} + \frac{2 - i}{x - 2 - 3i} + \frac{2 + i}{x - 2 + 3i}$$

$$= \frac{3}{x + 1} + \frac{4x - 2}{x^2 - 4x + 13}.$$

Aufgabe 14.

$$\frac{5x^3 - 12x^2 - 9x + 30}{(x^2+4x+5)(x^2-6x+13)} = \frac{3x+5}{x^2+4x+5} + \frac{2x-7}{x^2-6x+13}.$$

§ 36.

Zerlegung der echt gebrochenen rationalen Funktionen in Partialbrüche, wenn die Gleichung $f(x) = 0$ auch gleiche Wurzeln besitzt.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 145.)

Hat die Gleichung $f(x) = 0$ auch *gleiche* Wurzeln, so kann man diese gleichen Wurzeln zusammenfassen und $f(x)$ auf die Form

$$(1.)\quad f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-k)^\varkappa (x-l)^\lambda$$

bringen, wobei die Größen $a, b, c, \ldots k, l$ sämtlich voneinander verschieden sind, und

$$(2.)\qquad \alpha + \beta + \gamma + \cdots + \varkappa + \lambda = n$$

ist. Auch möge vorausgesetzt werden, daß $\varphi(x)$ keinen Teiler mit $f(x)$ gemein habe, daß also $\varphi(x)$ für x gleich $a, b, c, \ldots k$ oder l von Null verschieden sei. Man erkennt sogleich, daß in diesem Falle die Gleichung

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{K}{x-k} + \frac{L}{x-l}$$

nicht mehr bestehen kann, weil der Generalnenner auf der rechten Seite nicht mehr gleich $f(x)$ ist.

Hier sei

$$(3.)\quad f_1(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} = (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-k)^\varkappa (x-l)^\lambda$$

und

$$(4.)\qquad A_1 = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)},$$

dann wird die ganze rationale Funktion

$$(5.)\qquad \varphi(x) - A_1 f_1(x) = \frac{\varphi(x) f_1(a) - \varphi(a) f_1(x)}{f_1(a)}$$

gleich 0 für $x = a$, folglich ist sie teilbar durch $x - a$ Man erhält also

$$\varphi(x) - A_1 f_1(x) = (x-a)\varphi_1(x), \tag{6.}$$

oder

$$\varphi(x) = A_1 f_1(x) + (x-a)\varphi_1(x). \tag{6a.}$$

Da die ganze rationale Funktion $\varphi(x) - A_1 f_1(x)$ höchstens vom Grade $n-1$ ist, so kann $\varphi_1(x)$ höchstens eine ganze rationale Funktion vom Grade $n-2$ sein.

Nach diesen Angaben wird also

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1 f_1(x) + (x-a)\varphi_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}. \tag{7.}$$

Man hat also von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ ein Glied $\frac{A_1}{(x-a)^\alpha}$ abgesondert, so daß nur noch eine echt gebrochene Funktion $\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}$ übrig bleibt, bei welcher der Grad des Nenners nicht mehr n, sondern nur noch $n-1$ ist.

Ist $\alpha > 1$, so kann man dieses Verfahren wiederholen und erhält ebenso

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)}, \tag{8.}$$

also

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)}, \tag{9.}$$

wo jetzt in der echt gebrochenen Funktion $\frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)}$ der Grad des Nenners wieder um 1 kleiner ist.

Wendet man dieses Verfahren α-mal an, so ergibt sich

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}. \tag{10.}$$

In dieser Weise kann man fortfahren und findet schließlich die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = {} & \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a} \\ & + \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{L_1}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_\lambda}{x-l}. \end{aligned} \tag{11.}$$

Die Zähler $A_1, A_2, \ldots A_\alpha, B_1, B_2, \ldots B_\beta, \ldots L_1, L_2, \ldots L_\lambda$ dieser Partialbrüche berechnet man, indem man beide Seiten der Gleichung (11.) mit dem Generalnenner

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-k)^\varkappa (x-l)^\lambda$$

multipliziert, nach Potenzen von x ordnet und die gleichstelligen Koeffizienten auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich setzt. Dies gibt dann, wie man leicht bestätigen kann, n lineare Gleichungen mit den n Unbekannten

$$A_1, A_2, \ldots A_\alpha, B_1, B_2, \ldots B_\beta, \ldots L_1, L_2, \ldots L_\lambda,$$

und zwar sind diese Gleichungen immer lösbar.

Aus dem Umstande, daß diese n linearen Gleichungen mit n Unbekannten nur *eine* Lösung besitzen, kann man wieder schließen, daß auch in diesem Falle die Partialbruch-Zerlegung nur auf *eine* Weise geschehen kann, d. h. daß man dasselbe Resultat erhält, gleichviel ob man zuerst die Partialbrüche

$$\frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a}$$

absondert, oder ob man mit der Absonderung der Partialbrüche in einer späteren Zeile von Gleichung (11.) anfängt.

Die Rechnung wird ziemlich umständlich, wenn n eine große Zahl ist; dann kommt man schneller zum Ziele, indem man, der Gleichung (4.) entsprechend, zunächst

$$A_1 = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)}$$

berechnet und das gleiche Verfahren auf die Ermittelung von $B_1, C_1, \ldots K_1, L_1$ anwendet. Dies geschieht am einfachsten, indem man in Gleichung (11.) durch Multiplikation mit

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-k)^\varkappa (x-l)^\lambda$$

die Nenner fortschafft und dann der Reihe nach

$$x = a, \quad x = b, \quad x = c, \ldots x = k, \quad x = l$$

setzt. Die Berechnung der übrigen Zähler der Partialbrüche geschieht dann nach dem zuerst beschriebenen Verfahren, ist aber viel leichter geworden, weil man nur noch $n - m$

lineare Gleichungen mit $n - m$ Unbekannten hat, wobei m die Anzahl der voneinander verschiedenen Wurzeln $a, b, c, \ldots k, l$ der Gleichung $f(x) = 0$ ist.

Einige Beispiele mögen zur Erläuterung dieser Angaben dienen.

Aufgabe 1. Man soll die gebrochene rationale Funktion $\frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7)(x-5)^3}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. In diesem Falle muß man

$$(12.)\quad \frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7)(x-5)^3} = \frac{A}{x-7} + \frac{B_1}{(x-5)^3} + \frac{B_2}{(x-5)^2} + \frac{B_3}{x-5}$$

setzen. Dies gibt, wenn man beide Seiten der Gleichung mit $(x-7)(x-5)^3$ multipliziert,

$$(13.)\quad 4x^3 - 63x^2 + 338x - 619 = A(x-5)^3 + B_1(x-7) + B_2(x-7)(x-5) + B_3(x-7)(x-5)^2,$$

oder

$$(14.)\quad 4x^3 - 63x^2 + 338x - 619 = x^3(A + B_3) + x^2(-15A + B_2 - 17B_3) + x(75A + B_1 - 12B_2 + 95B_3) + (-125A - 7B_1 + 35B_2 - 175B_3).$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$(15.)\quad \begin{cases} A + B_3 = 4, \\ -15A + B_2 - 17B_3 = -63, \\ 75A + B_1 - 12B_2 + 95B_3 = 338, \\ -125A - 7B_1 + 35B_2 - 175B_3 = -619. \end{cases}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergibt sich

$$(16.)\quad A = 4, \quad B_1 = 2, \quad B_2 = -3, \quad B_3 = 0,$$

so daß man erhält

$$(17.)\quad \frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7)(x-5)^3} = \frac{4}{x-7} + \frac{2}{(x-5)^3} - \frac{3}{(x-5)^2}.$$

Wendet man das andere Verfahren an, indem man in Gleichung (13.) zuerst $x = 7$ setzt, so findet man

(18.) $$32 = 8A, \quad \text{oder} \quad A = 4;$$

und für $x = 5$ findet man aus Gleichung (13.)

(19.) $$-4 = -2B_1, \quad \text{oder} \quad B_1 = 2.$$

Zur Ermittelung von B_2 und B_3 braucht man jetzt nur noch *zwei* Gleichungen. Deshalb wählt man von den *vier* Gleichungen (15.), welche zur Verfügung stehen, diejenigen aus, welche sich am leichtesten herleiten lassen; d. h. man braucht jetzt garnicht mehr die Gleichung (14.) vollständig zu bilden, sondern berechnet von der rechten Seite dieser Gleichung nur den Koeffizienten von x^3 und das konstante Glied. Daraus ergeben sich in Übereinstimmung mit den Gleichungen (15.) die Gleichungen

(20.) $$A + B_3 = 4,$$

(21.) $$-125A - 7B_1 + 35B_2 - 175B_3 = -619,$$

die sich aber mit Hülfe der Gleichungen (18.) und (19.) auf

(20a.) $$B_3 = 0,$$

(21a.) $$35B_2 - 175B_3 = -105, \quad \text{oder} \quad B_2 = -3$$

reduzieren. Auf diese Weise wird man wieder zu dem in Gleichung (17.) angegebenen Resultate geführt.

Aufgabe 2. Man soll den Bruch $\dfrac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Hier muß man

(22.) $$\frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{x+1}$$

setzen und erhält durch Multiplikation mit

$$(x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2$$

(23.) $$3x^3 + 10x^2 - x = A_1(x + 1)^2 + A_2(x + 1)^2(x - 1) + B_1(x - 1)^2 + B_2(x + 1)(x - 1)^2.$$

Hieraus ergibt sich für $x = 1$

(24.) $$12 = 4A_1, \quad \text{oder} \quad A_1 = 3,$$

und für $x = -1$

(25.) $$8 = 4B_1, \quad \text{oder} \quad B_1 = 2.$$

Zur Ermittelung von A_2 und B_2 suche man auf der rechten Seite von Gleichung (23.) den Koeffizienten von x^3

und das konstante Glied auf und setze die gefundenen Größen den gleichstelligen Koeffizienten auf der linken Seite gleich. Dadurch erhält man die beiden Gleichungen

(26.) $$A_2 + B_2 = 3,$$

(27.) $$A_1 - A_2 + B_1 + B_2 = 0,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (24.) und (25.)

(27a.) $$-A_2 + B_2 = -5,$$

also

(28.) $$A_2 = 4, \quad B_2 = -1,$$

so daß Gleichung (22.) übergeht in

(29.) $$\frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}.$$

In ähnlicher Weise findet man

Aufgabe 3.

$$\frac{x^4 - x^3 - 16x^2 + 38x - 25}{(x-1)^2(x-2)^3}$$
$$= \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{5}{(x-2)^3} + \frac{4}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2}.$$

Dieses Verfahren gilt auch hier noch, wenn die Wurzeln $a, b, c, \ldots k, l$ sämtlich oder teilweise komplex sind. Man kann aber, wenn in $f(x)$ und $\varphi(x)$ die Koeffizienten sämtlich reell sind, das Resultat gleichfalls auf eine reelle Form bringen. Ist z. B. b gleich $g + hi$, so wird eine andere Wurzel, sie heiße c, gleich $g - hi$, und es wird β gleich γ sein, wie in der Algebra bewiesen wird (vergl. D.-R., § 113). Nun folgt aber aus der Bildung der Größen $B_1, B_2, \ldots B_\beta$ und $C_1, C_2, \ldots C_\gamma$, daß man die letzteren durch Vertauschung von $+i$ mit $-i$ aus den ersteren erhält. Ist also

(30.) $$B_1 = G_1 + H_1 i, \; B_2 = G_2 + H_2 i, \ldots B_\beta = G_\beta + H_\beta i,$$

so wird

(31.) $$C_1 = G_1 - H_1 i, \; C_2 = G_2 - H_2 i, \ldots C_\gamma = C_\beta = G_\beta - H_\beta i.$$

Deshalb werden die Summen

$$(32.)\quad \begin{cases} \dfrac{B_1}{(x-b)^\beta} + \dfrac{C_1}{(x-c)^\beta}, \\ \dfrac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \dfrac{C_2}{(x-c)^{\beta-1}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{B_\beta}{x-b} + \dfrac{C_\beta}{x-c} \end{cases}$$

sämtlich reell.

Man kann auch hier in der Zwischenrechnung die komplexen Größen ganz vermeiden. Wenn man nämlich die Ausdrücke (32.) auf gleichen Nenner bringt und addiert, so erhält man $\dfrac{F(x)}{[(x-g)^2+h^2]^\beta}$, wo der Nenner vom Grade 2β, der Zähler aber höchstens vom Grade $2\beta - 1$ ist; denn die Summe von echt gebrochenen rationalen Funktionen ist stets wieder eine echt gebrochene rationale Funktion. (Vergl. Satz 2 in § 34.) Jetzt findet man durch Division

$$(33.)\quad F(x) = [(x-g)^2 + h^2]F_1(x) + P_1 x + Q_1,$$

also

$$(34.)\quad \frac{F(x)}{[(x-g)^2+h^2]^\beta} = \frac{P_1x+Q_1}{[(x-g)^2+h^2]^\beta} + \frac{F_1(x)}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-1}}.$$

Ebenso findet man durch Division

$$(35.)\quad \frac{F_1(x)}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-1}} = \frac{P_2x+Q_2}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-1}} + \frac{F_2(x)}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-2}}.$$

In derselben Weise kann man fortfahren und erhält schließlich

$$(36.)\quad \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b} + \frac{C_1}{(x-c)^\beta} + \frac{C_2}{(x-c)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{C_\beta}{x-c}$$
$$= \frac{P_1x+Q_1}{[(x-g)^2+h^2]^\beta} + \frac{P_2x+Q_2}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-1}} + \cdots + \frac{P_\beta x+Q_\beta}{(x-g)^2+h^2}.$$

Die Berechnung der Größen P_1, Q_1, P_2, $Q_2, \dots P_\beta$, Q_β erfolgt jetzt wieder wie früher, indem man den Ausdruck, welcher sich für $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ durch Partialbruch-Zerlegung ergibt, vorläufig aber noch die unbestimmten Größen P_1, Q_1, P_2,

$Q_2, \ldots P_\beta$, Q_β usw., enthält, mit $f(x)$ multipliziert, nach Potenzen von x ordnet und die einzelnen Koeffizienten den gleichstelligen Koeffizienten von $\varphi(x)$ gleichsetzt. Dadurch erhält man n lineare Gleichungen mit n Unbekannten, deren Auflösung nach diesen Unbekannten immer möglich ist.

Man kann aber auch hier die Rechnung wesentlich abkürzen, indem man

$$(x-g)^2 + h^2 = 0, \quad \text{oder} \quad x^2 = 2gx - g^2 - h^2$$

setzt. Dadurch kann man die eben beschriebene Gleichung auf den ersten Grad bringen und durch Gleichsetzung der gleichstelligen Koeffizienten die beiden darin verbliebenen Unbekannten P_1 und Q_1 berechnen.

Am besten wird dieses Verfahren durch Beispiele erläutert.

Aufgabe 4. Man soll die echt gebrochene rationale Funktion $\dfrac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Nach dem Gesagten muß man hier

$$(37.)\quad \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+1)^2} + \frac{P_2x+Q_2}{x^2+1}$$

setzen. Wenn man beide Seiten dieser Gleichung mit $(x-1)$ mal $(x^2+1)^2$ multipliziert, erhält man

$$(38.)\quad 2x+2 = A(x^2+1)^2 + (P_1x+Q_1)(x-1) + (P_2x+Q_2)(x-1)(x^2+1),$$

oder, wenn man die rechte Seite dieser Gleichung nach fallenden Potenzen von x ordnet,

$$(39.)\quad 2x+2 = x^4(A+P_2) + x^3(-P_2+Q_2) + x^2(2A+P_1+P_2-Q_2) \\ + x(-P_1+Q_1-P_2+Q_2) + (A-Q_1-Q_2).$$

Durch Gleichsetzung der gleichstelligen Koeffizienten ergibt sich hieraus

$$(40.)\quad \left\{\begin{aligned} A + P_2 &= 0, \\ -P_2 + Q_2 &= 0, \\ 2A + P_1 + P_2 - Q_2 &= 0, \\ -P_1 + Q_1 - P_2 + Q_2 &= 2, \\ A - Q_1 - Q_2 &= 2. \end{aligned}\right.$$

Löst man diese Gleichungen auf, so findet man

(41.) $A = 1,\quad P_1 = -2,\quad Q_1 = 0,\quad P_2 = -1,\quad Q_2 = -1,$

also

(42.) $$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} - \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Die Rechnung wird wesentlich abgekürzt, wenn man in Gleichung (38.) zunächst $x = 1$ setzt. Dadurch erhält man

(43.) $$4 = 4A, \quad\text{oder}\quad A = 1.$$

Für $x^2 = -1$ geht sodann Gleichung (38.) über in

(44.) $$2x + 2 = (P_1 x + Q_1)(x-1) = (-P_1 + Q_1)x - P_1 - Q_1,$$

und daraus folgt

(45.) $$-P_1 + Q_1 = 2,\quad -P_1 - Q_1 = 2,$$

(46.) $$P_1 = -2,\qquad Q_1 = 0.$$

Um noch die beiden Größen P_2 und Q_2 zu finden, braucht man auf der rechten Seite von Gleichung (38.) nur diejenigen beiden Koeffizienten zu berechnen, welche sich am leichtesten ermitteln lassen, nämlich die Koeffizienten von x^4 und x^0. Wenn man diese Größen den gleichstelligen Koeffizienten auf der linken Seite von Gleichung (38.) gleichsetzt, erhält man

(47.) $$A + P_2 = 0,\quad A - Q_1 - Q_2 = 2,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (43.) und (46.)

(48.) $$P_2 = -1,\quad Q_2 = -1.$$

Daraus ergibt sich wieder Gleichung (42.).

Aufgabe 5. Man soll die echt gebrochene rationale Funktion $\frac{3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 12x - 8}{(x-2)^2(x^2+2x+2)^2}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Hier ist zu setzen

(49.) $$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-2)^2} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{P_2 x + Q_2}{x^2+2x+2},$$

folglich wird

(50.) $$\begin{aligned}\varphi(x) &= 3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 12x - 8\\ &= A_1(x^2+2x+2)^2 + A_2(x-2)(x^2+2x+2)^2\\ &\quad + (P_1x+Q_1)(x-2)^2 + (P_2x+Q_2)(x-2)^2(x^2+2x+2).\end{aligned}$$

Dies gibt für $x = 2$

(51.) $$100 = 100 A_1, \quad \text{oder} \quad A_1 = 1$$

und für $x^2 + 2x + 2 = 0$, oder $x^2 = -2x - 2$

$$10x + 30 = (P_1 x + Q_1)(-6x + 2) = (14 P_1 - 6 Q_1)x + (12 P_1 + 2 Q_1);$$

also

(52.) $$7 P_1 - 3 Q_1 = 5, \quad 6 P_1 + Q_1 = 15,$$

(53.) $$P_1 = 2, \quad Q_1 = 3.$$

Setzt man jetzt noch die Koeffizienten von x^5, x^4 und x^0 auf beiden Seiten von Gleichung (50.) einander gleich, so erhält man

$$A_2 + P_2 = 3. \quad A_1 + 2A_2 - 2P_2 + Q_2 = 2,$$
$$4A_1 - 8A_2 + 4Q_1 + 8Q_2 = -8,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (51.) und (53.)

(54.) $$A_2 + P_2 = 3, \quad 2A_2 - 2P_2 + Q_2 = 1, \quad A_2 - Q_2 = 3,$$

also

(55.) $$A_2 = 2, \quad P_2 = 1, \quad Q_2 = -1.$$

Indem man diese Werte in die Gleichung (49.) einsetzt, erhält man

(56.) $$\frac{3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 12x - 8}{(x - 2)^2 (x^2 + 2x + 2)^2} =$$
$$\frac{1}{(x - 2)^2} + \frac{2}{x - 2} + \frac{2x + 3}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{x - 1}{x^2 + 2x + 2}.$$

In ähnlicher Weise findet man

Aufgabe 6.

$$\frac{2x^5 - 3x^4 + 16x^3 - 5x^2 + 9x + 19}{(x - 3)^2 (x^2 + x + 1)^2} =$$
$$\frac{4}{(x - 3)^2} + \frac{1}{x - 3} + \frac{2x + 3}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}.$$

Weitere Übungs-Aufgaben kann sich der Anfänger sehr leicht selbst stellen, indem er beliebig gewählte Partialbrüche auf den gemeinsamen Generalnenner bringt und dadurch die Funktion $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ bildet.

Bei der Zerlegung von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ in Partialbrüche ist vorausgesetzt, daß man die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ ermittelt hat.

§ 37.

Integration der Funktionen $\frac{A}{x-a}dx$ und $\frac{A}{(x-a)^n}dx$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 27, 29, 29a, 87, 88, 90, 92 und 146.)

Die Zerlegung in Partialbrüche macht es möglich, jede gebrochene rationale Funktion zu integrieren, denn man kann sie nach den Ausführungen der vorhergehenden Paragraphen stets (nötigenfalls nach Absonderung einer ganzen rationalen Funktion) in eine Summe verwandeln, deren einzelne Glieder entweder die Form $\frac{A}{x-a}$ oder $\frac{A}{(x-a)^n}$ haben. Diese Ausdrücke kann man aber sehr leicht integrieren.

Setzt man nämlich

(1.) $$x - a = t, \quad \text{also} \quad dx = dt,$$

so wird nach Formel Nr. 12 der Tabelle

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dt}{t} = A\ln t,$$

oder in Übereinstimmung mit Formel Nr. 27 der Tabelle

(2.) $$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln(x-a).$$

Ferner wird, wenn n von 1 verschieden ist, nach Formel Nr. 9 der Tabelle, indem man $m = -n$ setzt,

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{dt}{t^n} = A\int t^{-n}dt = A\frac{t^{-n+1}}{-n+1},$$

oder

(3.) $$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}.$$

Für $n = 2$ ergibt sich hieraus Formel Nr. 90 der Tabelle, nämlich

(3a.) $$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + b^2} = \int \frac{dx}{(x+b)^2} = -\frac{1}{x+b}.$$

Wendet man dies auf die in § 35 und 36 behandel
Beispiele an, so findet man ohne weiteres die Lösung
folgenden Aufgaben.

Aufgabe 1. $$\int \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} dx = ?$$

Auflösung. Nach Aufgabe 1 in § 35 ist

$$\frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} = \frac{3}{x-7} + \frac{5}{x+3} + \frac{7}{x-2},$$

folglich wird

$$\int \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} dx = \int \frac{3}{x-7} dx + \int \frac{5}{x+3} dx + \int \frac{7}{x-2} dx$$
$$= 3\ln(x-7) + 5\ln(x+3) + 7\ln(x$$
$$= \ln[(x-7)^3(x+3)^5(x-2)^7].$$

Aufgabe 2. $$\int \frac{x^2+1}{x^3-x} dx = ?$$

Auflösung. Nach Aufgabe 2 in § 35 ist

$$\frac{x^2+1}{x^3-x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1},$$

folglich wird

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x} dx = -\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx$$
$$= -\ln x + \ln(x-1) + \ln(x+1)$$
$$= \ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right).$$

Aufgabe 3. $$\int \frac{4x^2 - 15x + 19}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx = ?$$

Auflösung. Nach Aufgabe 3 in § 35 ist

$$\frac{4x^2 - 15x + 19}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{4}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3},$$

folglich wird

$$\int \frac{4x^2 - 15x + 19}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx = 4\int \frac{dx}{x-1} - 5\int \frac{dx}{x-2} + 5\int \frac{dx}{x-}$$
$$= 4\ln(x-1) - 5\ln(x-2) + 5\ln(x-$$

Aufgabe 4. $\int \frac{dx}{1+x-x^2} = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 4 in § 35 ist

$$\frac{1}{1+x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{2x-1+\sqrt{5}} - \frac{2}{2x-1-\sqrt{5}}\right),$$

folglich wird

$$\int \frac{dx}{1+x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\int \frac{2dx}{2x-1+\sqrt{5}} - \int \frac{2dx}{2x-1-\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}[\ln(2x-1+\sqrt{5}) - \ln(2x-1-\sqrt{5})]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left(\frac{2x-1+\sqrt{5}}{2x-1-\sqrt{5}}\right).$$

Aufgabe 5. $\int \frac{2x^3-7x^2-6x+8}{x^2-6x+7} dx = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 5 in § 35 ist

$$\frac{2x^3-7x^2-6x+8}{x^2-6x+7} = 2x+5+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{3+10\sqrt{2}}{x-3-\sqrt{2}} + \frac{3+10\sqrt{2}}{x-3+\sqrt{2}}\right),$$

folglich wird

$$\int \frac{2x^3-7x^2-6x+8}{x^2-6x+7} dx = 2\int x dx + 5\int dx$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int \frac{(3+10\sqrt{2})dx}{x-3-\sqrt{2}} + \int \frac{(-3+10\sqrt{2})dx}{x-3+\sqrt{2}}\right]$$

$$= x^2+5x+\frac{1}{2\sqrt{2}}[(3+10\sqrt{2})\ln(x-3-\sqrt{2})$$

$$+ (-3+10\sqrt{2})\ln(x-3+\sqrt{2})]$$

$$= x^2+5x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[3\ln\left(\frac{x-3-\sqrt{2}}{x-3+\sqrt{2}}\right) + 10\sqrt{2}\ln(x^2-6x+7)\right]$$

$$= x^2+5x+\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-3-\sqrt{2}}{x-3+\sqrt{2}}\right) + 5\ln(x^2-6x+7).$$

Aufgabe 6. $\int \frac{(13x^2-68x+95)dx}{(x-5)(x^2-6x+13)} = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 6 in § 35 ist

$$\frac{13x^2-68x+95}{(x-5)(x^2-6x+13)}=\frac{10}{x-5}+\frac{3-8i}{2(x-3-2i)}+\frac{3+8i}{2(x-3+2i)},$$

folglich wird

$$\int\frac{(13x^2-68+95)dx}{(x-5)(x^2-6x+13)}=10\int\frac{dx}{x-5}+\frac{3-8i}{2}\int\frac{dx}{x-3-2i}$$
$$+\frac{3+8i}{2}\int\frac{dx}{x-3+2i}$$
$$=10\ln(x-5)+\frac{3-8i}{2}\ln(x-3-2i)$$
$$+\frac{3+8i}{2}\ln(x-3+2i).$$

Dieses Resultat befriedigt deshalb nicht, weil es komplexe Größen enthält, obgleich man es, wie später gezeigt werden soll, auf eine reelle Form bringen kann.

Aufgabe 7. $\int\frac{2x^2-10x+14}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx=?$

Auflösung. Nach Aufgabe 9 in § 35 ist

$$\frac{2x^2-10x+14}{(x-4)(x-3)(x-2)}=\frac{3}{x-4}-\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x-2},$$

folglich wird

$$\int\frac{(2x^2-10x+14)dx}{(x-4)(x-3)(x-2)}=3\ln(x-4)-2\ln(x-3)+\ln(x-2).$$

Aufgabe 8. $\int\frac{-22x+12}{(x^2-4)(x-4)}dx=?$

Auflösung. Nach Aufgabe 10 in § 35 ist

$$\frac{-22x+12}{(x^2-4)(x-4)}=\frac{1}{3}\left(\frac{12}{x-2}+\frac{7}{x+2}-\frac{19}{x-4}\right),$$

folglich wird

$$\int\frac{(-22x+12)dx}{(x^2-4)(x-4)}=\tfrac{1}{3}[12\ln(x-2)+7\ln(x+2)-19\ln(x-4)].$$

Aufgabe 9. $\int\frac{12x^2+36x-18}{x^3-9x}dx=?$

Auflösung. Nach Aufgabe 11 in § 35 ist

$$\frac{12x^2+36x-18}{x^3-9x}=\frac{2}{x}+\frac{11}{x-3}-\frac{1}{x+3},$$

folglich wird

$$\int\frac{(12x^2+36x-18)dx}{x^3-9x}=2\ln x+11\ln(x-3)-\ln(x+3).$$

Aufgabe 10. $\displaystyle\int\frac{8x^2-16x+3}{(x-1)(x^2-4x+2)}dx=?$

Auflösung. Nach Aufgabe 12 in § 35 ist

$$\frac{8x^2-16x+3}{(x-1)(x^2-4x+2)}=\frac{5}{x-1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{13+3\sqrt{2}}{x-2-\sqrt{2}}-\frac{13-3\sqrt{2}}{x-2+\sqrt{2}}\right),$$

folglich wird

$$\int\frac{(8x^2-16x+3)dx}{(x-1)(x^2-4x+2)}$$

$$=5\ln(x-1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[(13+3\sqrt{2})\ln(x-2-\sqrt{2})$$

$$-(13-3\sqrt{2})\ln(x-2+\sqrt{2})\Big]$$

$$=5\ln(x-1)+\frac{13}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-2-\sqrt{2}}{x-2+\sqrt{2}}\right)+\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+2).$$

Aufgabe 11. $\displaystyle\int\frac{4x^3-63x^2+338x-619}{(x-7)(x-5)^3}dx=?$

Auflösung. Nach Aufgabe 1 in § 36 ist

$$\frac{4x^3-63x^2+338x-619}{(x-7)(x-5)^3}=\frac{4}{x-7}+\frac{2}{(x-5)^3}-\frac{3}{(x-5)^2},$$

folglich wird

$$\int\frac{4x^3-63x^2+338x-619}{(x-7)(x-5)^3}dx=4\int\frac{dx}{x-7}+2\int\frac{dx}{(x-5)^3}$$

$$-3\int\frac{dx}{(x-5)^2}$$

$$=4\ln(x-7)-\frac{1}{(x-5)^2}+\frac{3}{x-5}$$

$$=4\ln(x-7)+\frac{3x-16}{(x-5)^2}.$$

Aufgabe 12. $\displaystyle\int\frac{3x^3+10x^2-x}{(x^2-1)^2}dx=?$

Auflösung. Nach Aufgabe 2 in § 36 ist

$$\frac{3x^3+10x^2-x}{(x^2-1)^2}=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{4}{x-1}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1},$$

folglich wird

$$\int\frac{3x^3+10x^2-x}{(x^2-1)^2}dx = 3\int\frac{dx}{(x-1)^2}+4\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x+1)}$$
$$-\int\frac{dx}{x+1}$$
$$=\frac{-3}{x-1}+4\ln(x-1)-\frac{2}{x+1}-\ln(x-$$
$$=\ln\left(\frac{(x-1)^4}{x+1}\right)-\frac{5x+1}{x^2-1}.$$

Aufgabe 13. $\int\frac{x^4-x^3-16x^2+38x-25}{(x-1)^2(x-2)^3}dx = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 3 in § 36 ist

$$\frac{x^4-x^3-16x^2+38x-25}{(x-1)^2(x-2)^3}$$
$$=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}-\frac{5}{(x-2)^3}+\frac{4}{(x-2)^2}-\frac{1}{x-}$$

folglich wird

$$\int\frac{(x^4-x^3-16x^2+38x-25)dx}{(x-1)^2(x-2)^3}$$
$$=-\frac{3}{x-1}+2\ln(x-1)+\frac{5}{2(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}-\ln(x-$$

Die einfachsten Fälle der Partialbruch-Zerlegung s schon im ersten Teile (§ 13) berücksichtigt worden. ergibt sich z. B. Formel Nr. 29a der Tabelle, nämlich

(4.) $$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)=-\frac{1}{a}\mathfrak{Ar}\mathfrak{Ctg}\left(\frac{x}{a}\right),$$

ohne weiteres durch Partialbruch-Zerlegung.

In gleicher Weise ergab sich auch Formel Nr. 88 Tabelle, nämlich

(5.) $$\int\frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{x_1-x_2}\ln\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right)$$

durch Partialbruch-Zerlegung.

Daraus findet man dann auch Formel Nr. 87 Tabelle, denn bezeichnet man die Wurzeln der Gleich

(6.) $$x^2+2bx+c=0$$

mit x_1 und x_2, so wird

$$\text{(7.)} \quad \begin{cases} x_1 = -b + \sqrt{b^2 - c}, \quad x_2 = -b - \sqrt{b^2 - c}, \\ x_1 - x_2 = 2\sqrt{b^2 - c}, \end{cases}$$

$$\text{(8.)} \quad (x - x_1)(x - x_2) = x^2 + 2bx + c,$$

so daß Gleichung (5.) übergeht in

$$\text{(9.)} \quad \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - c}} \ln\left(\frac{x + b - \sqrt{b^2 - c}}{x + b + \sqrt{b^2 - c}}\right).$$

Ebenso erhielt man auch Formel Nr. 92 der Tabelle, nämlich

$$\text{(10.)} \quad \int \frac{(Px + Q)dx}{(x - x_1)(x - x_2)} =$$

$$\frac{1}{x_1 - x_2} [(Px_1 + Q)\ln(x - x_1) - (Px_2 + Q)\ln(x - x_2)]$$

durch Partialbruch-Zerlegung.

§ 38.

Integration der Funktionen $\frac{dx}{(x-g)^2 + h^2}$ und $\frac{dx}{[(x-g)^2 + h^2]^n}$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 89, 147 bis 150.)

Nach Formel Nr. 28 der Tabelle war

$$\text{(1.)} \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Auf den Zusammenhang dieser Formel mit Nr. 29 und 29a der Tabelle, nämlich mit

$$\text{(2.)} \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \mathfrak{ArTg}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a - x}{a + x}\right)$$

oder

$$\text{(2a.)} \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \mathfrak{ArCtg}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x - a}{x + a}\right),$$

ist bereits auf Seite 65 hingewiesen worden.

Aus Formel Nr. 28 der Tabelle ergibt sich Formel Nr. 89, nämlich

$$\text{(3.)} \quad \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{1}{\sqrt{c - b^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x + b}{\sqrt{c - b^2}}\right),$$

indem man das Integral auf die Form

$$\int \frac{d(x+b)}{(x+b)^2+c-b^2}$$

bringt und $c-b^2$ gleich a^2 setzt. Dieses Integral geht in

(4.) $$\int \frac{dx}{(x-g)^2+h^2} = \int \frac{d(x-g)}{(x-g)^2+h^2} = \frac{1}{h}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-g}{h}\right)$$

über, wenn man

(5.) $$b = -g, \quad c - b^2 = h^2$$

setzt. Noch unmittelbarer erhält man dieses Resultat durch die Substitution

(6.) $$x - g = ht, \quad dx = hdt,$$

dann wird nämlich in Übereinstimmung mit Gleichung (4.)

(7.) $$\int \frac{dx}{(x-g)^2+h^2} = \int \frac{hdt}{h^2(t^2+1)} = \frac{1}{h}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{h}\operatorname{arctg} t$$
$$= \frac{1}{h}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-g}{h}\right).$$

Dieselbe Substitution kann man anwenden, um $\int \frac{dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}$ zu berechnen für den Fall, wo $n > 1$ ist: dann erhält man nämlich

(8.) $$\int \frac{dx}{[(x-g)^2+h^2]^n} = \int \frac{hdt}{h^{2n}(1+t^2)^n} = \frac{1}{h^{2n-1}}\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

Nun ist

(9.) $$\frac{1}{(1+t^2)^n} = \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^n},$$

folglich wird

(10.) $$\int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2dt}{(1+t^2)^n}.$$

Setzt man jetzt in Formel Nr. 98 der Tabelle, nämlich in

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

$$u = \frac{t}{2}, \quad dv = \frac{2tdt}{(1+t^2)^n} = \frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^n},$$

also

$$du = \tfrac{1}{2}dt, \quad v = \frac{-1}{(n-1)(1+t^2)^{n-1}},$$

so erhält man

$$(11.)\quad \int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^n} = -\frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}},$$

und wenn man diese Gleichung von Gleichung (10.) subtrahiert,

$$(12.)\quad \int\frac{dt}{(1+t^2)^n} = +\frac{t}{(2n-2)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}.$$

Durch diese Formel ist das gesuchte Integral auf ein einfacheres zurückgeführt. Durch wiederholte Anwendung der Formel kommt man schließlich auf

$$\int\frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t.$$

Beispiel für $n = 3$.

$$\int\frac{dt}{(1+t^2)^3} = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3}{4}\int\frac{dt}{(1+t^2)^2},$$

$$\int\frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t,$$

also

$$\int\frac{dt}{(1+t^2)^3} = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3t}{8(1+t^2)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} t$$

$$= \frac{t(3t^2+5)}{8(t^2+1)^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} t.$$

Man kann das gesuchte Integral auch auf Formel Nr. 102 der Tabelle zurückführen, indem man

$$(13.)\quad t = \operatorname{tg} z,\quad \text{also}\quad z = \operatorname{arctg} t,\quad dz = \frac{dt}{1+t^2},$$

$$(14.)\quad 1 + t^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 z = \frac{1}{\cos^2 z},\quad \frac{1}{1+t^2} = \cos^2 z,$$

$$\frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} = \cos^{2n-2} z$$

setzt, dann wird mit Rücksicht auf Formel Nr. 102 der Tabelle, wenn man $2n$ mit $2n-2$ vertauscht,

$$(15.)\quad \int\frac{dt}{(1+t^2)^n}=\int\cos^{2n-2}z\,dz$$
$$=\sin z\left[\frac{1}{2n-2}\cos^{2n-3}z+\frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)}\cos^{2n-5}z\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots5.3}{(2n-2)(2n-4)\ldots6.4.2}\cos z\right]+\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots5.3.1}{(2n-2)(2n-4)\ldots6.4.2}z.$$

Dabei ist

$$(16.)\quad \cos z=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad \sin z=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad \sin z\cos z=\frac{t}{1+t^2}.$$

Für $n=3$ erhält man z. B. wieder

$$\int\frac{dt}{(1+t^2)^3}=\sin z\left(\frac{1}{4}\cos^3 z+\frac{3}{4.2}\cos z\right)+\frac{3.1}{4.2}z$$
$$=\frac{t}{1+t^2}\left(\frac{1}{4(1+t^2)}+\frac{3}{8}\right)+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}t.$$

§ 39.

Integration der Funktionen $\frac{(Px+Q)dx}{(x-g)^2+h^2}$ und $\frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 151 und 152.)

Setzt man in Formel Nr. 91 der Tabelle, nämlich in

$$\int\frac{(Px+Q)dx}{x^2+2bx+c}=\frac{P}{2}\ln(x^2+2bx+c)+(Q-Pb)\int\frac{dx}{x^2+2bx+c},$$

$$(1.)\qquad b=-g,\quad c-b^2=h^2,$$

so geht sie über in

$$(2.)\quad \int\frac{(Px+Q)dx}{(x-g)^2+h^2}=\frac{P}{2}\ln[(x-g)^2+h^2]+(Pg+Q)\int\frac{dx}{(x-g)^2+h^2};$$

dies gibt nach Formel Nr. 147 der Tabelle

$$(3.)\quad \int\frac{(Px+Q)dx}{(x-g)^2+h^2}=\frac{P}{2}\ln[(x-g)^2+h^2]+\frac{Pg+Q}{h}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-g}{h}\right).$$

In ähnlicher Weise kann man $\int\frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}$ auffinden, wenn $n>1$ vorausgesetzt wird. Es ist nämlich

$$(4.)\quad \int\frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}=\int\frac{P(x-g)+Pg+Q}{[(x-g)^2+h^2]^n}dx$$
$$=\frac{P}{2}\int\frac{2(x-g)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}+(Pg+Q)\int\frac{dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}.$$

Setzt man jetzt

$$(5.)\quad (x-g)^2+h^2=y,\quad \text{also}\quad 2(x-g)dx=dy,$$

und

$$(6.)\quad x-g=ht,\quad \text{also}\quad dx=hdt,$$

so geht Gleichung (4.) über in

$$\int\frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}=\frac{P}{2}\int\frac{dy}{y^n}+\frac{Pg+Q}{h^{2n-1}}\int\frac{dt}{(1+t^2)^n};$$

dies gibt

$$(7.)\quad \int\frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}=-\frac{P}{(2n-2)[(x-g)^2+h^2]^{n-1}}$$
$$+\frac{Pg+Q}{h^{2n-1}}\int\frac{dt}{(1+t^2)^n},$$

wobei das Integral auf der rechten Seite nach Formel Nr. 149 oder 150 der Tabelle berechnet werden kann.

§ 40.

Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. $\int\frac{(13x^2-68x+95)dx}{(x-5)(x^2-6x+13)}=?$

Auflösung. Nach Aufgabe 6 in § 35 ist

$$(1.)\quad \frac{13x^2-68x+95}{(x-5)(x^2-6x+13)}=\frac{10}{x-5}+\frac{3x+7}{x^2-6x+13}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 27 der Tabelle

$$(2.)\quad \int\frac{10dx}{x-5}=10\ln(x-5)$$

und nach Formel Nr. 151 der Tabelle

$$(3.)\quad \int\frac{(3x+7)dx}{x^2-6x+13}=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-6)dx}{x^2-6x+13}+16\int\frac{dx}{(x-3)^2+2^2}$$
$$=\frac{3}{2}\ln(x^2-6x+13)+8\operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right),$$

folglich wird

$$(4.)\quad \int\frac{(13x^2-68x+95)dx}{(x-5)(x^2-6x+13)} = 10\ln(x-5)+\frac{3}{2}\ln(x^2-6x\ldots$$
$$+\,8\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right).$$

Aufgabe 2. $\int\frac{(6x^2-25x+89)dx}{(x-3)(x^2-4x+20)} = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 7 in § 35 ist

$$(5.)\quad \frac{6x^2-25x+89}{(x-3)(x^2-4x+20)} = \frac{4}{x-3}+\frac{2x-3}{x^2-4x+20}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 27 der Tabelle

$$(6.)\quad \int\frac{4dx}{x-3} = 4\ln(x-3)$$

und nach Formel Nr. 151 der Tabelle

$$(7.)\quad \int\frac{(2x-3)dx}{x^2-4x+20} = \int\frac{(2x-4)dx}{x^2-4x+20}+\int\frac{dx}{(x-2)^2+4^2}$$
$$= \ln(x^2-4x+20)+\frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x-\ldots}{4}\right.$$

folglich wird

$$(8.)\quad \int\frac{(6x^2-25x+89)dx}{(x-3)(x^2-4x+20)} = 4\ln(x-3)+\ln(x^2-4x+2\ldots$$
$$+\,\frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x-2}{4}\right).$$

Aufgabe 3. $\int\frac{7x^2-10x+37}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 13 in § 35 ist

$$(9.)\quad \frac{7x^2-10x+37}{(x+1)(x^2-4x+13)} = \frac{3}{x+1}+\frac{4x-2}{x^2-4x+13}$$
$$= \frac{3}{x+1}+2\,\frac{2x-4}{x^2-4x+13}+\frac{6}{(x-2)^2\ldots}$$

folglich wird

$$(10.)\quad \int\frac{(7x^2-10x+37)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$$
$$= 3\ln(x+1)+2\ln(x^2-4x+13)+2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x\ldots}{\ldots}\right.$$

Aufgabe 4. $\int\frac{7x^3-6x^2+9x+108}{(x^2-4x+13)(x+2x+5)}dx = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 8 in § 35 ist

$$\frac{7x^3-6x^2+9x+108}{(x^2-4x+13)(x^2+2x+5)}=\frac{3x-7}{x^2-4x+13}+\frac{4x+11}{x^2+2x+5} \tag{11.}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+13}-\frac{1}{(x-2)^2+3^2}$$

$$+2\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+\frac{7}{(x+1)^2+2^2},$$

folglich wird

$$\int\frac{(7x^3-6x^2+9x+108)dx}{(x^2-4x+13)(x^2+2x+5)}= \tag{12.}$$

$$\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+13)-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right)$$

$$+2\ln(x^2+2x+5)+\frac{7}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Aufgabe 5. $\int\frac{5x^3-12x^2-9x+30}{(x^2+4x+5)(x^2-6x+13)}dx = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 14 in § 35 ist

$$\frac{5x^3-12x^2-9x+30}{(x^2+4x+5)(x^2-6x+13)}=\frac{3x+5}{x^2+4x+5}+\frac{2x-7}{x^2-6x+13} \tag{13.}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{2x+4}{x^2+4x+5}-\frac{1}{(x+2)^2+1}$$

$$+\frac{2x-6}{x^2-6x+13}-\frac{1}{(x-3)^2+2^2},$$

folglich wird

$$\int\frac{(5x^3-12x^2-9x+30)dx}{(x^2+4x+5)(x^2-6x+13)} \tag{14.}$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5)-\operatorname{arctg}(x+2)$$

$$+\ln(x^2-6x+13)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right).$$

Aufgabe 6. $\int\frac{(2x+2)dx}{(x-1)(x^2+1)^2} = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 4 in § 36 ist

$$(15.)\quad \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} - \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 27 der Tabelle

$$(16.)\quad \int\frac{dx}{x-1} = \ln(x-1),$$

nach Formel Nr. 152 der Tabelle ist

$$(17.)\quad \int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x^2+1}$$

und nach Formel Nr. 151 der Tabelle ist

$$(18.)\quad \int\frac{(x+1)dx}{x^2+1} = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x.$$

Dieses letzte Resultat hätte man auch mit Hilfe der Formeln Nr. 30 und 18 der Tabelle finden können. Aus den Gleichungen (15.) bis (18.) ergibt sich daher

$$(19.)\quad \int\frac{(2x+2)dx}{(x-1)(x^2+1)^2} = \ln(x-1) + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\right) + \frac{1}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x.$$

Aufgabe 7. $\int\frac{(3x^5+2x^4+6x^3-11x^2-12x-8)dx}{(x-2)^2(x^2+2x+2)^2} = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 5 in § 36 ist

$$(20.)\quad \frac{3x^5+2x^4+6x^3-11x^2-12x-8}{(x-2)^2(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2}$$

$$+ \frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

Nun ist nach den Formeln Nr. 146, 27, 151 und 152 der Tabelle

$$(21.)\quad \int\frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2},\quad \int\frac{2dx}{x-2} = 2\ln(x-2),$$

$$(22.)\quad \int\frac{(x-1)dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+2} - 2\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2\operatorname{arctg}(x+1),$$

$$(23.)\quad \int\frac{(2x+3)dx}{(x^2+2x+2)^2}=\int\frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+2)^2}+\int\frac{dx}{[(x+1)^2+1]^2}$$
$$=-\frac{1}{x^2+2x+2}+\int\frac{dt}{(1+t^2)^2},$$

wobei $x+1$ gleich t gesetzt ist. Dies gibt nach Formel Nr. 149 der Tabelle

$$(24.)\quad \int\frac{dt}{(1+t^2)^2}=\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}$$
$$=\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t$$
$$=\frac{x+1}{2(x^2+2x+2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1),$$

folglich wird

$$(25.)\quad \int\frac{(3x^5+2x^4+6x^3-11x^2-12x-8)dx}{(x-2)^2(x^2+2x+2)^2}=$$
$$-\frac{1}{x-2}+2\ln(x-2)+\frac{x-1}{2(x^2+2x+2)}$$
$$+\tfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-\tfrac{3}{2}\operatorname{arctg}(x+1).$$

Aufgabe 8. $\int\frac{(x+3)dx}{(x^2+x+1)^2}=?$

Auflösung. Da in diesem Falle

$$(26.)\quad x^2+x+1=(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}$$

ist, so erhält man nach Formel Nr. 152 der Tabelle, indem man

$$(27.)\quad P=1,\quad Q=3,\quad g=-\tfrac{1}{2},\quad h=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\quad n=2$$

setzt,

$$(28.)\quad \int\frac{(x+3)dx}{(x^2+x+1)^2}=-\frac{1}{2(x^2+x+1)}+\frac{20}{3\sqrt{3}}\int\frac{dt}{(1+t^2)^2},$$

wobei

$$(29.)\quad 2x+1=t\sqrt{3}$$

gesetzt ist. Dies gibt nach Formel Nr. 149 der Tabelle

$$(30.)\quad \int\frac{dt}{(1+t^2)^2}=\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t$$
$$=\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{8(x^2+x+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right),$$

also

$$(31.)\quad \int\frac{(x+3)dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{5x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Aufgabe 9. $\displaystyle\int\frac{2x^5-3x^4+16x^3-5x^2+9x+19}{(x-3)^2(x^2+x+1)^2}dx=?$

Auflösung. Nach Aufgabe 6 in § 36 ist

$$(32.)\quad \frac{2x^5-3x^4+16x^3-5x^2+9x+19}{(x-3)^2(x^2+x+1)^2}$$

$$=\frac{4}{(x-3)^2}+\frac{1}{x-3}+\frac{2x+3}{(x^2+x+1)^2}+\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{4}{(x-3)^2}+\frac{1}{x-3}+\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{2}{[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2}$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{3}{2}\,\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.$$

Setzt man wieder

$$g=-\frac{1}{2},\quad h=\frac{1}{2}\sqrt{3},\quad 2x+1=t\sqrt{3},\quad x^2+x+1=y,$$

so wird

$$(33.)\quad 3(1+t^2)=4(x^2+x+1),$$

$$(34.)\quad \int\frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)^2}=\int\frac{dy}{y^2}=-\frac{1}{y}=-\frac{1}{x^2+x+1},$$

und ähnlich wie die Gleichung (30.)

$$(35.)\quad \int\frac{2dx}{[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2}=\int\frac{16\sqrt{3}\,.\,dt}{9(1+t^2)^2}=\frac{8}{3\sqrt{3}}\left(\frac{t}{1+t^2}+\operatorname{arctg}t\right)$$

$$=\frac{4x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$(36.)\quad \int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}=\ln(x^2+x+1).$$

$$(37.)\quad \int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{4dx}{(2x+1)^2+3}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{3}\right).$$

Deshalb wird

(38.) $$\int\frac{(2x^5-3x^4+16x^3-5x^2+9x+19)dx}{(x-3)^2(x^2+x+1)^2}$$

$$= -\frac{4}{x-3}+\ln(x-3)-\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$+\frac{4x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$$

$$-\frac{3}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=-\frac{4}{x-3}+\frac{4x-1}{3(x^2+x+1)}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$+\ln(x-3)+\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1).$$

Aufgabe 10. $\int\frac{(5x^2-8x-4)dx}{x^3+1}=?$

Auflösung. Hier ist

(39.) $$\frac{5x^2-8x-4}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Px+Q}{x^2-x+1},$$

oder, wenn man beide Seiten der Gleichung mit

$$(x+1)(x^2-x+1)$$

multipliziert,

$$5x^2-8x-4=A(x^2-x+1)+(Px+Q)(x+1).$$

Dies gibt für $x=-1$

$$9=3A,\quad \text{oder}\quad A=3$$

und für $x^2-x+1=0$, oder $x^2=x-1$,

$$-3x-9=(2P+Q)x+(-P+Q),$$

also

(40.) $$2P+Q=-3,\quad -P+Q=-9,$$

(41.) $$P=2,\quad Q=-7,$$

(42.) $$\frac{5x^2-8x-4}{x^3+1}=\frac{3}{x+1}+\frac{2x-7}{x^2-x+1}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 27 der Tabelle

(43.) $$3\int\frac{dx}{x+1}=3\ln(x+1)$$

und nach Formel Nr. 151 der Tabelle

$$(44.)\quad \int\frac{(2x-7)dx}{x^2-x+1}=\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}-6\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\ln(x^2-x+1)-4\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{2x-}{\sqrt{3}}$$

folglich findet man

$$(45.)\quad \int\frac{(5x^2-8x-4)dx}{x^3+1}$$

$$=3\ln(x+1)+\ln(x^2-x+1)-4\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{2x-}{\sqrt{\vdots}}$$

Dem Anfänger wird die Prüfung der vorstehenden lösungen durch Differentiation empfohlen.

In manchen Fällen, wo die Integration durch Pa bruch-Zerlegung sehr umständlich oder infolge von braischen Schwierigkeiten garnicht durchführbar sein w gelingt die Integration durch zweckmäßige Umformu und Substitutionen, wie durch einige Beispiele zur Er rung gezeigt werden möge.

Aufgabe 11. $\int\frac{dx}{x(x^3+1)}=?$

Auflösung. Setzt man in diesem Falle

$$(46.)\quad x=\frac{1}{t},\quad \text{also}\quad dx=-\frac{dt}{t^2};$$

so wird

$$(47.)\quad \int\frac{dx}{x(x^3+1)}=-\int\frac{t^2dt}{t^3+1}=-\frac{1}{3}\ln(t^3+1),$$

oder

$$(48.)\quad \int\frac{dx}{x(x^3+1)}=-\frac{1}{3}\ln\Big(\frac{1}{x^3}+1\Big)=-\frac{1}{3}\ln\Big(\frac{x^3+1}{x^3}\Big)$$

$$=\frac{1}{3}\ln\Big(\frac{x^3}{x^3+1}\Big)=\ln\Big(\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}\Big).$$

Man kann dieses Resultat auch in folgender W finden. Es ist

$$\frac{1}{x(x^3+1)}=\frac{(x^3+1)-x^3}{x(x^3+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x^2}{x^3+1},$$

also

$$\int\frac{dx}{x(x^3+1)}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x^2dx}{x^3+1}$$
$$=\ln x-\tfrac{1}{3}\ln(x^3+1)=\ln\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}\right).$$

Aufgabe 12. $\int\frac{dx}{x(x^4+1)}=?$

Auflösung. Setzt man in diesem Falle wieder

(49.) $$x=\frac{1}{t},\quad \text{also}\quad dx=-\frac{dt}{t^2},$$

so wird

(50.) $$\int\frac{dx}{x(x^4+1)}=-\int\frac{t^3dt}{t^4+1}=-\tfrac{1}{4}\ln(t^4+1),$$

oder

(51.) $$\int\frac{dx}{x(x^4+1)}=-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{x^4}+1\right)=-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^4+1}{x^4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^4}{x^4+1}\right)=\ln\left(\frac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}\right).$$

Auch hier findet man dasselbe Resultat aus der Gleichung

$$\frac{1}{x(x^4+1)}=\frac{(x^4+1)-x^4}{x(x^4+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x^3}{x^4+1},$$

aus der dann unmittelbar folgt

$$\int\frac{dx}{x(x^4+1)}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x^3dx}{x^4+1}=\ln x-\tfrac{1}{4}\ln(x^4+1)=\ln\left(\frac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}\right).$$

Bezeichnet man (in Übereinstimmung mit § 118 der Differential-Rechnung) den größten gemeinsamen Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$ mit $\vartheta(x)$, setzt man also

(52.) $$\vartheta(x)=(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}(x-c)^{\gamma-1}\ldots(x-l)^{\lambda-1}$$

und

(53.) $$\varphi(x)=\frac{f(x)}{\vartheta(x)}=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l),$$

so kann man die Partialbruch-Zerlegung auch in folgender Weise ausführen*).

*) Der Anfänger darf diese Auseinandersetzung übergehen.

Es sei n wieder der Grad von $f(x)$, und m sei der Grad von $\varrho(x)$, also die Anzahl der voneinander verschiedenen Wurzeln $a, b, c, \ldots l$ der Gleichung $f(x) = 0$. Die echt gebrochene rationale Funktion $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ konnte dann nach Gleichung (11.) in § 36 auf die Form

$$(54.)\quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a}$$
$$+ \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{L_1}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_\lambda}{x-l}$$

gebracht werden. Bei der Integration liefern nur die Partialbrüche

$$\frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{B_\beta}{x-b} + \cdots + \frac{L_\lambda}{x-l}$$

die logarithmischen Glieder

$$A_\alpha \ln(x-a) + B_\beta \ln(x-b) + \cdots + L_\lambda \ln(x-l);$$

die übrigen Partialbrüche ergeben bei der Integration echt gebrochene rationale Funktionen, deren Summe wieder eine echt gebrochene rationale Funktion mit dem Generalnenner $\vartheta(x)$ ist. Man findet daher

$$(55.)\quad \int \frac{\varphi(x)dx}{f(x)} = \frac{\psi(x)}{\vartheta(x)} + A_\alpha \ln(x-a) + B_\beta \ln(x-b) + \cdots$$
$$+ L_\lambda \ln(x-l),$$

wobei der Grad von $\vartheta(x)$ gleich $n-m$, und der von

$$(56.)\quad \psi(x) = c_1 x^{n-m-1} + c_2 x^{n-m-2} + \cdots + c_{n-m-1}x + c_{n-m}$$

höchstens $n-m-1$ ist. Auch die Summe

$$(57.)\quad \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{B_\beta}{x-b} + \cdots + \frac{L_\lambda}{x-l} = \frac{\sigma(x)}{\varrho(x)}$$

ist eine echt gebrochene rationale Funktion, bei welcher der Grad von $\varrho(x)$ gleich m, und der Grad von

$$(58.)\quad \sigma(x) = k_1 x^{m-1} + k_2 x^{m-2} + \cdots + k_{m-1}x + k_m$$

höchstens $m-1$ ist. Jetzt erhält man aus Gleichung (55.)

$$(59.)\qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\vartheta(x)\,.\,\psi'(x) - \psi(x)\,.\,\vartheta'(x)}{\vartheta(x)^2} + \frac{\sigma(x)}{\varrho(x)},$$

wobei man noch auf der rechten Seite dieser Gleichung Zähler und Nenner des ersten Gliedes durch den größten gemeinsamen Teiler $\tau(x)$ von $\vartheta(x)$ und $\vartheta'(x)$ dividieren kann. Setzt man dabei

$$(60.)\qquad \vartheta(x) = \tau(x)\,.\,\vartheta_1(x), \quad \vartheta'(x) = \tau(x)\,.\,\vartheta_2(x),$$

so geht Gleichung (59.) über in

$$(59\text{a.})\qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\vartheta_1(x)\,.\,\psi'(x) - \psi(x)\,.\,\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)\,.\,\vartheta_1(x)} + \frac{\sigma(x)}{\varrho(x)},$$

wobei $\vartheta_1(x)$ ein Teiler von $\varrho(x)$ und deshalb $\vartheta(x)\,.\,\vartheta_1(x)$ ein Teiler von $f(x)$ ist. Schafft man noch in Gleichung (59a.) die Nenner fort, indem man beide Seiten der Gleichung mit $f(x) = \vartheta(x)\,.\,\varrho(x)$ multipliziert, so müssen die gleichstelligen Koeffizienten auf beiden Seiten der neuen Gleichung einander gleich sein. Dadurch erhält man n lineare Gleichungen mit den n Unbekannten

$$c_1,\ c_2, \ldots c_{n-m};\ k_1,\ k_2, \ldots k_m,$$

die sich immer auflösen lassen.

Man kann also die Gleichung (59a.) und deshalb auch

$$(61.)\qquad \int \frac{\vartheta_1(x)\,.\,\psi'(x) - \psi(x)\,.\,\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)\,.\,\vartheta_1(x)}\,dx = \frac{\psi(x)}{\vartheta(x)}$$

vollständig bilden, und zwar ist dieses Verfahren auch dann noch durchführbar, wenn man die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ nicht kennt. Dagegen ist zur Berechnung von $\int \frac{\sigma(x)}{\varrho(x)}\,dx$ in endlicher geschlossener Form die Kenntnis der Wurzeln $a, b, \ldots l$ erforderlich.

XI. Abschnitt.

Integration der irrationalen Funktionen.

§ 41.

Allgemeine Bemerkungen.

Im ersten Teile der Integral-Rechnung sind bereits irrationale Differential-Funktionen in größerer Anzahl integriert und in die Formel-Tabelle aufgenommen worden. (Man vergleiche Nr. 17, 23, 24, 31 bis 42, 84 bis 86a, 119 bis 131a der Formel-Tabelle.)

Dabei wurden in den Formeln Nr. 84 bis 86a die Irrationalitäten

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{a^2 + x^2}, \quad \sqrt{x^2 - a^2}$$

bezw. mit Hilfe der Substitutionen

$$x = a \sin t, \quad \text{oder} \quad x = a \mathfrak{Tg}\, t,$$

$$x = a \operatorname{tg} t, \quad ,, \quad x = a \mathfrak{Sin}\, t,$$

$$x = \frac{a}{\cos t}, \quad ,, \quad x = a \mathfrak{Cos}\, t$$

weggeschafft. Dadurch erhielt man unter dem Integralzeichen rationale Funktionen der trigonometrischen Funktionen

$$\sin t, \quad \cos t, \quad \operatorname{tg} t, \quad \operatorname{ctg} t,$$

bezw. der hyperbolischen Funktionen

$$\mathfrak{Sin}\, t, \quad \mathfrak{Cos}\, t, \quad \mathfrak{Tg}\, t, \quad \mathfrak{Ctg}\, t.$$

Setzt man dann noch

$$\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) = z, \quad \text{bezw.} \quad \mathfrak{Tg}\left(\frac{t}{2}\right) = z,$$

so erhält man unter dem Integralzeichen eine rationale Funktion von z.

In Betreff der übrigen irrationalen Differential-Funktionen ist zu bemerken, daß es verhältnismäßig nur wenige Fälle gibt, bei denen sich die Integration durch Anwendung algebraischer Funktionen oder der bisher bekannten transzendenten Funktionen ausführen läßt. In den meisten Fällen werden durch die Integrale algebraischer Differential-Funktionen *neue* (d. h. bisher noch unbekannte) transzendente Funktionen erklärt.

Hier mögen zunächst solche *irrationale* Differential-Funktionen in Betracht gezogen werden, welche sich durch eine Substitution auf Funktionen zurückführen lassen, deren Integral bereits bekannt ist, oder in *rationale* Differential-Funktionen umgewandelt werden können, und zwar sollen nur die einfacheren Fälle berücksichtigt werden.

§ 42.

Integration rationaler Funktionen der Argumente

$$x,\ \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m}{n}},\ \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p}{q}},\ \ldots\,.$$

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 153 und 154.)

Kommen in der Funktion unter dem Integralzeichen keine anderen Irrationalitäten vor als Wurzeln aus x selbst, so läßt sich die Differential-Funktion durch die Substitution

$$(1.)\qquad x = t^{\varkappa}$$

sehr leicht *rational* machen, wenn man den Exponenten $\varkappa$ so wählt, daß $\varkappa$ durch alle auftretenden Wurzel-Exponenten teilbar ist.

Wie dies gemeint ist, möge zunächst ein Beispiel zeigen.

Aufgabe 1. $\displaystyle\int\frac{(\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x})dx}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})} = ?$

Auflösung. Das kleinste gemeinsame Vielfache der Wurzel-Exponenten 2, 3, 4 und 6 ist 12, folglich muß man

$$(2.)\qquad x = t^{12},\quad \text{oder}\quad \sqrt[12]{x} = t$$

setzen und erhält

(3.) $\sqrt[4]{x^3} = t^9, \quad \sqrt[3]{x^2} = t^8, \quad \sqrt{x} = t^6, \quad \sqrt[3]{x} = t^4, \quad \sqrt[6]{x} = t^2.$

Dies gibt

(4.) $$\int\frac{(\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x})dx}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})} = 12\int\frac{(t^9 - 7t^8 + 12t^6)t^{11}dt}{t^{12}(t^4 - t^2)}$$
$$= 12\int\frac{(t^6 - 7t^5 + 12t^3)dt}{t^2 - 1}.$$

Nun ist

(5.) $t^6 - 7t^5 + 12t^3 = (t^2 - 1)(t^4 - 7t^3 + t^2 + 5t + 1) + 5t + 1,$

also

(6.) $$\frac{t^6 - 7t^5 + 12t^3}{t^2 - 1} = t^4 - 7t^3 + t^2 + 5t + 1 + \frac{5t + 1}{t^2 - 1}$$
$$= t^4 - 7t^3 + t^2 + 5t + 1 + \frac{3}{t - 1} + \frac{2}{t + 1},$$

folglich ist

(7.) $$\int\frac{(\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x})dx}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})} = 12\Big[\frac{t^5}{5} - \frac{7t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} + t$$
$$+ 3\ln(t - 1) + 2\ln(t + 1)\Big],$$

wobei nach Gleichung (2.)

$$t = \sqrt[12]{x}$$

ist.

Daraus erkennt man schon, daß die oben angegebene Regel ganz allgemein anwendbar ist: denn bezeichnet man mit $\varkappa$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen n, q, ..., die in den Exponenten von x als Nenner auftreten, und setzt man in Übereinstimmung mit Gleichung (1.)

(1a.) $x = t^\varkappa, \quad$ also $\quad t = \sqrt[\varkappa]{x}, \quad dx = \varkappa t^{\varkappa - 1}dt,$

so erhält man

(8.) $$\int f(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots)dx = \int f(t^\varkappa, t^{\frac{\varkappa m}{n}}, t^{\frac{\varkappa p}{q}}, \ldots)\varkappa t^{\varkappa - 1}dt,$$

wobei die Exponenten $\frac{\varkappa m}{n}, \frac{\varkappa p}{q}, \ldots$ sämtlich ganze Zahlen werden.

Auf diesen Fall kann man den allgemeineren zurückführen, wo unter dem Integralzeichen eine rationale Funktion der Argumente

$$x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots$$

steht. Setzt man nämlich

(9.) $$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = y,$$

so wird

(10.) $$x = -\frac{\delta y - \beta}{\gamma y - \alpha}, \quad dx = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)dy}{(\gamma y - \alpha)^2},$$

so daß man erhält

(11.) $$\int f\left[x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots\right]dx =$$

$$\int f\left(-\frac{\delta y - \beta}{\gamma y - \alpha}, y^{\frac{m}{n}}, y^{\frac{p}{q}}, \ldots\right) \cdot \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)dy}{(\gamma y - \alpha)^2}.$$

Ist jetzt $\varkappa$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Wurzelexponenten $n, q, \ldots$, so wird die Differential-Funktion *rational* durch die Substitution

(12.) $$y = t^{\varkappa}.$$

§ 43.

Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x} - 1} = ?$

Auflösung. Setzt man hier

(1.) $$\sqrt{x} = t, \quad \text{also} \quad x = t^2, \quad dx = 2tdt,$$

so wird

(2.) $$\int \frac{xdx}{\sqrt{x}-1} = \int \frac{2t^3dt}{t-1} = 2\int\left(t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$= 2\left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln(t-1)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[2x\sqrt{x} + 3x + 6\sqrt{x} + 6\ln(\sqrt{x} - 1)\right].$$

Aufgabe 2. $\int\frac{\sqrt{x}}{x-1}dx = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei d vorhergehenden Aufgabe findet man

(3.) $$\int\frac{\sqrt{x}}{x-1}dx = \int\frac{t\,.\,2tdt}{t^2-1} = 2\int\frac{t^2dt}{t^2-1} = 2\int\frac{(t^2-1+1)dt}{t^2-1},$$

also mit Rücksicht auf Formel Nr. 29a der Tabelle

(4.) $$\int\frac{\sqrt{x}}{x-1}dx = 2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = 2t + \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$$

$$= 2\sqrt{x} + \ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right).$$

Aufgabe 3. $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}dx = ?$

Auflösung. In diesem Falle muß man

(5.) $$\sqrt[3]{x} = t, \quad x = t^3, \quad dx = 3t^2dt$$

setzen und erhält

(6.) $$\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}dx = \int\frac{t\,.\,3t^2dt}{t^3-1} = 3\int\frac{t^3dt}{t^3-1} = 3\int\frac{(t^3-1+1)dt}{t^3-1}$$

$$= 3\int\left(1+\frac{1}{t^3-1}\right)dt = 3t + 3\int\frac{dt}{t^3-1}.$$

Um $3\int\frac{dt}{t^3-1}$ zu ermitteln, wende man Partialbrı Zerlegung an und setze

(7.) $$\frac{3}{t^3-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{Pt+Q}{t^2+t+1};$$

dies gibt durch Fortschaffung der Nenner

(8.) $$3 = A(t^2+t+1) + (Pt+Q)(t-1),$$

also für $t = 1$

(9.) $$3 = 3A, \quad \text{oder} \quad A = 1$$

und für $t^2+t+1 = 0$

(10.) $$3 = (-2P+Q)t + (-P-Q),$$

also

(11.) $$-2P+Q = 0, \quad P+Q = -3, \quad \text{oder} \quad P = -1, \quad Q = -$$

Dadurch erhält man nach Formel Nr. 27 und 151 der Tabelle

$$(12.)\quad 3\int\frac{dt}{t^3-1} = \int\frac{dt}{t-1} - \int\frac{(t+2)dt}{t^2+t+1}$$
$$= \ln(t-1) - \tfrac{1}{2}\ln(t^2+t+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right),$$

lso

$$13.)\quad \int\frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}dx = 3\sqrt[3]{x} + \ln(\sqrt[3]{x}-1) - \tfrac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$$
$$-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Aufgabe 4. $\int x dx\sqrt{a+x} = ?$

Auflösung. Hier ist zu setzen

4.) $\sqrt{a+x} = t$, also $a + x = t^2$, $x = t^2 - a$, $dx = 2tdt$,

nn wird

$$5.)\quad \int x dx\sqrt{a+x} = \int 2(t^2-a)t^2dt$$
$$= 2\int t^4dt - 2a\int t^2dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{2at^3}{3},$$

er

$$6.)\quad \int x dx\sqrt{a+x} = \tfrac{2}{15}t^3(3t^2-5a) = \tfrac{2}{15}(a+x)\sqrt{a+x}(3x-2a).$$

Man hätte auch die Integration in folgender Weise sführen können. Man setze

$$7.)\quad x\sqrt{a+x} = (a+x-a)\sqrt{a+x} = (a+x)^{\frac{3}{2}} - a(a+x)^{\frac{1}{2}},$$

o nach Formel Nr. 9 der Tabelle

$$8.)\quad \int x dx\sqrt{a+x} = \int(a+x)^{\frac{3}{2}}d(a+x) - a\int(a+x)^{\frac{1}{2}}d(a+x)$$
$$= \tfrac{2}{5}(a+x)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{3}a(a+x)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \tfrac{2}{15}(a+x)\sqrt{a+x}(3x-2a).$$

Aufgabe 5. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+a}} = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der vorrgehenden Aufgabe findet man

$$(19.)\qquad \int\frac{dx}{x\sqrt{x+a}}=\int\frac{2tdt}{(t^2-a)t}=2\int\frac{dt}{t^2-a}.$$

Dies gibt nach Formel Nr. 29a der Tabelle

$$(20.)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{x+a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\frac{t-\sqrt{a}}{t+\sqrt{a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a})^2}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\frac{x+2a-2\sqrt{a(a+x)}}{x}\right).$$

Aufgabe 6. $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx=?$

Auflösung. Es sei

$$(21.)\qquad \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=t,\quad \text{also}\quad \frac{a+x}{a-x}=t^2,\quad x=a\frac{t^2-1}{t^2+1},$$

$$(22.)\qquad dx=\frac{4atdt}{(t^2+1)^2},$$

dann wird

$$(23.)\quad \int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx=4a\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^2}=4a\int\frac{(t^2+1-1)dt}{(t^2+1)^2}$$

$$=4a\left[\int\frac{dt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}\right].$$

Nun ist nach Formel Nr. 18 und 149 der Tabelle

$$(24.)\qquad \int\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}t,$$

$$(25.)\quad \int\frac{dt}{(1+t^2)^2}=\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arct}$$

folglich wird

$$(26.)\qquad \int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx=4a\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t-\frac{t}{2(1+t^2)}\right],$$

oder, da

$$1+t^2=1+\frac{a+x}{a-x}=\frac{2a}{a-x},\qquad \frac{t}{1+t^2}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a}$$

ist,

$$(27.)\quad \int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = 2a\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt{a^2-x^2}.$$

Einfacher kann man in diesem Falle die Integration ausführen, indem man

$$(28.)\quad \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \sqrt{\frac{(a+x)^2}{(a-x)(a+x)}} = \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

setzt; dadurch erhält man nach Formel Nr. 34 und 31 der Tabelle

$$(29.)\quad \int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= a\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-x^2}.$$

Dieses Resultat weicht allerdings in der Form von dem in Gleichung (27.) enthaltenen ab; setzt man aber

$$(30.)\quad \mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = z, \quad \text{oder} \quad \mathrm{tg}\,z = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}},$$

so ist

$$\mathrm{tg}^2 z = \frac{a+x}{a-x}, \quad \text{also} \quad x = a\,\frac{\mathrm{tg}^2 z - 1}{\mathrm{tg}^2 z + 1},$$

oder

$$(31.)\quad x = a\,\frac{\sin^2 z - \cos^2 z}{\sin^2 z + \cos^2 z} = -a(\cos^2 z - \sin^2 z) = -a\cos(2z)$$

$$= a\sin\left(2z - \frac{\pi}{2}\right).$$

Deshalb wird

$$(32.)\quad \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) = 2z - \frac{\pi}{2} = 2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \frac{\pi}{2},$$

so daß die beiden in den Gleichungen (27.) und (29.) angegebenen Resultate sich nur durch eine Integrations-Konstante voneinander unterscheiden.

§ 44.

Zurückführung der Differential-Funktionen von der Form $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$ auf Differential-Funktionen von der Form $f(y, \sqrt{y^2-a^2})dy$, $f(y, \sqrt{a^2+y^2})dy$, $f(y, \sqrt{a^2-y^2})dy$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 155 und 156.)

Es sei $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})$ eine rationale Funktion von x und $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$, dann mögen zwei Fälle unterschieden werden.

I. Fall. $A > 0$.

Setzt man

$$(1.)\qquad y = \frac{Ax+B}{\sqrt{A}}, \quad \text{also} \quad y^2 = Ax^2+2Bx+\frac{B^2}{A},$$

so wird

$$(2.)\qquad Ax^2+2Bx+C = y^2 - \frac{B^2-AC}{A}.$$

Hierbei wird $\frac{B^2-AC}{A}$ positiv oder negativ, je nachdem die „*Diskriminante*" B^2-AC positiv oder negativ ist. Um diese beiden Fälle zusammenzufassen, setze man

$$(3.)\qquad \frac{B^2-AC}{A} = \pm a^2;$$

dann wird

$$(4.)\qquad Ax^2+2Bx+C = y^2 \mp a^2,$$

also

$$\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = \sqrt{y^2 \mp a^2}.$$

Aus Gleichung (1.) findet man noch

$$(5.)\qquad x = \frac{y\sqrt{A}-B}{A}, \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{A}},$$

folglich wird

$$(6.)\qquad \int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx = \int F\left(\frac{y\sqrt{A}-B}{A}, \sqrt{y^2\mp a^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{A}}.$$

II. Fall. $A < 0$.

Setzt man

$$(7.)\qquad y = \frac{Ax+B}{\sqrt{-A}}, \quad \text{also} \quad -y^2 = Ax^2+2Bx+\frac{B^2}{A},$$

so wird

(8.) $$Ax^2 + 2Bx + C = \frac{AC - B^2}{A} - y^2.$$

Hierbei wird $\frac{AC - B^2}{A}$ positiv oder negativ, je nachdem die *„Diskriminante"* $B^2 - AC$ positiv oder negativ ist. Um diese beiden Fälle zusammenzufassen, setze man

(9.) $$\frac{AC - B^2}{A} = \frac{B^2 - AC}{-A} = \pm a^2,$$

dann wird

(10.) $$Ax^2 + 2Bx + C = \pm a^2 - y^2,$$

also

$$\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \sqrt{\pm a^2 - y^2}.$$

Aus Gleichung (7.) findet man noch

(11.) $$x = \frac{y\sqrt{-A} - B}{A}, \quad dx = -\frac{dy}{\sqrt{-A}},$$

folglich wird

(12.) $$\int F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})dx =$$
$$-\int F\left(\frac{y\sqrt{-A} - B}{A}, \sqrt{\pm a^2 - y^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{-A}}.$$

Gilt in Gleichung (12.) das untere Zeichen, so wird

(13.) $$\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \sqrt{-a^2 - y^2} = i\sqrt{a^2 + y^2}$$

für alle Werte von x *imaginär*, so daß in diesem Falle $F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})$ eine *komplexe* Größe ist. Deshalb lassen sich auch bei Ermittelung des gesuchten Integrals komplexe Größen nicht vermeiden. Man kann in diesem Falle auch

(14.) $$\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = i\sqrt{-(Ax^2 + 2Bx + C)}$$

setzen und erhält dadurch eine Wurzelgröße, auf welche die im Falle I gemachten Voraussetzungen zutreffen.

§ 45.

Übungs-Aufgaben.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 157 und 158.)

Aufgabe 1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = ?$$

Auflösung. Im Falle I erhält man nach den Formeln Nr. 155, 35 und 36 der Tabelle

$$(1.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\int\frac{dy}{\sqrt{A}\sqrt{y^2\mp a^2}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left(\frac{y+\sqrt{y^2\mp a^2}}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{A}}[\ln(y+\sqrt{y^2\mp a^2})-\ln a],$$

oder, wenn man die Integrations-Konstante $-\frac{\ln a}{\sqrt{A}}$ fortläßt,

$$(1\text{a.})\quad \int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\ln(y+\sqrt{y^2\mp a^2})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left(\frac{Ax+B}{\sqrt{A}}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right).$$

Beispiel 1. $A=4,\ B=2,\ C=-3,\ B^2-AC=16.$

$$(2.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}=\frac{1}{2}\ln(2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}).$$

Beispiel 2. $A=1,\ B=\frac{1}{2},\ C=1,\ B^2-AC=-\frac{3}{4}.$

$$(3.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\ln\left(\frac{2x+1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right).$$

Im Falle II erhält man nach Formel Nr. 156 der Tabelle

$$(4.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=-\int\frac{dy}{\sqrt{-A}\sqrt{\pm a^2-y^2}}.$$

Beschränkt man die Lösung auf den Fall, wo das obere Vorzeichen gilt, so erhält man

$$(4\text{a.})\quad \int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=-\frac{1}{\sqrt{-A}}\int\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\left(\frac{y}{a}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\left(\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}}\right)=\frac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\left(-\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}}\right).$$

Beispiel 3. $A=-1,\ B=a,\ C=0,\ B^2-AC=a^2.$

$$(5.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x-a}{a}\right).$$

Gilt das untere Vorzeichen, so wird die Aufgabe auf Fall I zurückgeführt, indem man

6.) $$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\frac{1}{i}\int\frac{dx}{\sqrt{A_1x^2+2B_1x+C_1}}$$
$$=\frac{1}{i\sqrt{A_1}}\ln\left(\frac{A_1x+B_1}{\sqrt{A_1}}+\sqrt{A_1x^2+2B_1x+C_1}\right)$$

setzt. Dabei ist

7.) $$A_1=-A,\quad B_1=-B,\quad C_1=-C.$$

Aufgabe 2. $\int dx\sqrt{Ax^2+2Bx+C}=?$

Auflösung. Im Falle I, nämlich in dem Falle, wo $A>0$ ist, erhält man nach der Formel Nr. 155 der Tabelle

8.) $$\int dx\sqrt{Ax^2+2Bx+C}=\frac{1}{\sqrt{A}}\int dy\sqrt{y^2\mp a^2},$$

also mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 129 und 129a der Tabelle

9.) $$\int dx\sqrt{Ax^2+2Bx+C}=$$
$$\frac{1}{\sqrt{A}}\left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2\mp a^2}\mp\frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{y+\sqrt{y^2\mp a^2}}{a}\right)\right],$$

also, wenn man die Integrations-Konstante $\frac{\pm a^2\ln a}{2\sqrt{A}}$ fortläßt,

9a.) $$\int dx\sqrt{Ax^2+2Bx+C}=\frac{1}{2\sqrt{A}}\left[\frac{Ax+B}{\sqrt{A}}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right.$$
$$\left.+\frac{AC-B^2}{A}\ln\left(\frac{Ax+B}{\sqrt{A}}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right)\right].$$

Beispiel 1. $A=4,\ B=2,\ C=-3,\ B^2-AC=16.$

10.) $$\int dx\sqrt{4x^2+4x-3}=\tfrac{1}{4}\left[(2x+1)\sqrt{4x^2+4x-3}\right.$$
$$\left.-4\ln(2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3})\right].$$

Beispiel 2. $A=1,\ B=\frac{1}{2},\ C=1,\ B^2-AC=-\frac{3}{4}$

11.) $$\int dx\sqrt{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\left[\frac{2x+1}{2}\sqrt{x^2+x+1}\right.$$
$$\left.+\frac{3}{4}\ln\left(\frac{2x+1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)\right].$$

Im Falle II, nämlich in dem Falle, wo $A < 0$ ist, wird nach Formel Nr. 156 der Tabelle

$$(12.)\quad \int dx\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = -\frac{1}{\sqrt{-A}}\int dy\sqrt{\pm a^2 - y^2}.$$

Beschränkt man die Lösung auf den Fall, wo das obere Vorzeichen gilt, so findet man nach Formel Nr. 123 der Tabelle

$$(13.)\quad \int dx\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = \frac{-1}{\sqrt{-A}}\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2-y^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{y}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-A}}\left[-\frac{Ax+B}{\sqrt{-A}}\sqrt{Ax^2+2Bx+C} + \frac{B^2-AC}{-A}\arcsin\left(-\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}}\right)\right].$$

Beispiel 3. $A = -1,\ B = a,\ C = 0,\ B^2 - AC = a^2.$

$$\int dx\sqrt{2ax - x^2} = \frac{1}{2}\left[(x-a)\sqrt{2ax - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x-a}{a}\right)\right].$$

Diese Beispiele mögen zeigen, wie Integrale von der Form $\int F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})dx$ durch das in § 44 angegebene Verfahren mitunter auf bereits bekannte Integrale zurückgeführt werden können.

§ 46.

Integration der Differential-Funktion $F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})dx$, wenn A positiv ist.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 159 und 160.)

Aufgabe 1. $\int f(y, \sqrt{y^2 + c})dy = ?$

Dabei darf c eine positive oder negative Größe sein.

Auflösung. Wenn das gesuchte Integral mit keinem bisher entwickelten übereinstimmt, so setze man

$$(1.)\quad \sqrt{y^2 + c} = t - y, \quad \text{oder} \quad t = y + \sqrt{y^2 + c},$$

also

$$(2.)\quad y^2 + c = t^2 - 2ty + y^2, \quad \text{oder} \quad y = \frac{t^2 - c}{2t},$$

$$(3.)\qquad \sqrt{y^2+c} = t - \frac{t^2-c}{2t} = \frac{t^2+c}{2t},$$

$$(4.)\qquad dy = \frac{(t^2+c)dt}{2t^2},$$

folglich wird

$$(5.)\qquad \int f(y, \sqrt{y^2+c})dy = \int f\left(\frac{t^2-c}{2t}, \frac{t^2+c}{2t}\right) \cdot \frac{(t^2+c)dt}{2t^2}.$$

Wenn $f(y, \sqrt{y^2+c})$ eine rationale Funktion von y und $\sqrt{y^2+c}$ ist, so hat man es durch die angegebene Substitution erreicht, daß die Funktion unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite von Gleichung (5.) eine *rationale* Funktion der einzigen Veränderlichen t geworden ist. Diese Substitution wurde bereits zur Herleitung der Formeln Nr. 35 und 36 der Tabelle benutzt.

Nach Gleichung (5.) wird nämlich

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+c}} = \int \frac{(t^2+c)dt \,.\, 2t}{2t^2(t^2+c)} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(y + \sqrt{y^2+c}).$$

Aufgabe 2. $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx = ?$

Auflösung. In § 44 wurde gezeigt, wie man das gesuchte Integral in dem Falle, wo $A > 0$ ist, auf ein Integral von der Form $\int f(y, \sqrt{y^2+c})dy$ zurückführen kann, wobei $c = \pm a^2$ ist (vgl. Formel Nr. 155 der Tabelle). Ist diese Umformung erfolgt, so gelangt man durch die in Aufgabe 1 angegebene Substitution zum Ziele. Man kann aber auch die Umwandlung der vorgelegten *irrationalen* Differential-Funktion in eine *rationale* unmittelbar ausführen, indem man

$$(6.)\qquad \sqrt{Ax^2+2Bx+C} = t - x\sqrt{A}$$

setzt. Dadurch erhält man

$$(7.)\qquad Ax^2+2Bx+C = t^2 - 2tx\sqrt{A} + Ax^2,$$

oder

$$2x(t\sqrt{A}+B) = t^2 - C,$$

$$(8.)\qquad x = \frac{t^2-C}{2(t\sqrt{A}+B)},\quad dx = \frac{(t^2\sqrt{A}+2Bt+C\sqrt{A})dt}{2(t\sqrt{A}+B)^2},$$

$$(9.)\qquad \sqrt{Ax^2+2Bx+C} = t - \frac{(t^2-C)\sqrt{A}}{2(t\sqrt{A}+B)} = \frac{t^2\sqrt{A}+2Bt+C\sqrt{A}}{2(t\sqrt{A}+B)}.$$

Dies gibt

$$(10.)\qquad \int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx =$$

$$\int F\left(\frac{t^2-C}{2(t\sqrt{A}+B)}, \frac{t^2\sqrt{A}+2Bt+C\sqrt{A}}{2(t\sqrt{A}+B)}\right)\cdot\frac{(t^2\sqrt{A}+2Bt+C\sqrt{A})dt}{2(t\sqrt{A}+B)^2},$$

wobei nach Gleichung (6.)

$$(11.)\qquad t = x\sqrt{A}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$$

ist. Wenn $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})$ eine rationale Funktion von x und $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ ist, so steht unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite von Gleichung (10.) jetzt nur noch eine *rationale* Funktion von t, welche nach den Regeln des vorhergehenden Abschnittes integriert werden kann.

Man erkennt, daß die Aufgabe 1 nur ein besonderer Fall der Aufgabe 2 ist, welchen man erhält, indem man die Integrations-Veränderliche mit y bezeichnet und

$$A=1,\quad B=0,\quad C=+c$$

setzt.

Übungs-Beispiele.

Aufgabe 3. $\int dy\sqrt{y^2+c} = ?$

Auflösung. Nach Gleichung (5.) erhält man

$$(12.)\qquad \int dy\sqrt{y^2+c} = \int\frac{(t^2+c)dt}{2t^2}\cdot\frac{t^2+c}{2t}$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{(t^2+c)^2dt}{t^3} = \frac{1}{4}\int(t+2ct^{-1}+c^2t^{-3})dt$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}+2c\ln t-\frac{c^2}{2t^2}\right) = \frac{t^4-c^2}{8t^2}+\frac{c}{2}\ln t.$$

Dabei ist

$$y=\frac{t^2-c}{2t},\quad \sqrt{y^2+c}=\frac{t^2+c}{2t},$$

also

$$(13.)\qquad y\sqrt{y^2+c}=\frac{t^4-c^2}{4t^2},$$

folglich erhält man bis auf eine Integrations-Konstante in Übereinstimmung mit den Formeln Nr. 129 und 129a der Tabelle

$$(14.)\quad \int dy\sqrt{y^2+c} = \frac{y}{2}\sqrt{y^2+c} + \frac{c}{2}\ln(y+\sqrt{y^2+c}).$$

Aufgabe 4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = ?$

Auflösung. In diesem Falle ist

$$A = 1,\quad \sqrt{A} = 1,\quad B = 1,\quad C = 2,$$

also

$$(15.)\quad \begin{cases} t = x + \sqrt{x^2+2x+2}, & x = \dfrac{t^2-2}{2(t+1)}, \\ dx = \dfrac{(t^2+2t+2)dt}{2(t+1)^2}, & \sqrt{x^2+2x+2} = \dfrac{t^2+2t+2}{2(t+1)}, \end{cases}$$

$$(16.)\quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{(t^2-2)(t^2+2t+2)dt}{2(t+1)^2(t^2+2t+2)} = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2-2)dt}{(t+1)^2}.$$

Nun ist, wie man durch Division findet,

$$t^2-2 = (t+1)(t-1) - 1 = (t+1)^2 - 2(t+1) - 1,$$

also

$$(17.)\quad \frac{t^2-2}{(t+1)^2} = 1 - \frac{2}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2},$$

folglich wird

$$(18.)\quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{1}{2}\left[t - 2\ln(t+1) + \frac{1}{t+1}\right]$$

$$= \frac{t^2+t+1}{2(t+1)} - \ln(t+1)$$

$$= \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)} - \frac{1}{2} - \ln(t+1).$$

Dies gibt mit Rücksicht auf die Gleichungen (15.)

$$(19.)\quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \sqrt{x^2+2x+2} - \frac{1}{2} - \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}).$$

Bedeutend leichter findet man dieses Resultat durch Anwendung von Formel Nr. 155 der Tabelle, indem man

$$(20.)\quad \begin{cases} x = y - 1, \quad \text{also} \quad y = x + 1,\ dx = dy, \\ \sqrt{x^2+2x+2} = \sqrt{y^2+1} \end{cases}$$

setzt; dann wird

$$(21.)\quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{(y-1)dy}{\sqrt{y^2+1}} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} - \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}}$$

also nach den Formeln Nr. 32 und 35 der Tabelle

$$(22.)\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \sqrt{y^2+1} - \ln(y+\sqrt{y^2+1})$$
$$= \sqrt{x^2+2x+2} - \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}).$$

Dieses Resultat unterscheidet sich von dem vorher gefundenen nur durch eine Integrations-Konstante.

Aufgabe 5. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = ?$

Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man hier

$$(23.)\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{1}{4}\int\frac{(t^2-2)^2dt}{(t+1)^3}$$
$$= \frac{1}{4}\int\left[t-3+\frac{2}{t+1}+\frac{4}{(t+1)^2}+\frac{1}{(t+1)^3}\right]dt$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}-3t+2\ln(t+1)-\frac{4}{t+1}-\frac{1}{2(t+1)^2}\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[t^2-6t-\frac{8}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right]+\frac{1}{2}\ln(t+1)$$
$$= \frac{t^4-4t^3-11t^2-14t-9}{8(t+1)^2}+\frac{1}{2}\ln(t+1)$$
$$= \frac{t^4-4t^3-18t^2-28t-16}{8(t+1)^2}+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\ln(t+1).$$

Nun ist

$$t^4-4t^3-18t^2-28t-16 = (t^2+2t+2)(t^2-6t-8)$$
$$= (t^2+2t+2)[t^2-2-6(t+1)],$$

folglich wird mit Rücksicht auf die Gleichungen (15.)

$$(24.)\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{1}{2}\,\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)}\left(\frac{t^2-2}{2(t+1)}-3\right)$$
$$+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\ln(t+1)$$
$$= \frac{x-3}{2}\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}).$$

Auch hier ergibt sich das Resultat leichter durch Anwendung der in den Gleichungen (20.) angegebenen Substitution; dann wird

$$(25.)\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int\frac{(y^2-2y+1)dy}{\sqrt{y^2+1}}$$
$$= \int\frac{y^2dy}{\sqrt{y^2+1}} - 2\int\frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} + \int\frac{dy}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Dies gibt nach Formel Nr. 127, 32 und 35 der Tabelle

$$(26.)\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{y}{2}\sqrt{y^2+1} - 2\sqrt{y^2+1} + \frac{1}{2}\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$
$$= \frac{x-3}{2}\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}).$$

Dieses Resultat unterscheidet sich von dem vorher gefundenen nur durch eine Integrations-Konstante.

In ähnlicher Weise kann man die Aufgaben

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = ?\quad \int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = ?\ \cdots \int\frac{x^ndx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = ?$$

behandeln.

Aufgabe 6. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}} = ?$

Auflösung. Aus den Gleichungen (15.) ergibt sich hier

$$(27.)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}} = 2\int\frac{dt}{t^2-2},$$

also nach Formel Nr. 29a der Tabelle

$$(28.)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2x+2}}{x+\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2x+2}}\right).$$

Aufgabe 7. $\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{x^2+c}} = ?$

Auflösung. Aus Gleichung (5.) findet man

$$(29.)\quad \int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{x^2+c}} = 2\int\frac{dt}{t^2-2kt-c}.$$

Dies gibt nach Formel Nr. 87 der Tabelle, indem man

$$b \text{ mit } -k \quad \text{und} \quad c \text{ mit } -c$$

vertauscht,

$$(30.) \quad \int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{x^2+c}} = \frac{1}{\sqrt{k^2+c}} \ln\left(\frac{t-k-\sqrt{k^2+c}}{t-k+\sqrt{k^2+c}}\right).$$

Ist k^2+c negativ, so erhält der gefundene Ausdruck imaginäre Form; dann findet man jedoch aus Gleichung (29.), indem man

$$a = \sqrt{-c}, \quad \text{also} \quad c = -a^2$$

setzt, nach Formel Nr. 89 der Tabelle

$$(31.) \quad \int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2-2kt+a^2} = \frac{2}{\sqrt{a^2-k^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t-k}{\sqrt{a^2-k^2}}\right).$$

Zum Schluß muß man noch

$$t = x + \sqrt{x^2+c}$$

einsetzen.

Aufgabe 8. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = ?$

Nach Gleichung (5.) ist in diesem Falle

$$x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{t^2+1}{2t}, \quad dx = \frac{(t^2+1)dt}{2t^2},$$

$$1-x^2 = (1+x)(1-x) = \frac{t^2+2t-1}{2t} \cdot \frac{-t^2+2t+1}{2t} = -\frac{t^4-6t^2+1}{4t^2},$$

also

$$(32.) \quad \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = -4\int \frac{tdt}{t^4-6t^2+1} = -2\int \frac{du}{u^2-6u+1},$$

wenn man t^2 mit u bezeichnet. Nun ist nach Formel Nr. 88 der Tabelle

$$(33.) \quad \int \frac{du}{u^2-6u+1} = \int \frac{du}{(u-u_1)(u-u_2)} = \frac{1}{u_1-u_2} \ln\left(\frac{u-u_1}{u-u_2}\right),$$

wobei

$$u_1 = 3+2\sqrt{2}, \quad u_2 = 3-2\sqrt{2}, \quad u_1-u_2 = 4\sqrt{2}$$

ist. Dies gibt

(34.) $$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{u-3-2\sqrt{2}}{u-3+2\sqrt{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{t^2-3+2\sqrt{2}}{t^2-3-2\sqrt{2}}\right).$$

Um das Endresultat als Funktion von x darzustellen, beachte man, daß

$$\frac{t^2-1}{2t} = x,\quad \frac{-2+2\sqrt{2}}{2t} = \frac{-1+\sqrt{2}}{x+\sqrt{1+x^2}} = (-1+\sqrt{2})(\sqrt{1+x^2}-x),$$

also

(35.) $$\frac{t^2-3+2\sqrt{2}}{2t} = (2-\sqrt{2})x + (-1+\sqrt{2})\sqrt{1+x^2}$$
$$= (\sqrt{2}-1)(\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2})$$

ist. Ebenso findet man

(36.) $$\frac{t^2-3-2\sqrt{2}}{2t} = (-\sqrt{2}-1)(\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}),$$

folglich wird

(37.) $$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left[\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2})}{(-\sqrt{2}-1)(\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2})}\right]$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left[\frac{(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2})^2}{x^2-1}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1}}\right)+\ln(\sqrt{2}-1)\right].$$

Schneller kommt man zum Ziele durch Anwendung von Formel Nr. 85 der Tabelle, indem man

(38.) $$x = \operatorname{tg} t,\quad \text{also}\quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t},\quad \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}$$

setzt. Dadurch erhält man

(39.) $$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{\cos t\,dt}{\cos^2 t-\sin^2 t} = \int\frac{\cos t\,dt}{1-2\sin^2 t},$$

oder, wenn man

$$\sqrt{2}\sin t = z,\quad \text{also}\quad \sqrt{2}\cos t\,dt = dz$$

setzt und Formel Nr. 29a der Tabelle beachtet,

$$(40.)\quad \int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{z^2-1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right);$$

dabei ist

$$z = \sqrt{2}\sin t = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}},$$

folglich wird

$$(41.)\quad \int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{2}-\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1}}\right).$$

Dieses Resultat stimmt, abgesehen von der Integrations-Konstanten, mit dem früher gefundenen überein.

§ 47.
Integration der Differential-Funktion
$F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$, wenn C positiv ist.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 161 und 162.)

Aufgabe 1. $\int f(y, \sqrt{a^2 \pm y^2})dy = ?$

Auflösung. Wenn das gesuchte Integral mit keinem bisher entwickelten übereinstimmt, so setze man

$$(1.)\quad \sqrt{a^2 \pm y^2} = ty - a, \quad \text{oder} \quad t = \frac{a+\sqrt{a^2 \pm y^2}}{y},$$

also

$$(2.)\quad a^2 \pm y^2 = t^2y^2 - 2aty + a^2, \quad \text{oder} \quad y = \frac{2at}{t^2 \mp 1},$$

$$(3.)\quad \sqrt{a^2 \pm y^2} = \frac{2at^2}{t^2 \mp 1} - a = \frac{a(t^2 \pm 1)}{t^2 \mp 1},$$

$$(4.)\quad dy = -\frac{2a(t^2 \pm 1)dt}{(t^2 \mp 1)^2},$$

folglich wird

$$(5.)\quad \int f(y, \sqrt{a^2 \pm y^2})dy = \int f\left(\frac{2at}{t^2 \mp 1}, \frac{a(t^2 \pm 1)}{t^2 \mp 1}\right)\cdot\frac{-2a(t^2 \pm 1)dt}{(t^2 \mp 1)^2}.$$

Wenn $f(y, \sqrt{a^2 \pm y^2})$ eine rationale Funktion von y und $\sqrt{a^2 \pm y^2}$ ist, so hat man es durch die angegebene

Substitution erreicht, daß die Funktion unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite von Gleichung (5.) eine *rationale* Funktion der einzigen Veränderlichen t geworden ist. Hiernach wird z. B.

$$(6.)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t} = -\frac{1}{a}\ln t = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right),$$

ein Resultat, welches mit Formel Nr. 37 der Tabelle übereinstimmt.

Aufgabe 2. $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx = ?$

Auflösung. In § 44 wurde bereits gezeigt, wie man das gesuchte Integral auf ein Integral von der Form $\int f(y, \sqrt{a^2 \pm y^2})dy$ zurückführen kann (vergl. Formel Nr. 155 und 156 der Tabelle). Ist diese Umformung erfolgt, so gelangt man durch die in Aufgabe 1 angegebene Substitution zum Ziele. Man kann aber auch die Umwandlung der vorgelegten *irrationalen* Differential-Funktion in eine *rationale* unmittelbar ausführen, indem man

$$(7.)\quad \sqrt{Ax^2+2Bx+C} = tx - \sqrt{C}$$

setzt. Dadurch erhält man

$$Ax^2+2Bx+C = t^2x^2 - 2tx\sqrt{C} + C,$$

oder

$$(8.)\quad Ax + 2B = t^2x - 2t\sqrt{C},$$

also

$$(9.)\quad x = \frac{2(t\sqrt{C}+B)}{t^2-A},\quad dx = -\frac{2(t^2\sqrt{C}+2Bt+A\sqrt{C})dt}{(t^2-A)^2},$$

$$(10.)\quad \sqrt{Ax^2+2Bx+C} = \frac{t^2\sqrt{C}+2Bt+A\sqrt{C}}{t^2-A}.$$

Dies gibt

$$(11.)\quad \int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx =$$

$$\int F\left(\frac{2(t\sqrt{C}+B)}{t^2-A}, \frac{t^2\sqrt{C}+2Bt+A\sqrt{C}}{t^2-A}\right)\cdot\frac{-2(t^2\sqrt{C}+2Bt+A\sqrt{C})dt}{(t^2-A)^2},$$

wobei

$$(12.)\quad t = \frac{1}{x}(\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C})$$

ist. Wenn $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})$ eine rationale Funktion von x und $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ ist, so steht unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite von Gleichung (11.) jetzt nur noch eine *rationale* Funktion von t, welche nach den Regeln des vorhergehenden Abschnittes integriert werden kann.

Man erkennt, daß auch hier die Aufgabe 1 nur ein besonderer Fall der Aufgabe 2 ist, den man erhält, indem man die Integrations-Veränderliche mit y bezeichnet und

$$A=\pm 1, \quad B=0, \quad C=+a^2$$

setzt.

Übungs-Beispiele.

Aufgabe 3. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=?$

Auflösung. Nach Gleichung (11.) erhält man

$$(13.)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=-2\int\frac{dt}{t^2-A}.$$

Ist A *positiv*, so folgt hieraus nach Formel Nr. 29a der Tabelle

$$(14.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=-\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left(\frac{t-\sqrt{A}}{t+\sqrt{A}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left(\frac{\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}+x\sqrt{A}}{\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}-x\sqrt{A}}\right).$$

Dieses Resultat stimmt, abgesehen von einer Integrations-Konstanten, mit dem in § 45, Gleichung (1.) gegebenen (vergl. Formel Nr. 157 der Tabelle) überein, denn es ist

$$(\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}-x\sqrt{A})(Ax+B+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C})$$
$$=(B+\sqrt{AC})(\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}+x\sqrt{A}),$$

folglich wird

$$(15.)\quad \frac{\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}+x\sqrt{A}}{\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}-x\sqrt{A}}$$
$$=\frac{Ax+B+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{B+\sqrt{AC}},$$

also

$$(16.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left(\frac{Ax+B}{\sqrt{A}}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right)-\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left(\frac{B+\sqrt{AC}}{\sqrt{A}}\right).$$

Ist A *negativ*, so erhält man aus Gleichung (18.) nach Formel Nr. 28 der Tabelle

$$(17.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=-\frac{2}{\sqrt{-A}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{-A}}\right)$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{-A}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{x\sqrt{-A}}\right).$$

Auch in diesem Falle kann man die Übereinstimmung mit dem in § 45 Gleichung (4.) gefundenen Resultate (vergl. Formel Nr. 157 der Tabelle) nachweisen. Setzt man nämlich

$$(18.)\quad \varphi=2\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{-A}}\right),\quad \text{also}\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{t}{\sqrt{-A}},$$

so wird

$$(19.)\quad \sin\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}=\frac{2t\sqrt{-A}}{t^2-A},$$

$$(20.)\quad \cos\varphi=\frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}=-\frac{t^2+A}{t^2-A}.$$

Ist der Bogen α erklärt durch die Gleichungen

$$(21.)\quad \sin\alpha=\frac{B}{\sqrt{B^2-AC}},\quad \cos\alpha=-\frac{\sqrt{-AC}}{\sqrt{B^2-AC}},$$

so erhält man

$$(22.)\quad \sin(\alpha-\varphi)=\sin\alpha\cos\varphi-\cos\alpha\sin\varphi$$

$$=\frac{-B(t^2+A)}{(t^2-A)\sqrt{B^2-AC}}+\frac{\sqrt{-AC}\,.\,2t\sqrt{-A}}{(t^2-A)\sqrt{B^2-AC}}$$

$$=\frac{-2A(t\sqrt{C}+B)}{(t^2-A)\sqrt{B^2-AC}}-\frac{B}{\sqrt{B^2-AC}}$$

$$=-\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}}.$$

Fügt man also in Gleichung (17.) die Integrations-Konstante $\frac{\alpha}{\sqrt{-A}}$ hinzu, so erhält man in Übereinstimmung mit Formel Nr. 157 der Tabelle

$$(23.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\frac{\alpha-\varphi}{\sqrt{-A}}=\frac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\left(-\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}}\right).$$

Aufgabe 4. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x+x^2}}=?$

Auflösung. Hier ist

$$(24.)\quad A=1,\quad B=\tfrac{1}{2},\quad C=1,$$

also

$$(25.)\quad \begin{cases} x=\frac{2t+1}{t^2-1},\quad dx=-\frac{2(t^2+t+1)dt}{(t^2-1)^2},\\ t=\frac{1+\sqrt{1+x+x^2}}{x},\quad \sqrt{1+x+x^2}=\frac{t^2+t+1}{t^2-1}. \end{cases}$$

Dies gibt, wenn man die Integrations-Konstante $1-\frac{1}{2}\ln 3$ hinzufügt,

$$(26.)\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{1+x+x^2}}=-2\int\frac{(2t+1)dt}{(t^2-1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[-\frac{3}{(t-1)^2}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{t+1}\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{t-1}-\frac{1}{t+1}+2+\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)-\ln 3\right]$$

$$=\frac{t^2+t+1}{t^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3t^2+6t+3}{t^2-1}\right)$$

$$=\sqrt{1+x+x^2}-\tfrac{1}{2}\ln(2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}).$$

Aufgabe 5. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}}=?$

Auflösung. Hier ist

$$(27.)\quad A=-1,\quad B=\tfrac{1}{2},\quad C=1,$$

also

$$(28.)\quad \begin{cases} x = \dfrac{2t+1}{t^2+1}, \quad dx = -\dfrac{2(t^2+t-1)dt}{(t^2+1)^2}, \\ t = \dfrac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}, \quad \sqrt{1+x-x^2} = \dfrac{t^2+t-1}{t^2+1}, \end{cases}$$

$$(29.)\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}} = -2\int\frac{(2t+1)dt}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{2}{t^2+1} - 2\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

Nun wird nach Formel Nr. 149 der Tabelle

$$(30.)\quad \int\frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t,$$

folglich ist, wenn man die Integrations-Konstante gleich -1 setzt,

$$(31.)\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \frac{2}{t^2+1} - \frac{t}{t^2+1} - 1 - \operatorname{arctg} t$$

$$= -\frac{t^2+t-1}{t^2+1} - \operatorname{arctg} t$$

$$= -\sqrt{1+x-x^2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right).$$

Bedeutend leichter wird die Lösung durch Anwendung der Formel Nr. 156 der Tabelle, indem man

$$(32.)\quad \begin{cases} 2x = -2y+1, \quad \text{also} \quad dx = -dy, \\ \sqrt{1+x-x^2} = \sqrt{a^2-y^2}, \quad 2a = \sqrt{5} \end{cases}$$

setzt; dann erhält man nach Formel Nr. 31 und 34 der Tabelle

$$(33.)\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int\frac{(2y-1)dy}{2\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$= -\sqrt{a^2-y^2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{y}{a}\right)$$

$$= -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right).$$

Um die Übereinstimmung dieses Resultates mit dem früheren nachzuweisen, setze man

(34.) $$\varphi = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right),$$

also
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x},$$

dann wird

(35.) $$\sin\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{2(2x-1+\sqrt{1+x-x^2})}{5},$$

(36.) $$\cos\varphi = \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{2x-1-4\sqrt{1+x-x^2}}{5}.$$

Erklärt man sodann den Bogen α durch die Gleichungen

(37.) $$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}},$$

so wird

(38.) $$\sin(\alpha-\varphi) = \sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi = \frac{2x-1}{\sqrt{5}}.$$

Fügt man also in Gleichung (31.) die Integrations-Konstante $\frac{\alpha}{2}$ hinzu, so erhält man

(39.) $$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}} = -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{\alpha-\varphi}{2}$$
$$= -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right).$$

Aufgabe 6. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe, also durch die Gleichungen (28.), erhält man

(40.) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} = -2\int\frac{dt}{2t+1} = -\ln(2t+1)$$
$$= -\ln\left(\frac{x+2+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right).$$

Aufgabe 7. $\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{1-x^2}} = ?$

Auflösung. Hier ist

$$a=1,\quad A=-1,\quad B=0,\quad C=1, \tag{41.}$$

folglich erhält man nach Formel Nr. 161 oder 162 der Tabelle

$$x=\frac{2t}{t^2+1},\quad \sqrt{1-x^2}=\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad dx=-\frac{2(t^2-1)dt}{(t^2+1)^2}, \tag{42.}$$

$$\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{1-x^2}}=2\int\frac{dt}{kt^2-2t+k}, \tag{43.}$$

oder, wenn man k mit $\frac{1}{r}$ bezeichnet und die Formeln Nr. 87 und 88 der Tabelle berücksichtigt,

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{1-x^2}}&=2r\int\frac{dt}{t^2-2rt+1}\\ &=\frac{r}{\sqrt{r^2-1}}\ln\left(\frac{t-r-\sqrt{r^2-1}}{t-r+\sqrt{r^2-1}}\right),\end{aligned} \tag{44.}$$

wenn $r^2>1$ ist; und nach Formel Nr. 89 der Tabelle

$$\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{1-x^2}}=\frac{2r}{\sqrt{1-r^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-r}{\sqrt{1-r^2}}\right), \tag{45.}$$

wenn $r^2<1$ ist. Zum Schluß muß man noch

$$t=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\quad\text{und}\quad r=\frac{1}{k} \tag{46.}$$

einsetzen.

Aufgabe 8. $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe, also durch die Gleichungen (42.), erhält man

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=-2\int\frac{(t^2+1)dt}{t^4+6t^2+1}. \tag{47.}$$

Da die quadratische Gleichung

$$t^4+6t^2+1=0 \tag{48.}$$

die beiden Wurzeln

$$(49.)\quad \begin{cases} t_1^2 = -3 + 2\sqrt{2} = -(\sqrt{2}-1)^2, \\ t_2^2 = -3 - 2\sqrt{2} = -(\sqrt{2}+1)^2 \end{cases}$$

hat, so findet man durch Partialbruch-Zerlegung

$$(50.)\quad \frac{-2t^2-2}{t^4+6t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{t^2+a^2} - \frac{1+\sqrt{2}}{t^2+b^2}\right),$$

wobei

$$(51.)\quad a = \sqrt{2}-1, \quad b = \sqrt{2}+1$$

gesetzt ist. Dies gibt nach Formel Nr. 28 der Tabell

$$(52.)\quad \int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{b}\right)\right].$$

Setzt man noch

$$(53.)\quad \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right) = \varphi, \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{b}\right) = \psi,$$

so wird

$$(54.)\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{t}{a} = \frac{t}{\sqrt{2}-1}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{t}{b} = \frac{t}{\sqrt{2}+1},$$

also

$$(55.)\quad \operatorname{tg}(\varphi+\psi) = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi} = \frac{2t\sqrt{2}}{1-t^2} = -\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

folglich wird

$$(56.)\quad \int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi+\psi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}\right.$$

Einfacher findet man dieses Resultat durch Einfül trigonometrischer Funktionen, also durch die Substi

$$(57.)\quad x = \sin t, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos t.$$

Vergl. § 12, Gleichung (7.).

§ 48.

Integration der Differential-Funktion $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$, wenn B^2-AC positiv ist.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 163.)

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0 \tag{1.}$$

sind bekanntlich

$$x_1 = \frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{A}, \quad x_2 = \frac{-B-\sqrt{B^2-AC}}{A}. \tag{2.}$$

Unter der Voraussetzung, daß $B^2 - AC > 0$ ist, werden beide Wurzeln x_1 und x_2 *reell*. Setzt man in diesem Falle

$$x_1 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad x_2 = -\frac{\delta}{\gamma}, \quad \text{wobei} \quad \alpha\gamma = A \tag{3.}$$

sein möge, so wird

$$Ax^2 + 2Bx + C = A(x - x_1)(x - x_2) \tag{4.}$$

$$= \alpha\gamma\left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(x + \frac{\delta}{\gamma}\right) = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta).$$

Jetzt möge die neue Integrations-Veränderliche t durch die Gleichung

$$\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = t(\alpha x + \beta) \tag{5.}$$

eingeführt werden. Dadurch erhält man

$$Ax^2 + 2Bx + C = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta) = t^2(\alpha x + \beta)^2,$$

oder

$$\gamma x + \delta = t^2(\alpha x + \beta), \tag{6.}$$

$$x = \frac{\beta t^2 - \delta}{\gamma - \alpha t^2}, \quad dx = \frac{2(\beta\gamma - \alpha\delta)tdt}{(\gamma - \alpha t^2)^2}, \tag{7.}$$

$$t = \sqrt{\frac{\gamma x + \delta}{\alpha x + \beta}}, \quad \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)t}{\gamma - \alpha t^2}. \tag{8.}$$

Dies gibt

$$\int F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})dx = \tag{9.}$$

$$\int F\left(\frac{\beta t^2 - \delta}{\gamma - \alpha t^2}, \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)t}{\gamma - \alpha t^2}\right) \cdot \frac{2(\beta\gamma - \alpha\delta)tdt}{(\gamma - \alpha t^2)^2},$$

wobei

$$(10.)\quad t=\sqrt{\frac{\gamma x+\delta}{\alpha x+\beta}},\quad \sqrt{Ax^2+2Bx+C}=\sqrt{(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)}.$$

Übungs-Beispiele.

Aufgabe 1. $\int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)}}=?$

Auflösung. Aus Gleichung (9.) folgt

$$(11.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)}}=2\int\frac{dt}{\gamma-\alpha t^2}.$$

Setzt man hierbei $\frac{\gamma}{\alpha}=\pm k^2$, je nachdem $\frac{\gamma}{\alpha}$ positiv oder negativ ist, so erhält man für das obere Vorzeichen nach Formel Nr. 29a der Tabelle

$$(12.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)}}=-\frac{2}{\alpha}\int\frac{dt}{t^2-k^2}=-\frac{1}{\alpha k}\ln\left(\frac{t-k}{t+k}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}}\ln\left(\frac{\sqrt{\alpha(\gamma x+\delta)}+\sqrt{\gamma(\alpha x+\beta)}}{\sqrt{\alpha(\gamma x+\delta)}-\sqrt{\gamma(\alpha x+\beta)}}\right).$$

Für das untere Vorzeichen wird nach Formel Nr. 28 der Tabelle

$$(13.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)}}=-\frac{2}{\alpha}\int\frac{dt}{t^2+k^2}=-\frac{2}{\alpha k}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{k}\right)$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{-\alpha\gamma}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-\alpha(\gamma x+\delta)}{\gamma(\alpha x+\beta)}}.$$

Aufgabe 2. $\int\frac{xdx}{\sqrt{rx-x^2}}=?$

Auflösung. In diesem Falle kann man setzen

$$(14.)\quad \alpha x+\beta=x,\quad \gamma x+\delta=r-x,$$

also

$$(15.)\quad \alpha=1,\quad \beta=0,\quad \gamma=-1,\quad \delta=r,\quad \beta\gamma-\alpha\delta=-r,$$

$$(16.)\quad \begin{cases} x=\frac{r}{t^2+1},\quad \sqrt{rx-x^2}=\frac{rt}{t^2+1},\\ dx=-\frac{2rtdt}{(t^2+1)^2},\quad t=\sqrt{\frac{r-x}{x}},\end{cases}$

folglich erhält man mit Rücksicht auf Formel Nr. 149 der Tabelle

$$(17.)\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{rx-x^2}} = -2r\int\frac{dt}{(t^2+1)^2} = -2r\left[\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right]$$

$$= -\sqrt{rx-x^2} - r\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r-x}{x}}.$$

In ähnlicher Weise kann man $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{rx-x^2}}, \int\frac{x^3dx}{\sqrt{rx-x^2}}, \ldots$ berechnen.

Aufgabe 3. $\int\frac{dx}{x\sqrt{rx-x^2}} = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe, also durch die Gleichungen (16.), erhält man hier

$$(18.)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{rx-x^2}} = -\frac{2}{r}\int dt = -\frac{2t}{r}$$

$$= -\frac{2}{r}\sqrt{\frac{r-x}{x}} = -\frac{2\sqrt{rx-x^2}}{rx}.$$

Aufgabe 4. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = ?$

Hier ist

$$(19.)\quad \alpha x+\beta = 1+x, \quad \text{also} \quad \gamma x+\delta = 1-x,$$

$$(20.)\quad \alpha=1, \quad \beta=1, \quad \gamma=-1, \quad \delta=1, \quad \beta\gamma-\alpha\delta=-2,$$

$$(21.)\quad x = -\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{t^2+1}, \quad dx = -\frac{4tdt}{(t^2+1)^2},$$

$$(22.)\quad t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad x+1 = \frac{2}{t^2+1}.$$

Dies gibt

$$(23.)\quad \int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = -\int dt = -t = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Aufgabe 5. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = ?$

In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man

(24.) $$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Aufgabe 6. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = ?$

Auflösung. Hier sei

$$\alpha x + \beta = x + 1, \quad \text{also} \quad \gamma x + \delta = x - 1,$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = -1, \quad \beta\gamma - \alpha\delta = 2,$$

(25.) $$x = \frac{t^2+1}{1-t^2}, \quad \sqrt{x^2-1} = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{4tdt}{(1-t^2)^2}.$$

(26.) $$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad x + 1 = \frac{2}{1-t^2}.$$

Dies gibt

(27.) $$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \int dt = t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Aufgabe 7. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = ?$

Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei der vorhe gehenden Aufgabe findet man

(28.) $$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Aufgabe 8. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}} = ?$

Auflösung. Auch hier findet die durch die Gl chungen (16.) angegebene Substitution Anwendung, u zwar erhält man, wenn man

(29.) $$r = kg$$

setzt,

(30.) $$\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}} = -2\int\frac{dt}{r-k(t^2+1)} = -2\int\frac{dt}{kg-k(t^2+}$$
$$= \frac{2}{k}\int\frac{dt}{t^2-g+1}.$$

Dies gibt für $g>1$ nach Formel Nr. 29a der Tabelle

(31.) $$\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}}=\frac{1}{k\sqrt{g-1}}\ln\left(\frac{t-\sqrt{g-1}}{t+\sqrt{g-1}}\right).$$

Dieses Resultat kann man noch auf die Form

(32.) $$\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{k(r-k)}}\ln\left(\frac{\sqrt{k(r-x)}-\sqrt{x(r-k)}}{\sqrt{k(r-x)}+\sqrt{x(r-k)}}\right)$$

bringen. Ist $g<1$, so findet man nach Formel Nr. 28 der Tabelle

(33.) $$\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}}=\frac{2}{k\sqrt{1-g}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{1-g}}\right),$$

also

(34.) $$\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{k(k-r)}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{k(r-x)}}{\sqrt{x(k-r)}}\right).$$

Aufgabe 9. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=?$

Auflösung. Hier sei

(35.) $$\alpha x+\beta=1-x,\quad \gamma x+\delta=1+x,$$

also

(36.) $$\alpha=-1,\quad \beta=1,\quad \gamma=1,\quad \delta=1,\quad \beta\gamma-\alpha\delta=2,$$

(37.) $$x=\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\quad dx=\frac{4tdt}{(t^2+1)^2},$$

(38.) $$\sqrt{1-x^2}=\frac{2t}{t^2+1},\quad 1+x^2=\frac{2(t^4+1)}{(t^2+1)^2}.$$

Daraus folgt

(39.) $$\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{(t^2+1)dt}{t^4+1}.$$

Die Wurzeln der Gleichung

(40.) $$t^4+1=(t^2-i)(t^2+i)=0,$$

nämlich

(41.) $$t_1=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad t_2=\frac{1-i}{\sqrt{2}},\quad t_3=-\frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad t_4=-\frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

sind sämtlich komplex. Indem man je zwei konjugiert

komplexe Faktoren von t^4+1 miteinander multipliziert, erhält man die reellen Produkte

$$(t-t_1)(t-t_2)=t^2-t\sqrt{2}+1, \tag{42.}$$

$$(t-t_3)(t-t_4)=t^2+t\sqrt{2}+1 \tag{43.}$$

und die Partialbruch-Zerlegung

$$\begin{aligned}\frac{t^2+1}{t^4+1}&=\frac{Pt+Q}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{Rt+S}{t^2+t\sqrt{2}+1}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{1}{t^2+t\sqrt{2}+1}\right).\end{aligned} \tag{44.}$$

Deshalb findet man nach Formel Nr. 89 der Tabelle

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}[\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}-1)+\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}+1)] \tag{45.}$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch wesentlich vereinfachen. Setzt man nämlich

$$\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}-1)=\xi,\quad \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}+1)=\eta, \tag{46.}$$

so wird

$$\operatorname{tg}\xi=t\sqrt{2}-1,\quad \operatorname{tg}\eta=t\sqrt{2}+1, \tag{47.}$$

$$\operatorname{tg}(\xi+\eta)=\frac{\operatorname{tg}\xi+\operatorname{tg}\eta}{1-\operatorname{tg}\xi\operatorname{tg}\eta}=\frac{2t\sqrt{2}}{2-2t^2}=-\frac{t\sqrt{2}}{t^2-1}. \tag{48.}$$

Nun ist nach den Gleichungen (37.) und (38.)

$$x=\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad \sqrt{1-x^2}=\frac{2t}{t^2+1},\quad \text{also}\quad \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{2t}{t^2-1},$$

folglich wird

$$\operatorname{tg}(\xi+\eta)=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}},\quad \xi+\eta=-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}\right), \tag{49.}$$

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}\right). \tag{50.}$$

In § 47, Aufgabe 8 hatte sich ergeben

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right). \tag{51.}$$

Die Übereinstimmung dieser beiden Resultate findet man leicht, indem man

$$(52.)\quad \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}\right)=\varphi, \quad \text{also} \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}$$

setzt; dann wird

$$(53.)\quad \operatorname{ctg}\varphi=\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right), \frac{\pi}{2}-\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Fügt man also in Gleichung (50.) die Integrations-Konstante $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ hinzu, so erhält man in Übereinstimmung mit Gleichung (51.)

$$(54.)\quad \int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Es war schon damals hervorgehoben worden, daß eine einfachere Lösung dieser Aufgabe durch die in § 12 angegebene Methode, nämlich durch Einführung trigonometrischer Funktionen, gefunden wird.

§ 49.

Integration der Differential-Funktion $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$, wenn die drei Größen A, C und B^2-AC negativ sind.

Es sei jetzt

$$(1.)\quad B^2-AC<0, \quad \text{also} \quad AC>B^2>0;$$

die beiden Größen A und C haben daher dasselbe Vorzeichen, so daß die Voraussetzung

$$(2.)\quad A<0$$

die andere

$$(3.)\quad C<0$$

notwendigerweise herbeiführt. Nun wird

$$(4.)\quad Ax^2 + 2Bx + C = \frac{1}{A}[A^2x^2 + 2ABx + B^2 + AC - B^2]$$
$$= \frac{1}{A}[(Ax + B)^2 + (AC - B^2)];$$

folglich ist in diesem Falle der Ausdruck in der eckigen Klammer *beständig positiv*, was auch x sein mag, also $Ax^2+2Bx+C$ *beständig negativ*, denn A ist negativ. Deshalb wird die Funktion $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})$ selbst eine *komplexe* Größe, wenn die Ungleichungen (1.), (2.) und (3.) gelten, weil $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ stets *imaginär* sein muß. Es ist daher nicht möglich, $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$ in *reeller* Form darzustellen. Unter diesen Umständen wird man, wie schon in § 44 hervorgehoben wurde, am besten

$$(5.)\quad \int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx = \int F(x, i\sqrt{A_1x^2+2B_1x+C_1})dx$$

setzen, wobei

$$(6.)\quad A_1 = -A,\quad B_1 = -B,\quad C_1 = -C$$

ist. Man kann dann das in § 46 und § 47 angegebene Verfahren benutzen.

§ 50.

Normalintegrale von der Form $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$ *).

Ist $F(x, \sqrt{X})$ eine (ganze oder gebrochene) rationale Funktion von x und $\sqrt{X}$, wobei man der Kürze wegen $Ax^2 + 2Bx + C$ mit X bezeichnet hat, so kann man $F(x, \sqrt{X})$ immer auf die Form

$$(1.)\quad F(x, \sqrt{X}) = \frac{g(x) + h(x) \,.\, \sqrt{X}}{\varphi(x) + \psi(x) \,.\, \sqrt{X}}$$

bringen, so daß $g(x)$, $h(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *ganze rationale* Funktionen von x sind. Daraus folgt

*) Der Anfänger darf die Ausführungen dieses Paragraphen übergehen.

$$(2.)\quad F(x, \sqrt{X}) = \frac{[g(x) + h(x).\sqrt{X}].[\varphi(x) - \psi(x).\sqrt{X}]}{[\varphi(x) + \psi(x).\sqrt{X}].[\varphi(x) - \psi(x).\sqrt{X}]} = \frac{G(x) + H(x).\sqrt{X}}{\varphi(x)^2 - \psi(x)^2.X},$$

wenn man

$$(3.)\quad \begin{cases} g(x)\varphi(x) - h(x)\psi(x).X = G(x), \\ h(x)\varphi(x) - g(x)\psi(x) = H(x) \end{cases}$$

setzt. Bezeichnet man noch den Nenner $\varphi(x)^2 - \psi(x)^2.X$ mit $N(x)$, so ergibt sich

$$(4.)\quad F(x, \sqrt{X}) = \frac{G(x)}{N(x)} + \frac{H(x)}{N(x)}.\sqrt{X} = \frac{G(x)}{N(x)} + \frac{H(x)X}{N(x).\sqrt{X}}.$$

Die gebrochene rationale Funktion $\frac{G(x)}{N(x)}$ kann man nach den Angaben des vorhergehenden Abschnittes durch Partialbruch-Zerlegung integrieren. Ebenso kann man $\frac{H(x).X}{N(x)}$ (nötigenfalls nach Absonderung einer *ganzen* rationalen Funktion) in Partialbrüche von der Form

$$\frac{K}{(x-k)^n} \quad \text{und} \quad \frac{Px+Q}{[(x-g)^2+h^2]^n}$$

zerlegen. Deshalb kommt es im wesentlichen nur auf die Berechnung der folgenden vier *Normalintegrale* an:

$$(5.)\quad \begin{cases} J_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad J_2 = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{X}}, \quad J_3 = \int \frac{dx}{(x-k)^n \sqrt{X}}, \\ J_4 = \int \frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n \sqrt{X}}. \end{cases}$$

Diese Betrachtung bleibt auch noch richtig, wenn X eine ganze rationale Funktion beliebig hohen Grades ist. Bezeichnet man mit X eine ganze rationale Funktion zweiten Grades, so wird es im allgemeinen zweckmäßig sein, die in § 44 angegebene Umformung vorzunehmen, so daß es bei dem Normalintegral J_1 nur auf die in den Formeln Nr. 34, 35 und 36 der Tabelle berechneten Integrale

$$(6.)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \text{ und } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a}\right)$$

ankommt. In gleicher Weise geben nach dieser Umformung die Formeln Nr. 31, 32, 33, 119, 126 und 126a der Tabelle an, wie das Normalintegral J_2, nämlich

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \text{und} \quad \int \frac{x^m dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

berechnet wird. Auch J_3 kann man in dem Falle, wo $k = 0$ ist, mit Anwendung der Formeln Nr. 37 bis 42, 125, 131 und 131a der Tabelle berechnen. Ist aber $k \gtrless 0$, so setze man zur Berechnung von $\int \frac{dx}{(x-k)^n \sqrt{a^2+x^2}}$

$$x = \frac{kz+a^2}{z-k}, \quad \text{also} \quad x-k = \frac{k^2+a^2}{z-k}, \tag{7.}$$

$$dx = -\frac{(k^2+a^2)dz}{(z-k)^2}, \quad \sqrt{a^2+x^2} = \frac{\sqrt{(k^2+a^2)(a^2+z^2)}}{z-k}, \tag{8.}$$

$$z = \frac{kx+a^2}{x-k}, \quad \sqrt{a^2+z^2} = \frac{\sqrt{(k^2+a^2)(a^2+x^2)}}{x-k}. \tag{9.}$$

Dies gibt

$$\int \frac{dx}{(x-k)^n \sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{(k^2+a^2)^{n-1}\sqrt{k^2+a^2}} \int \frac{(z-k)^{n-1}dz}{\sqrt{a^2+z^2}}. \tag{10.}$$

Das Normalintegral J_3 ist also auf die Normalintegral J_1 und J_2 zurückgeführt.

In ähnlicher Weise setze man zur Berechnung vo $\int \frac{dx}{(x-k)^n \sqrt{x^2-a^2}}$

$$x = \frac{kz-a^2}{z-k}, \quad \text{also} \quad x-k = \frac{k^2-a^2}{z-k}, \tag{11.}$$

$$dx = -\frac{(k^2-a^2)dz}{(z-k)^2}, \quad \sqrt{x^2-a^2} = \frac{\sqrt{(k^2-a^2)(z^2-a^2)}}{z-k}, \tag{12.}$$

$$z = \frac{kx-a^2}{x-k}, \quad \sqrt{z^2-a^2} = \frac{\sqrt{(k^2-a^2)(x^2-a^2)}}{x-k}. \tag{13.}$$

Ist $k^2 > a^2$, so wird daher

$$\int \frac{dx}{(x-k)^n \sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{(k^2-a^2)^{n-1}\sqrt{k^2-a^2}} \int \frac{(z-k)^{n-1}dz}{\sqrt{z^2-a^2}}, \tag{14.}$$

und für $k_2 < a^2$ wird

(15.) $$\int\frac{dx}{(x-k)^n\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{(k^2-a^2)^{n-1}\sqrt{a^2-k^2}}\int\frac{(z-k)^{n-1}dz}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

Die in den Gleichungen (11.), (12.) und (13.) angegebene Substitution führt auch zur Umformung von $\int\frac{dx}{(x-k)^n\sqrt{a^2-x^2}}$; es wird nämlich

(16.) $$\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2} = \frac{\sqrt{(k^2-a^2)(a^2-z^2)}}{z-k}, \\ \sqrt{a^2-z^2} = \frac{\sqrt{(k^2-a^2)(a^2-x^2)}}{x-k},\end{cases}$$

also für $k^2 > a^2$

(17.) $$\int\frac{dx}{(x-k)^n\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{(k^2-a^2)^{n-1}\sqrt{k^2-a^2}}\int\frac{(z-k)^{n-1}dz}{\sqrt{a^2-z^2}},$$

und für $k^2 < a^2$

(18.) $$\int\frac{dx}{(x-k)^n\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{(k^2-a^2)^{n-1}\sqrt{a^2-k^2}}\int\frac{(z-k)^{n-1}dz}{\sqrt{z^2-a^2}}.$$

Das Normalintegral J_4 kann bei Anwendung komplexer Größen durch Integrale von der Form J_3 dargestellt werden. Will man aber komplexe Größen ganz vermeiden, so wird man entweder die in § 46, 47 und 48 angegebenen Methoden anwenden, oder man wird im allgemeinen noch zweckmäßiger nach den Angaben in § 12 (vergl. Formel Nr. 84, 85 und 86 der Tabelle) trigonometrische Funktionen einführen, nachdem man durch die lineare Substitution

(19.) $$x = \frac{\alpha z + \beta}{z + 1}$$

und durch passende Bestimmung der Größen α und β das Integral auf Integrale von der Form

$$\int\frac{(Pz+Q)dz}{(z^2+p^2)^n\sqrt{Z}}$$

zurückgeführt hat, wobei Z einen der drei Werte a^2+z^2, z^2-a^2 oder a^2-z^2 haben soll. Durch die Substitution

$$(20.)\qquad z = a\,\mathrm{tg}\,t,\quad dz = \frac{a\,dt}{\cos^2 t},\quad \sqrt{a^2+z^2} = \frac{a}{\cos t}$$

erhält man dann

$$(21.)\quad \int \frac{(Pz+Q)dz}{(z^2+p^2)^n\sqrt{a^2+z^2}} = \int \frac{(Pa\sin t + Q\cos t)\cos^{2n-2}t\,.\,dt}{(a^2\sin^2 t + p^2\cos^2 t)^n}$$

$$= -Pa\int \frac{\cos^{2n-2}t\,d(\cos t)}{[a^2 + (p^2 - a^2)\cos^2 t]^n}$$

$$+ Q\int \frac{(1-\sin^2 t)^{n-1}d(\sin t)}{[(a^2-p^2)\sin^2 t + p^2]^n}.$$

Durch die Substitution

$$(22.)\qquad z = \frac{a}{\cos t},\quad dz = \frac{a\sin t\,dt}{\cos^2 t},\quad \sqrt{z^2-a^2} = a\,\mathrm{tg}\,t$$

erhält man

$$(23.)\quad \int \frac{(Pz+Q)dz}{(z^2+p^2)^n\sqrt{z^2-a^2}} = \int \frac{(Pa + Q\cos t)\cos^{2n-2}t\,.\,dt}{(a^2+p^2\cos^2 t)^n}$$

$$= Pa\int \frac{d(\mathrm{tg}\,t)}{[(a^2+p^2)+a^2\mathrm{tg}^2 t]^n}$$

$$+ Q\int \frac{(1-\sin^2 t)^{n-1}\,.\,d(\sin t)}{[(a^2+p^2) - p^2\sin^2 t]^n}.$$

Durch die Substitution

$$(24.)\qquad z = a\sin t,\quad dz = a\cos t\,dt,\quad \sqrt{a^2-z^2} = a\cos t$$

findet man

$$(25.)\quad \int \frac{(Pz+Q)dz}{(z^2+p^2)^n\sqrt{a^2-z^2}} = \int \frac{(Pa\sin t + Q)dt}{(a^2\sin^2 t + p^2)^n}$$

$$= -Pa\int \frac{d(\cos t)}{[(a^2+p^2) - a^2\cos^2 t]^n} + Q\int \frac{(1+\mathrm{tg}^2 t)^{n-1}d(\mathrm{tg}\,t)}{[(a^2+p^2)\mathrm{tg}^2 t + p^2]^n}.$$

Außerdem kann man auch Rekursionsformeln herleiten von der Form

$$(26.)\quad \int \frac{(Pz+Q)dz}{(z^2+p^2)^n\sqrt{Z}}$$

$$= \frac{(Rz+S)\sqrt{Z}}{(z^2+p^2)^{n-1}} + \int \frac{(P_1 z + Q_1)dz}{(z^2+p^2)^{n-1}\sqrt{Z}} + \int \frac{(P_2 z + Q_2)dz}{(z^2+p^2)^{n-2}\sqrt{Z}},$$

wobei man die unbestimmten Koeffizienten R, S, P_1, Q_1, P_2, Q_2 durch Differentiation von $\dfrac{(Rz+S)\sqrt{Z}}{(z^2+p^2)^{n-1}}$ findet.

XII. Abschnitt.

Theorie der bestimmten Integrale.

§ 51.

Integrale zwischen unendlichen Grenzen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 164 und 165.)

Bei der Erklärung des bestimmten Integrals durch Formel Nr. 4 der Tabelle, nämlich durch die Gleichung

$$(1.)\qquad \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a),$$

war bisher vorausgesetzt worden, daß die Grenzen a und b endliche, konstante Größen seien. Jetzt kann man sich aber vorstellen, daß die obere Grenze b nicht mehr eine konstante, sondern eine veränderliche Größe sei, welche schließlich bis ins Unbegrenzte wächst. Demgemäß würde $\int_a^\infty F'(x)dx$ durch die Gleichung

$$(2.)\qquad \int_a^\infty F'(x)dx = \lim_{b=\infty} \int_a^b F'(x)dx = \lim_{b=\infty} F(b) - F(a)$$

erklärt werden.

Auch die geometrische Deutung des bestimmten Integrals als Flächeninhalt einer ebenen Figur bleibt in diesem Grenzfalle noch bestehen, die ebene Figur aber, deren Flächeninhalt durch das Integral ausgedrückt wird, erstreckt sich längs der X-Achse bis ins Unendliche. Es war schon früher (§ 19, Aufgabe 8) gezeigt worden, daß der Flächeninhalt der Figur trotzdem einen endlichen Wert haben kann.

In gleicher Weise kann auch die untere Grenze a sich ändern und bis ins Unbegrenzte abnehmen. Dann möge $\int\limits_{-\infty}^{b} F'(x)dx$ durch die Gleichung

$$(3.)\qquad \int\limits_{-\infty}^{b} F'(x)dx = \lim_{a=-\infty}\int\limits_{a}^{b} F'(x)dx = F(b) - \lim_{a=-\infty} F(a)$$

erklärt werden.

Aus den folgenden Beispielen kann man ersehen, daß hierbei drei Fälle zu unterscheiden sind:

I. Das Integral zwischen unendlichen Grenzen wird selbst *unendlich groß*;

II. das Integral behält einen *endlichen* Wert;

III. das Integral wird *unbestimmt*.

Beispiele.

$$1.)\qquad \int\limits_{0}^{\infty} e^x dx = \lim_{b=\infty}\left[e^x\right]_0^b = \lim_{b=\infty} e^b - 1 = \infty.$$

Dagegen wird

$$1a.)\qquad \int\limits_{-\infty}^{b} e^x dx = \lim_{a=-\infty}\left[e^x\right]_a^b = e^b - \lim_{a=-\infty} e^a = e^b.$$

Man kann diese Resultate auch geometrisch deuten als Flächeninhalt der ebenen Figur, welche oben durch die *Exponentiallinie* mit der Gleichung

$$y = e^x$$

(vergl. D.-R., Seite 402, Fig. 81) und unten durch die X-Achse begrenzt wird.

$$2.)\qquad \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} dx = -\lim_{b=\infty}\left[e^{-x}\right]_0^b = 1 - \lim_{b=\infty}\left(\frac{1}{e^b}\right) = 1.$$

$$3.)\qquad \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\lim_{b=\infty}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^b = \frac{1}{a}\lim_{b=\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\pi}{2a}.$$

4.) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2} = \lim_{\substack{c=+\infty\\ b=-\infty}}\int_b^c\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\lim_{\substack{c=+\infty\\ b=-\infty}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_b^c$$
$$= \frac{1}{a}\left[\lim_{c=+\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{c}{a}\right) - \lim_{b=-\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{a}.$$

Aus diesem Beispiele sieht man, daß auch gleichzeitig beide Grenzen unendlich werden können. Im übrigen kann man die letzte Aufgabe auch durch Zerlegung des Integrals auf die vorhergehende Aufgabe zurückführen. Es ist nämlich, wenn man $x = -y$ setzt,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{a^2+x^2} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}$$
$$= -\int_{+\infty}^{0}\frac{dy}{a^2+y^2} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}$$
$$= 2\int_0^{\infty}\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{a}.$$

5.) $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b=\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^b = 2\lim_{b=\infty}\sqrt{b} - 2 = \infty.$$

6.) $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}} = -2\lim_{b=\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_1^b = 2 - 2\lim_{b=\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right) = 2.$$

7.) $$\int_a^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b=\infty}\left[\ln x\right]_a^b = \lim_{b=\infty}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \infty.$$

8.) $$\int_0^{\infty}\cos x\,dx = \lim_{b=\infty}\left[\sin x\right]_0^b = \lim_{b=\infty}\sin b.$$

Dieser Ausdruck nähert sich keiner bestimmten Grenze; in diesem Falle wird also das Integral *unbestimmt*, wenn

man die obere (oder untere) Grenze unendlich groß werden läßt.

9.) $$\int_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{b=\infty}\left[-\cos x\right]_0^b = 1 - \lim_{b=\infty}\cos b.$$

Dieser Ausdruck wird ebenfalls unbestimmt. Davon kann man sich auch durch die geometrische Deutung überzeugen, denn das $\int_0^b \sin x\,dx$ stellt den Flächeninhalt der ebenen Figur dar, welche von der *Sinuslinie* mit der Gleichung

$$y = \sin x$$

(vergl. D.-R., Seite 401, Figur 80) und der X-Achse begrenzt wird. Dabei sind die Teile *über* der X-Achse mit *positivem* und die *unter* der X-Achse mit *negativem* Zeichen in Rechnung zu ziehen.

Auch bei der Kubatur der Rotationskörper war ein derartiges Integral bereits aufgetreten. In § 25, Aufgabe 13 erhielt man für das Volumen des Körpers, welcher durch Rotation der *Zissoide* um die Asymptote $x = 2a$ entsteht, einen Wert, der auch dann noch endlich bleibt, wenn y unendlich groß wird. Es war nämlich

$$x = 2a\sin^2\varphi, \quad y = 2a\frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi}, \quad x - 2a = -2a\cos^2\varphi,$$

$$V = \pi\int_0^y (x-2a)^2 dy$$

$$= 8a^3\pi\left[-\frac{1}{3}\cos^5\varphi\sin\varphi - \frac{1}{6}\cos^3\varphi\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{4}\varphi\right].$$

Für $\lim y = \infty$ wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also

$$V = \pi\int_0^\infty (x-2a)^2 dy = a^3\pi^2.$$

§ 52.

Integration von Differential-Funktionen, die an den Grenzen des Integrals unstetig werden.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 166 bis 168.)

Bei der Erklärung des bestimmten Integrals durch Formel Nr. 4 der Tabelle, nämlich durch die Gleichung

$$(1.)\qquad \int_a^b F'(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

war bisher auch die Voraussetzung gemacht worden, daß $F'(x)$ in dem Intervalle von a bis b stetig sei. Jetzt möge aber $F'(x)$ stetig sein nur für

$$a \leqq x < b,$$

während

$$(2.)\qquad F'(b) = \pm \infty$$

ist. Bezeichnet man dann mit β eine beliebig kleine positive Größe, so gilt für

$$\int_a^{b-\beta} F'(x)dx = F(b-\beta) - F(a)$$

noch die frühere Erklärung des bestimmten Integrals, wie klein β auch sein mag. Dem entsprechend möge $\int_a^b F'(x)dx$ erklärt werden durch die Gleichung

$$(3.)\qquad \int_a^b F'(x)dx = \lim_{\beta=0} \int_a^{b-\beta} F'(x)dx = \lim_{\beta=0} F(b-\beta) - F(a).$$

Es sei z. B.

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{b-x}}, \quad \text{also} \quad F'(b) = \pm \infty,$$

dann wird

$$\int_a^b F'(x)dx = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}} = -2 \lim_{\beta=0} [\sqrt{b-x}]_a^{b-\beta}$$

$$= -2\left(\lim_{\beta=0} \sqrt{\beta} - \sqrt{b-a}\right) = 2\sqrt{b-a}.$$

Bleibt $F'(x)$ stetig für

$$a < x \leqq b,$$

während

$$F'(a) = \pm \infty \tag{4.}$$

ist, so bezeichne man mit α eine beliebig kleine positive Größe, dann gilt für

$$\int_{a+\alpha}^{b} F'(x)dx = F(b) - F(a + \alpha)$$

noch die frühere Erklärung des bestimmten Integrals, wie klein auch α sein mag. Dem entsprechend möge $\int_a^b F'(x)dx$ erklärt werden durch die Gleichung

$$\int_a^b F'(x)dx = \lim_{\alpha=0} \int_{a+\alpha}^{b} F'(x)dx = F(b) - \lim_{\alpha=0} F(a + \alpha). \tag{5.}$$

Es kann auch vorkommen, daß beide Fälle vereinigt sind, daß also

$$F'(a) = \pm \infty \quad \text{und} \quad F'(b) = \pm \infty, \tag{6.}$$

daß $F'(x)$ aber stetig ist für

$$a < x < b;$$

dann wird $\int_a^b F'(x)dx$ erklärt durch die Gleichung

$$\int_a^b F'(x)dx = \lim_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} \int_{a+\alpha}^{b-\beta} F'(x)dx = \lim_{\beta=0} F(b - \beta) - \lim_{\alpha=0} F(a + \alpha). \tag{7.}$$

Beispiele von derartigen Integralen waren bei der Quadratur der Kurven mehrfach aufgetreten. So ergab sich bei Aufgabe 8 in § 19 für den Flächeninhalt der ebenen Figur, welche oben von der *verallgemeinerten Hyperbel*

$$y = \sqrt[n]{2p} \cdot x^{-\frac{m}{n}}$$

begrenzt wird,

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \frac{n\sqrt[n]{2p}}{n - m}\left(x_2^{\frac{n-m}{n}} - x_1^{\frac{n-m}{n}}\right). \tag{8.}$$

Ist $n > m$, so wird $\lim_{x_1=0} x_1^{\frac{n-m}{n}} = 0$, und man erhält für

$$(9.)\qquad F = \int_0^{x_2} y\,dx = \frac{n\sqrt[n]{2p}}{n-m}\,x_2^{\frac{n-m}{n}} = \frac{nx_2y_2}{n-m}$$

einen endlichen Wert, obgleich y unendlich groß wird für $x = 0$, so daß sich der Flächenstreifen längs der Y-Achse ins Unendliche erstreckt.

Ferner fand man bei Aufgabe 12 in § 19 für den Flächeninhalt der ebenen Figur, welche von der *Zissoide* mit den Gleichungen

$$(10.)\qquad x = 2a\sin^2\varphi,\quad y = 2a\frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi}$$

begrenzt wird,

$$(11.)\qquad F = \int_0^x y\,dx = 8a^2\int_0^\varphi \sin^4\varphi\,d\varphi$$
$$= a^2[3\varphi - \cos\varphi(2\sin^3\varphi + 3\sin\varphi)].$$

Für $x = 2a$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird y unendlich groß, so daß sich der Flächenstreifen längs der Asymptote $x = 2a$ ins Unendliche erstreckt. Trotzdem bleibt

$$(12.)\quad F = \int_0^{2a} y\,dx = a^2\lim_{\varphi=\frac{\pi}{2}}[3\varphi - \cos\varphi(2\sin^3\varphi + 3\sin\varphi)] = \frac{3a^2\pi}{2}$$

endlich.

Man erkennt aus den angeführten Beispielen, daß bei dieser Erklärung das bestimmte Integral auch dann noch als der Flächeninhalt einer ebenen Figur betrachtet werden kann, wenn die Funktion unter dem Integralzeichen an den Grenzen unendlich groß wird.

Übungs-Beispiele.

$$1.)\quad \int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2}} = \lim_{\alpha=0}\int_{a+\alpha}^b (x-a)^{-\frac{2}{3}}dx = 3\lim_{\alpha=0}\left[\sqrt[3]{x-a}\right]_{a+\alpha}^b$$
$$= 3\sqrt[3]{b-a} - 3\lim_{\alpha=0}\sqrt[3]{\alpha} = 3\sqrt[3]{b-a}.$$

2.) $$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{\alpha=0}\int_{a+\alpha}^b \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{\alpha=0}\left[\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)\right]_a^b$$

$$= \ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right) - \lim_{\alpha=0}\ln\left(\frac{a+\alpha+\sqrt{2a\alpha+}}{a}\right.$$

$$= \ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right).$$

3.) $$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \lim_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}\int_{a+\alpha}^{b-\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

Nun ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-ab+(a+b)x-x^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab - \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (a+b)x + \right.}}$$

oder, wenn man

$$x - \frac{a+b}{2} = t, \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = c^2,$$

also

$$dx = dt, \quad 2c = b-a$$

setzt,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{c^2-t^2}} = \arcsin\left(\frac{t}{c}\right)$$

$$= \arcsin\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right).$$

Deshalb wird

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \lim_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}\left[\arcsin\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)\right]_{a+\alpha}^{b-\beta}$$

$$= \lim_{\beta=0}\arcsin\left(\frac{b-2\beta-a}{b-a}\right) - \lim_{\alpha=0}\left(\frac{a+2\alpha}{b-}\right.$$

$$= \arcsin(+1) - \arcsin(-1) = 2\arcsin 1$$

4.) $$\int_0^b \frac{dx}{x^2-b^2} = \lim_{\beta=0}\left[\frac{1}{2b}\ln\left(\frac{b-x}{b+x}\right)\right]_0^{b-\beta} = \frac{1}{2b}\lim_{\beta=0}\ln\left(\frac{\beta}{2b-\beta}\right) = -$$

§ 53.

Integration von Differential-Funktionen, die zwischen den Integrations-Grenzen unendlich werden.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 169.)

Wird die Funktion $F'(x)$ für $x = c$ unendlich groß, wobei c zwischen den Integrations-Grenzen a und b liegen möge, während $F'(x)$ stetig bleibt für

$$a \leqq x < c \quad \text{und für} \quad c < x \leqq b,$$

dann soll $\int\limits_a^b F'(x)dx$ erklärt werden durch die Gleichung

$$(1.) \quad \int\limits_a^b F'(x)dx = \lim_{\gamma=0} \int\limits_a^{c-\gamma} F'(x)dx + \lim_{\delta=0} \int\limits_{c+\delta}^b F'(x)dx$$

$$= F(b) - F(a) + \lim_{\gamma=0} F(c-\gamma) - \lim_{\delta=0} F(c+\delta),$$

wobei γ und δ beliebig kleine positive Größen sind.

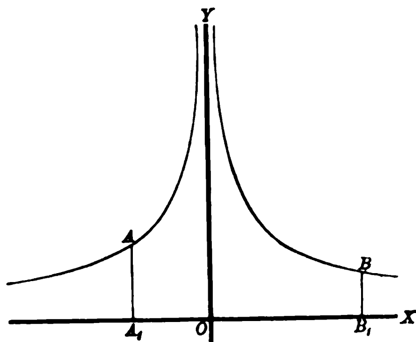
Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Der Gleichung

$$(2.) \qquad x^2y^3 = 1, \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

entspricht eine Kurve (Fig. 100), welche die Y-Achse zur Asymptote und außerdem zur Symmetrie-Achse hat; man soll den Flächeninhalt der Figur berechnen, welche oben durch diese Kurve, unten durch die X-Achse, links durch die Ordinate $x = -1$ und rechts durch die Ordinate $x = +2$ begrenzt wird.

Fig. 100.



Auflösung. Längs der Y-Achse erstreckt sich die Figur ins Unendliche, denn für $x = 0$ wird $y = \infty$, folglich ist in diesem Falle

(3.) $$F = \lim_{\gamma=0} \int_{-1}^{-\gamma} y dx + \lim_{\delta=0} \int_{+\delta}^{+2} y dx$$

$$= \lim_{\gamma=0} \int_{-1}^{-\gamma} x^{-\frac{2}{3}} dx + \lim_{\delta=0} \int_{+\delta}^{+2} x^{-\frac{2}{3}} dx$$

$$= 3 \lim_{\gamma=0} \left[\sqrt[3]{x}\right]_{-1}^{-\gamma} + 3 \lim_{\delta=0} \left[\sqrt[3]{x}\right]_{+\delta}^{+2},$$

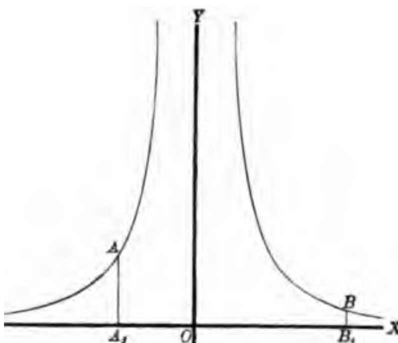
also

(4.) $$F = 3[1 - \lim_{\gamma=0} \sqrt[3]{\gamma} + \sqrt[3]{2} - \lim_{\delta=0} \sqrt[3]{\delta}] = 3(1 + \sqrt[3]{2}).$$

Man erhält also für den Flächeninhalt der Figur, die sich längs der Y-Achse bis ins Unendliche erstreckt, einen endlichen Wert.

Aufgabe 2. Der Gleichung

Fig. 101.



(5.) $$x^2 y = 1, \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{x^2}$$

entspricht eine Kurve (Fig. 101), welche gleichfalls die Y-Achse zur Asymptote und zur Symmetrie-Achse hat; man soll den Flächeninhalt der ebenen Figur berechnen, welche oben durch diese Kurve, unten durch die X-Achse, links durch die Ordinate $x = -1$ und rechts durch die Ordinate $x = +2$ begrenzt wird.

Auflösung. Längs der Y-Achse erstreckt sich die Figur bis ins Unendliche, denn für $x = 0$ wird $y = \infty$, folglich wird auch in diesem Falle

(6.) $$F = \lim_{\gamma=0} \int_{-1}^{-\gamma} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\delta=0} \int_{+\delta}^{+2} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{\gamma=0} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{-\gamma} + \lim_{\delta=0} \left[-\frac{1}{x}\right]_{+\delta}^{+2}$$

$$= \lim_{\gamma=0} \frac{1}{\gamma} - 1 - \frac{1}{2} + \lim_{\delta=0} \frac{1}{\delta} = \infty.$$

Man hätte einen *Fehler* gemacht, wenn man geschrieben hätte

$$F = \int_{-1}^{+2} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{+2} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}.$$

Man sieht, daß die geometrische Deutung des bestimmten Integrals, wie sie früher unter Ausschluß von Unstetigkeiten gegeben wurde, bei der Erklärung des bestimmten Integrals durch Gleichung (1.) auch dann noch bestehen bleibt, wenn $F'(x)$ für einzelne Werte von x zwischen den Grenzen a und b unstetig wird. In dem Falle nämlich, wo $F'(x)$ für n verschiedene Werte von x zwischen den Grenzen a und b unstetig wird, muß man $\int_a^b F'(x)dx$ in $n+1$ Integrale zerlegen und bei jedem einzelnen das in Gleichung (1.) angedeutete Grenzverfahren anwenden.

Aufgabe 3. $\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = ?$

Auflösung. Da die Funktion unter dem Integralzeichen für $x = 0$ unendlich groß wird, so muß man das Integral wieder in zwei andere zerlegen. Man setzt also

(7.)
$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \lim_{\gamma=0} \int_{-a}^{-\gamma} \frac{dx}{x} + \lim_{\delta=0} \int_{+\delta}^{+b} \frac{dx}{x}$$
$$= \lim_{\gamma=0} \ln\left(\frac{\gamma}{a}\right) + \lim_{\delta=0} \ln\left(\frac{b}{\delta}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \lim \ln\left(\frac{\gamma}{\delta}\right).$$

In diesem Falle hängt der Wert des bestimmte Integrals von dem Verhältnisse $\frac{\gamma}{\delta}$ ab. Da dieses Verhältnis unendlich viele Werte haben darf, so hat auch das Integral unendlich viele Werte. Für $\gamma = \delta$ wird

$$(8.)\qquad \int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln 1 = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Dieser Wert heißt nach *Cauchy* „der ***Hauptwert***" des bestimmten Integrals.

Aufgabe 4. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-c)^4}} = ?$ wenn $a < c < b$.

Auflösung. Indem man wieder die Zerlegung des Integrals ausführt, findet man

$$(9.)\qquad \int_a^b \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-c)^4}} = \int_a^b (x-c)^{-\frac{4}{5}}dx$$

$$= \lim_{\gamma=0}\int_a^{c-\gamma}(x-c)^{-\frac{4}{5}}dx + \lim_{\delta=0}\int_{c+\delta}^{b}(x-c)^{-\frac{4}{5}}dx$$

$$= 5\lim_{\gamma=0}\left[\sqrt[5]{x-c}\right]_a^{c-\gamma} + 5\lim_{\delta=0}\left[\sqrt[5]{x-c}\right]_{c+\delta}^{b}$$

$$= 5\left[\lim_{\gamma=0}\sqrt[5]{-\gamma} - \sqrt[5]{a-c} + \sqrt[5]{b-c} - \lim_{\delta=0}\sqrt[5]{\delta}\right]$$

$$= 5(\sqrt[5]{b-c} + \sqrt[5]{c-a}).$$

§ 54.

Näherungsmethoden durch Einführung einfacherer Funktionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 170.)

In vielen Fällen, wo das *unbestimmte* Integral einer Differential-Funktion schwer zu ermitteln ist, kann man den Wert des *bestimmten* Integrals durch andere Hilfsmittel genau oder doch mit großer Annäherung berechnen.

Von diesen Hilfsmitteln sollen hier einige angeführt werden.

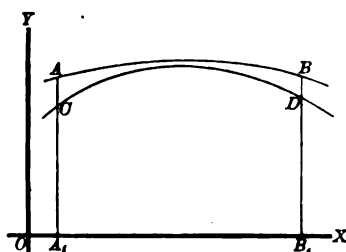
Aus der geometrischen Deutung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)dx$ als Flächeninhalt einer ebenen Figur, welche oben begrenzt ist durch die Kurve $y = f(x)$, rechts und

links durch die Ordinaten $x = b$, bezw. $x = a$ und unten durch die X-Achse (vergl. Formel Nr. 4 der Tabelle), ergibt sich sofort der folgende

Satz 1. *Sind $y_1 = \varphi(x)$ und $y = f(x)$ zwei Funktionen, welche zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ sich durch Kurven geometrisch darstellen lassen, und bleibt in diesem Intervalle $\varphi(x)$ beständig gleich oder kleiner als $f(x)$, so ist auch*

(1.) $$\int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b f(x)dx;$$

Fig. 102.



denn, wie man aus Fig. 102 ersieht, hat die von der Kurve $y = f(x)$ begrenzte Figur A_1B_1BA einen größeren Flächeninhalt als die von der anderen Kurve $y_1 = \varphi(x)$ begrenzte Figur A_1B_1DC. Dabei ist zunächst vorausgesetzt, daß die Kurven beide *über* der X-Achse liegen; der Satz bleibt aber auch dann noch richtig, wenn diese Voraussetzung *nicht* erfüllt ist.

Man kann den Beweis auch unabhängig von der geometrischen Deutung des bestimmten Integrals führen, indem man dasselbe als eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen $\varphi(x)dx$ bezw. $f(x)dx$ betrachtet. Aus

(2.) $$\varphi(x)dx \leqq f(x)dx$$

folgt dann auch die Ungleichheit der Summen, also

$$\int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b f(x)dx.$$

Satz 2. *Liegt die Funktion $f(x)$ für alle Werte von x innerhalb des Intervalles von a bis b der Größe nach beständig zwischen den Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, ist also*

(3.) $$\varphi(x) \leqq f(x) \leqq \psi(x),$$

so ist auch

$$(4.)\qquad \int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b \psi(x)dx.$$

Dieser Satz ergibt sich unmittelbar aus Satz 1.

Übungs-Beispiele.

Aufgabe 1. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = ?$

Auflösung. Da x beständig ein positiver echter Bruch ist, so gelten die folgenden Ungleichungen:

$$0 \leqq x < 1,$$
$$0 \leqq x^3 \leqq x^2,$$
$$1 \geqq 1 - x^3 \geqq 1 - x^2,$$
$$1 \geqq \sqrt{1-x^3} \geqq \sqrt{1-x^2},$$
$$1 \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

folglich wird auch

$$(5.)\qquad \int_0^{0,5} dx < \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

oder

$$(6.)\qquad 0,5 < \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} = 0,523\,598\,8.$$

§ 55.
Mittelwertsätze.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 171, 171a und 172.)

Es sei jetzt

$$(1.)\qquad f(x) = g(x) \,.\, h(x),$$

wobei die stetige Funktion $h(x)$ in dem Intervalle von a bis b zunächst *beständig positiv* oder doch wenigstens *nicht negativ* sein möge; es sei also $h(x) \geqq 0$. Ferner erreiche die in diesem Intervalle stetige Funktion $g(x)$ ihren *kleinsten*

Wert K für $x = x_1$ und ihren größten Wert G für $x = x_2$, wobei x_1 und x_2 noch zwischen den Grenzen a und b liegen oder mit diesen Grenzen zusammenfallen sollen; es sei also

(2.) $$g(x_1) = K \quad \text{und} \quad g(x_2) = G,$$

dann wird

(3.) $$K \leqq g(x) \leqq G,$$

und deshalb auch

(4.) $$K \,.\, h(x)dx \leqq g(x) \,.\, h(x)dx = f(x)dx \leqq G \,.\, h(x)dx;$$

folglich wird nach Satz 2 in § 54

(5.) $$K\int_a^b h(x)dx < \int_a^b g(x) \,.\, h(x)dx < G\int_a^b h(x)dx.$$

Erklärt man also die Größe M durch die Gleichung

(6.) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x) \,.\, h(x)dx = M\int_a^b h(x)dx,$$

so folgt aus Ungleichung (5.)

(7.) $$K \leqq M \leqq G,$$

oder

(7a.) $$g(x_1) \leqq M \leqq g(x_2).$$

Nach einem bekannten Satze über stetige Funktionen muß es daher zwischen x_1 und x_2 einen Wert von x geben — er heiße ξ —, für welchen

(8.) $$M = g(\xi)$$

wird. Da ξ zwischen x_1 und x_2 liegt, so muß ξ auch zwischen a und b liegen; es ist also

(9.) $$a \leqq \xi \leqq b.$$

Erklärt man also eine Größe Θ durch die Gleichung

(10.) $$\Theta = \frac{\xi - a}{b - a},$$

so liegt Θ zwischen 0 und 1, und man erhält

(11.) $$\xi = a + \Theta(b - a), \quad M = g[a + \Theta(b - a)].$$

Deshalb geht Gleichung (6.) über in

(12.) $$\int_a^b g(x) \,.\, h(x)dx = g[a + \Theta(b - a)]\int_a^b h(x)dx.$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung mit -1 multipliziert, folgt

$$(12a.)\qquad -\int_a^b g(x)\,.\,h(x)dx = \int_a^b g(x)[-h(x)]dx$$
$$= g[a + \Theta(b-a)]\int_a^b [-h(x)]dx,$$

oder mit anderen Worten, die Gleichung (12.) bleibt auch dann noch richtig, wenn die stetige Funktion $h(x)$ in dem Intervalle von a bis b ***niemals positiv*** wird, wenn also $h(x) \leqq 0$ ist. Es genügt also für die Gültigkeit des in Gleichung (12.) enthaltenen Satzes, welcher *„der erste Mittelwertsatz“**) genannt wird, die Voraussetzung, daß $h(x)$ zwischen den Grenzen a und b das Vorzeichen nicht wechselt.

Aus Gleichung (12.) folgen noch unmittelbar die Formeln

$$(13.)\qquad \int_0^x g(x)\,.\,h(x)dx = g(\Theta x)\int_0^x h(x)dx,$$

$$(14.)\qquad \int_a^{a+c} g(x)\,.\,h(x)dx = g(a+\Theta c)\int_a^{a+c} h(x)dx.$$

Setzt man

$$h(x) = 1, \quad \text{also} \quad \int_a^b h(x)dx = \int_a^b dx = b - a,$$

so geht Gleichung (12.) über in

$$(15.)\qquad \int_a^b g(x)dx = (b-a)g[a + \Theta(b-a)],$$

oder, wenn man die Buchstaben g und f miteinander vertauscht, in

$$(15a.)\qquad \int_a^b f(x)dx = (b-a)f[a + \Theta(b-a)].$$

Für diesen besonderen Fall des ersten Mittelwertsatzes ergibt sich unmittelbar die folgende geometrische Deutung. Der Gleichung $y = f(x)$ entspreche die Kurve AB, dann ist der Flächeninhalt der ebenen Figur

---

*) Der *zweite* Mittelwertsatz möge hier übergangen werden.

16.) $$A_1B_1BA = \int_a^b f(x)dx.$$

Fig. 108.

Da nun der Kurvenbogen lB stetig ist, so gibt es zwichen A und B *mindestens einen* 'unkt P, welcher die Eigenchaft besitzt, daß die Gerade lS, welche durch P zur X-Achse arallel gezogen ist, ein Rechteck $_1B_1SR$ bestimmt, welches mit A_1B_1BA gleichen Flächenhalt besitzt. Macht man nämlich

$$OQ = a + \Theta(b - a),$$

wird in diesem Rechteck

$$A_1B_1 = b - a, \quad QP = f[a + \Theta(b - a)],$$

so

7.) $$A_1B_1BA = \int_a^b f(x)dx = A_1B_1SR = (b - a)f[a + \Theta(b - a)].$$

§ 56.

Neuer Beweis des *Taylor*schen Lehrsatzes.

Aus den Sätzen, welche in den vorhergehenden Paraaphen hergeleitet worden sind, ergibt sich ein äußerst ıfacher Beweis des *Taylor*schen Lehrsatzes.

Die Funktion $f(x)$ sei mit ihren $n + 1$ ersten Ableingen stetig für alle Werte von x zwischen a und $a + h$, .nn findet man durch partielle Integration, nämlich nach r Formel

.) $$\int u dv = uv - \int v du,$$

dem man

$$u = f'(a + h - t), \quad dv = dt,$$

so

$$du = -f''(a + h - t)dt, \quad v = t$$

tzt,

) $$\int_0^t f'(a + h - t)dt = tf'(a + h - t) + \int_0^t f''(a + h - t)tdt.$$

Für

$$u = f''(a+h-t), \quad dv = tdt$$

erhält man

$$du = -f'''(a+h-t)dt, \quad v = \frac{t^2}{2!},$$

$$(3.)\quad \int_0^t f''(a+h-t)tdt = \frac{t^2}{2!}f''(a+h-t) + \int_0^t f'''(a+h-t)\frac{t^2}{2!}dt.$$

Wenn man in dieser Weise fortfährt, findet man die Gleichungen

$$(4.)\quad \int_0^t f'''(a+h-t)\frac{t^2}{2!}dt = \frac{t^3}{3!}f'''(a+h-t) + \int_0^t f^{(4)}(a+h-t)\frac{t^3}{3!}dt,$$

. . . .

$$(5.)\quad \int_0^t f^{(n)}(a+h-t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt = \frac{t^n}{n!}f^{(n)}(a+h-t) + \int_0^t f^{(n+1)}(a+h-t)\frac{t^n}{n!}dt$$

Durch Addition der Gleichungen (2.) bis (5.) ergibt sich daher

$$(6.)\quad \int_0^t f'(a+h-t)dt = \frac{t}{1!}f'(a+h-t) + \frac{t^2}{2!}f''(a+h-t) + \frac{t^3}{3!}f'''(a+h-t) + \cdots + \frac{t^n}{n!}f^{(n)}(a+h-t) + \int_0^t f^{(n+1)}(a+h-t)\frac{t^n}{n!}dt.$$

Beachtet man, daß

$$(7.)\quad \int_0^t f'(a+h-t)dt = -f(a+h-t) + f(a+h)$$

ist, so geht Gleichung (6.) für $t = h$ über in

$$(8.)\quad f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R$$

wobei

(9.) $$R = \int_0^h f^{(n+1)}(a + h - t)\frac{t^n}{n!}dt$$

ist. Nach dem Mittelwertsatz (Formel Nr. 171a der Tabelle) ist daher, wenn man $1 - \Theta$ mit Θ_1 bezeichnet,

(10.) $$R = f^{(n+1)}(a + h - \Theta h)\int_0^h \frac{t^n dt}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(a + \Theta_1 h)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Da Θ zwischen 0 und 1 liegt, muß in diesem Ausdrucke auch Θ_1 zwischen 0 und 1 liegen. Setzt man zum Schlusse noch $a = x$ und schreibt Θ statt Θ_1, so erhält Gleichung (8.) die Form

(11.) $$f(x + h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + R,$$

wo

(12.) $$R = \frac{f^{(n+1)}(x + \Theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

ist. Dieses Resultat stimmt genau mit D.-R., Formel Nr. 89 der Tabelle überein.

§ 57.

Gliedweise Integration unendlicher Reihen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 173.)

Sind in der unendlichen Reihe

(1.) $$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

die einzelnen Glieder

(2.) $$u_0 = f_0(x), \quad u_1 = f_1(x), \quad u_2 = f_2(x), \quad u_3 = f_3(x), \ldots$$

stetige Funktionen von x, so war in § 56 der Differential-Rechnung (Seite 268) der Begriff der *gleichmäßigen Konvergenz* folgendermaßen erklärt worden:

„*Die Reihe*

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

heißt in dem Intervalle von a bis b gleichmäßig konvergent,

wenn zu jeder beliebig kleinen Größe ε eine ganze Zahl m so bestimmt werden kann, daß für $n \geqq m$ der absolute Betrag von $S_{n+p}(x) - S_n(x)$ und deshalb auch der absolute Betrag von $R_n(x)$ kleiner bleiben als ε, welchen Wert x auch in dem Intervalle von a bis b haben mag."

Dabei ist

$$R_n(x) = f(x) - [f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)], \tag{3.}$$

oder

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x) + R_n(x). \tag{4.}$$

Daraus folgt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_0(x)dx + \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \int_a^b f_{n-1}(x)dx + \int_a^b R_n(x)dx. \tag{5.}$$

Da sich aus Gleichung (3.) ergibt, daß auch $R_n(x)$ für die betrachteten Werte von x eine stetige Funktion ist, so kann man für die Berechnung von $\int_a^b R_n(x)dx$ den in Formel Nr. 172 der Tabelle ausgesprochenen Mittelwertsatz anwenden, nach welchem

$$\int_a^b R_n(x)dx = (b-a)R_n[a + \Theta(b-a)] \tag{6.}$$

ist. Macht man die Voraussetzung, daß die vorgelegte Reihe in dem Intervalle von a bis b gleichmäßig konvergent ist, so wird $R_n(x)$ für alle Werte von x zwischen a und b beliebig klein, wenn n (gleich oder) größer als m ist, folglich wird auch $R_n[a + \Theta(b-a)]$, und da $b - a$ eine endliche Größe ist, auch $\int_a^b R_n(x)dx$ beliebig klein. Man findet also $\int_a^b f(x)dx$, indem man die einzelnen Glieder der Reihe $u_0 = f_0(x)$, $u_1 = f_1(x)$, $u_2 = f_2(x), \ldots$ integriert, denn der Rest $\int_a^b R_n(x)dx$, welchen man bei Berücksichtigung von n Gliedern vernachlässigt, wird für hinreichend große Werte von n beliebig klein. Dadurch erhält man den folgenden

Satz. *Sind die Funktionen* $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ *für alle Werte von* x *zwischen* a *und* b *stetig, und ist die Reihe*

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

in dem betrachteten Intervalle gleichmäßig konvergent, so ist auch die Reihe

$$\int_a^b u_0 dx + \int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \cdots$$

in diesem Intervalle gleichmäßig konvergent, und ihre Summe ist gleich $\int_a^b f(x)dx$.

Dabei darf man noch die obere Grenze mit x bezeichnen, so daß sich ergibt

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^x u_0 dx + \int_a^x u_1 dx + \int_a^x u_2 dx + \cdots. \tag{7.}$$

Dieser Satz hat schon in der Differential-Rechnung bei der Methode der unbestimmten Koeffizienten Anwendung gefunden (D.-R., § 47).

Damals setzte man

$$f(x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_n x^n + R, \tag{8.}$$

also

$$f'(x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \cdots + nA_n x^{n-1} + \frac{dR}{dx}. \tag{9.}$$

Wie die Gleichung (9.) aus Gleichung (8.) hervorgeht durch *Differentiation* der einzelnen Glieder, so findet man umgekehrt die Gleichung (8.) aus Gleichung (9.) durch *Integration* der einzelnen Glieder zwischen den Grenzen 0 und x, und zwar erhält man dadurch $f(x) - f(0)$, woraus sich für A der Wert $f(0)$ ergibt. Dabei erhielt man den Satz: *Ist für hinreichend große Werte von* n *die Größe* $\frac{dR}{dx}$ *beliebig klein, so gilt dasselbe auch von* R.

Man erkennt, daß dieser Satz nur ein besonderer Fall des eben bewiesenen Satzes ist; denn, während es sich damals nur um Potenzreihen von x handelte, sind jetzt u_0, u_1, $u_2, \ldots$ beliebige stetige Funktionen von x.

Die Beispiele, welche bei der Methode der unbestimmten Koeffizienten in der Differential-Rechnung gegeben wurden, nämlich die Entwicklung von

$$(10.)\quad \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots \text{ für } -1 < x \leqq +1,$$

$$(11.)\quad \operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots \text{ für } -1 \leqq x \leqq +1,$$

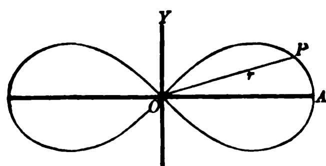
$$(12.)\quad \arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$\text{für } -1 \leqq x \leqq +1$$

nach steigenden Potenzen von x, eignen sich daher auch als Beispiele für den vorliegenden Satz.

Aufgabe 1. Man soll die Länge des Bogens bei der *Lemniskate*

Fig. 104.



$$(13.)\quad r^2 = a^2\cos(2\varphi)$$

berechnen (Fig. 104).

Auflösung. Aus Gleichung (13.) folgt

$$r dr = -a^2\sin(2\varphi)d\varphi,$$

oder

$$(14.)\quad \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{r}{a^2\sin(2\varphi)},$$

$$(15.)\quad \left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = 1 + \frac{r^4}{a^4\sin^2(2\varphi)} = 1 + \frac{r^4}{a^4 - r^4} = \frac{a^4}{a^4 - r^4}$$

$$(16.)\quad ds = \frac{a^2 dr}{\sqrt{a^4 - r^4}},\quad s = a^2\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}.$$

Setzt man

$$r = at,\quad \text{also}\quad dr = adt,$$

so wird

$$(17.)\quad s = a\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}.$$

Da $t^4 \leqq 1$ ist, so wird nach dem binomischen Lehrsatze

$$(18.)\quad \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} = (1-t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1.3}{2.4}t^8 + \frac{1.3.5}{2.4.6}t^{12} + \cdots,$$

also

$$(19.)\quad s = a\left(\frac{t}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{t^5}{5} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{t^9}{9} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{t^{13}}{13} + \cdots\right.$$

$$= a\left(\frac{r}{a} + \frac{1}{2}\,\frac{r^5}{5a^5} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{r^9}{9a^9} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{r^{13}}{13a^{13}} + \cdots\right).$$

Aufgabe 2. $\int\limits_{0,5}^{4} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = ?$

Auflösung. Nach dem binomischen Lehrsatze ist

$$(20.)\quad \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1.3}{2.4}x^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^9 + - \cdots,$$

so lange $-1 < x < +1$ ist. Deshalb kann man diese Entwickelung nur benutzen, um

$$\int\limits_{0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \lim_{\gamma=0} \int\limits_{0,5}^{1-\gamma} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

berechnen; dabei findet man aus Gleichung (20.)

$$(21.)\quad \int\limits_{0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} =$$

$$\lim_{\gamma=0}\left[\frac{x}{1} - \frac{1}{2}\,\frac{x^4}{4} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^7}{7} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^{10}}{10} + - \cdots\right]_{0,5}^{1-\gamma}.$$

Da die Reihe in der eckigen Klammer auch noch für $x = 1$ konvergent bleibt, so erhält man

$$(22.)\quad \int\limits_{0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = 1 - \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.7} - \frac{1.3.5}{2.4.6.10} + - \cdots$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4.2^4} - \frac{1.3}{2.4.7.2^7} + \frac{1.3.5}{2.4.6.10.2^{10}} - + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4}\cdot\frac{15}{16} + \frac{1.3}{2.4.7}\cdot\frac{127}{128} - \frac{1.3.5}{2.4.6.10}\cdot\frac{1023}{1024} + - \cdots.$$

Die Entwickelung in Gleichung (20.) gilt nicht mel wenn $x > 1$ ist. Nach dem binomischen Lehrsatze wi aber, wenn $|b| > |a|$ ist,

$$(23.)\quad (a+b)^m = b^m + \binom{m}{1} a b^{m-1} + \binom{m}{2} a^2 b^{m-2} + \binom{m}{3} a^3 b^{m-3} + \cdot$$

Setzt man also in dem Falle, wo $x > 1$ ist,

$$(24.)\qquad a = 1, \quad b = x^3,$$

so wird die Bedingung, daß $|b| > |a|$ sein soll, erfü und man erhält

$$(25.)\quad (1+x^3)^m = x^{3m} + \binom{m}{1} x^{3m-3} + \binom{m}{2} x^{3m-6} + \binom{m}{3} x^{3m-9} + \cdot$$

also für $m = -\frac{1}{2}$

$$(26.)\quad \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^9}} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{\sqrt{x^{15}}} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{\sqrt{x^{21}}} + -$$

Dies gibt

$$(27.)\quad \int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \lim_{\delta=0}\Big[\int\limits_{1+\delta}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2}\int\limits_{1+\delta}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^9}} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\int\limits_{1+\delta}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^{15}}}$$

$$- \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\int\limits_{1+\delta}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^{21}}} + - \cdots\Big],$$

oder

$$(28.)\quad \int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \lim_{\delta=0}\Big[-\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{7\sqrt{x^7}} - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{2}{13\sqrt{x^{13}}}$$

$$+ \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{2}{19\sqrt{x^{19}}} - + \cdots\Big]_{1+\delta}^4.$$

Da die Reihe in der eckigen Klammer auch noch : $x = 1$ konvergent bleibt, so erhält man

$$(29.)\quad \int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = -\Big(1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{7 \,.\, 4^3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\,\frac{1}{13 \,.\, 4^6} - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\,\frac{1}{19 \,.\, 4^9} + - \cdots\Big)$$
$$+ 2\Big(1 - \frac{1}{2 \,.\, 7} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 13} - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 19} + - \cdots\Big)$$
$$= 2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \,.\, 7}\,\frac{2^7 - 1}{2^7} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 13}\,\frac{2^{13} - 1}{2^{13}} - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 19}\,\frac{2^{19} - 1}{2^{19}} + - \cdots\Big).$$

Durch Addition der Gleichungen (22.) und (29.) erhält man schließlich das gesuchte Integral

$$(30.)\qquad \int\limits_{0,5}^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \int\limits_{0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} + \int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

§ 58.

Berechnung der elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 174 bis 177.)

Das in dem vorhergehenden Paragraphen angegebene Verfahren kann man auch zur Berechnung der *elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung* benutzen. Das elliptische Normalintegral *erster* Gattung, auf welches sehr viele Aufgaben der Geometrie, Physik und Mechanik führen, hat die Form

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

wobei $k^2 < 1$ und $x \leqq 1$ sein mögen. Dann erhält man zunächst nach dem binomischen Lehrsatze

$$(1.)\quad \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}k^4x^4 + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}k^6x^6 + \cdots,$$

oder, wenn man der Kürze wegen, wie in Formel Nr. 121 der Tabelle,

(2.) $$c_1 = \frac{1}{2},\quad c_2 = \frac{1.3}{2.4},\ \ldots c_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}$$

setzt,

(3.) $$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} = 1 + c_1k^2x^2 + c_2k^4x^4 + c_3k^6x^6 + \cdots.$$

Nach Satz 8 in § 57 der Differential-Rechnung *ist* diese Potenzreihe *gleichmäßig konvergent* für $-1 \leqq x \leqq +1$, folglich ist auch die Reihe

(4.) $$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c_1k^2\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + c_2k^4\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} + c_3k^6\frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots$$

in demselben Intervalle gleichmäßig konvergent. Deshalb wird

(5.) $$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + c_1k^2\int\limits_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} + c_2k^4\int\limits_0^x \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} + c_3k^6\int\limits_0^x \frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots$$
$$= \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_nk^{2n}\int\limits_0^x \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nun ist aber nach Formel Nr. 121 der Tabelle

(6.) $$\int\limits_0^x \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = c_n\arcsin x - G_n(x).\sqrt{1-x^2},$$

wobei

$$G_1(x) = \frac{x}{2} = c_1x,$$

$$G_2(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{3.x}{4.2} = c_2\left(\frac{1}{c_1}\frac{x^3}{3} + \frac{x}{1}\right),$$

$$G_3(x) = \frac{x^5}{6} + \frac{5.x^3}{6.4} + \frac{5.3.x}{6.4.2} = c_3\left(\frac{1}{c_2}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{c_1}\frac{x^3}{3} + \frac{x}{1}\right),$$

. . . .

allgemein

(7.) $$G_n(x) = \frac{x^{2n-1}}{2n} + \frac{(2n-1)x^{2n-3}}{(2n)(2n-2)} + \cdots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3 . x}{(2n)(2n-2)\ldots 4 . 2}$$
$$= c_n\left(\frac{1}{c_{n-1}}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{1}{c_{n-2}}\frac{x^{2n-3}}{2n-3} + \cdots + \frac{1}{c_1}\frac{x^3}{3} + \frac{x}{1}\right).$$

Deshalb erhält man

(8.) $$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n^2 k^{2n}\right) \arcsin x$$
$$- \sqrt{1-x^2}\sum_{n=1}^{n=\infty} c_n k^{2n} G_n(x).$$

Von besonderem Interesse ist der Wert dieses Integrals, den man für $x = 1$ erhält und mit K bezeichnet. Es wird nämlich

(9.) $$K = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \lim_{\beta=0} \int\limits_0^{1-\beta} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n^2 k^{2n}\right),$$

oder

(10.) $$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 . 3}{2 . 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right].$$

Noch häufiger wird man durch Aufgaben aus der Geometrie, Physik und Mechanik auf elliptische Integrale *zweiter* Gattung geführt, die man auf die Normalform

$$\int\limits_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

bringen kann. Hier wird nach dem binomischen Lehrsatze

(11.) $$\sqrt{1-k^2x^2} = 1 - \frac{1}{2}k^2x^2 - \frac{1}{2 . 4}k^4x^4 - \frac{1 . 3}{2 . 4 . 6}k^6x^6 - \cdots$$
$$= 1 - c_1\frac{k^2x^2}{1} - c_2\frac{k^4x^4}{3} - c_3\frac{k^6x^6}{5} - \cdots,$$

oder

(12.) $$\sqrt{1-k^2x^2} = 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \frac{k^{2n}x^{2n}}{2n-1},$$

also

(13.) $$\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n k^{2n}}{2n-1} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Da diese Reihe zwischen den Grenzen 0 und x *gleichmäßig konvergent* ist, so erhält man

(14.) $$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n k^{2n}}{2n-1} \int_0^x \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

also nach Formel Nr. 121 der Tabelle, nämlich nach Gleichung (6.),

(15.) $$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n^2 k^{2n}}{2n-1}\right) \arcsin x$$
$$+ \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n k^{2n}}{2n-1} G_n(x).$$

Für $x = 1$ ergibt sich hieraus der Wert des Integrals den man mit E bezeichnet, nämlich

(15a.) $$E = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n^2 k^{2n}}{2n-1}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - c_1^2 k^2 - \frac{1}{3} c_2^2 k^4 - \frac{1}{5} c_3^2 k^6 - \cdots\right).$$

Auf ein solches Integral wird man z. B. bei der Rektifikation der Ellipse

(16.) $$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

geführt (vgl. Aufgabe 2 in § 27). Aus Gleichung (16.) folgt nämlich

(17.) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{a^4 - e^2x^2}{a^2(a^2-x^2)},$$

also

(18.) $$s = \frac{1}{a} \int_0^x \frac{dx\sqrt{a^4 - e^2x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Setzt man jetzt

(19.) $$x = at, \quad e = ak,$$

so wird

(20.) $$s = a\int_0^t \frac{dt\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}},$$

wobei die Bedingungen

(21.) $$t \leqq 1 \quad \text{und} \quad k < 1$$

wirklich erfüllt sind. Der Bogen s wird also, vom Faktor a abgesehen, dem in Gleichung (15.) berechneten elliptischen Normalintegral zweiter Gattung gleich, nur muß man die Integrations-Veränderliche x mit $t = \frac{x}{a}$ vertauschen.

§ 59.

Berechnung der elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung durch trigonometrische Reihen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 178 bis 181.)

Die in den Gleichungen (8.), (10.), (15.) und (15a.) des vorhergehenden Paragraphen angegebenen Reihen konvergieren nur langsam. Für die numerische Berechnung sind daher die folgenden Entwickelungen geeigneter. Setzt man

(1.) $$x = \sin\varphi, \quad k = \sin\alpha,$$

also

(2.) $$dx = \cos\varphi\, d\varphi, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos\varphi, \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\varphi,$$

so wird

(3.) $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}} = F(k; \varphi)$$

und

(4.) $$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^\varphi \sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}\, .\, d\varphi = E(k, \varphi).$$

Nun ist bekanntlich

$$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1,$$

also

$$\cos^4\beta + 2\cos^2\beta\sin^2\beta + \sin^4\beta = 1,$$

oder

$$(5.)\quad \cos^4\beta + \sin^4\beta = 1 - 2\sin^2\beta\cos^2\beta = 1 - \frac{\sin^2(2\beta)}{2}.$$

Daraus folgt

$$(\cos^2\beta + \sin^2\beta \,.\, e^{2\varphi i})(\cos^2\beta + \sin^2\beta \,.\, e^{-2\varphi i})$$
$$= \cos^4\beta + \sin^4\beta + \cos^2\beta\sin^2\beta(e^{3\varphi i} + e^{-2\varphi i})$$
$$= 1 + \tfrac{1}{4}\sin^2(2\beta)(e^{2\varphi i} - 2 + e^{-2\varphi i}) = 1 - \sin^2(2\beta)\sin^2\varphi,$$

oder

$$(6.)\quad 1 - \sin^2(2\beta)\sin^2\varphi = \cos^4\beta(1 + \mathrm{tg}^2\beta \,.\, e^{2\varphi i})(1 + \mathrm{tg}^2\beta \,.\, e^{-2\varphi i}),$$

oder, wenn man $2\beta = \alpha$, also $\beta = \frac{\alpha}{2}$ setzt,

$$(7.)\quad 1 - \sin^2\alpha\sin^2\varphi =$$
$$\cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot e^{2\varphi i}\right]\cdot\left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot e^{-2\varphi i}\right].$$

Wenn α zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, so ist $\mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 1$; außerdem ist der absolute Betrag von

$$e^{\pm 2\varphi i} = \cos(2\varphi) \pm i\sin(2\varphi)$$

$\cos^2(2\varphi) + \sin^2(2\varphi) = 1$, folglich kann man

$$\left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot e^{+2\varphi i}\right]^m \text{und } \left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot e^{-2\varphi i}\right]^m$$

nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln und erhält, wenn man der Kürze wegen $\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ mit ε bezeichnet,

$$(1 + \varepsilon^2 e^{2\varphi i})^m = 1 + \binom{m}{1}\varepsilon^2 e^{2\varphi i} + \binom{m}{2}\varepsilon^4 e^{4\varphi i} + \binom{m}{3}\varepsilon^6 e^{6\varphi i} + \cdots,$$

$$(1 + \varepsilon^2 e^{-2\varphi i})^m = 1 + \binom{m}{1}\varepsilon^2 e^{-2\varphi i} + \binom{m}{2}\varepsilon^4 e^{-4\varphi i} + \binom{m}{3}\varepsilon^6 e^{-6\varphi i} + \cdots.$$

Indem man diese beiden Gleichungen miteinander multipliziert und dabei die Regeln anwendet, welche (in D.-R., § 55 und 106, vergl. auch D.-R., Formel Nr. 117 der Tabelle) für die Multiplikation zweier unbedingt konvergenten Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad \text{und} \quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

gegeben worden sind, so erhält man, weil

$$e^{\lambda\varphi i} + e^{-\lambda\varphi i} = 2\cos(\lambda\varphi)$$

ist, die Gleichung

$$(8.)\qquad (1 + \varepsilon^2 e^{2\varphi i})^m (1 + \varepsilon^2 e^{-2\varphi i})^m =$$

$$1 + \binom{m}{1}\varepsilon^2 . 2\cos(2\varphi) + \varepsilon^4\left[\binom{m}{2}2\cos(4\varphi) + \binom{m}{1}^2\right]$$

$$+ \varepsilon^6\left[\binom{m}{3}2\cos(6\varphi) + \binom{m}{1}\binom{m}{2}2\cos(2\varphi)\right]$$

$$+ \varepsilon^8\left[\binom{m}{4}2\cos(8\varphi) + \binom{m}{1}\binom{m}{3}2\cos(4\varphi) + \binom{m}{2}^2\right]$$

$$+ \varepsilon^{10}\left[\binom{m}{5}2\cos(10\varphi) + \binom{m}{1}\binom{m}{4}2\cos(6\varphi) + \binom{m}{2}\binom{m}{3}2\cos(2\varphi)\right]$$

$$+ \cdots,$$

oder, wenn man die Glieder vereinigt, welche mit $\cos(2\lambda\varphi)$ multipliziert sind, und Gleichung (7.) beachtet,

$$(9.)\qquad (1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi)^m = A_0 + 2A_1\cos(2\varphi) + 2A_2\cos(4\varphi) + 2A_3\cos(6\varphi) + \cdots.$$

Dabei wird, wenn man $\binom{m}{0} = 1$ setzt,

$$(10.)\qquad A_0 = \cos^{4m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[1 + \binom{m}{1}^2\varepsilon^4 + \binom{m}{2}^2\varepsilon^8 + \binom{m}{3}^2\varepsilon^{12} + \cdots\right]$$

$$= \cos^{4m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{m}{n}^2\varepsilon^{4n},$$

$$(11.)\qquad A_1 = \cos^{4m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\binom{m}{1}\varepsilon^2 + \binom{m}{1}\binom{m}{2}\varepsilon^6 + \binom{m}{2}\binom{m}{3}\varepsilon^{10} + \cdots\right]$$

$$= \cos^{4m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{m}{n}\binom{m}{n+1}\varepsilon^{2+4n},$$

$$(12.)\qquad A_2 = \cos^{4m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\binom{m}{2}\varepsilon^4 + \binom{m}{1}\binom{m}{3}\varepsilon^8 + \binom{m}{2}\binom{m}{4}\varepsilon^{12} + \cdots\right]$$

$$= \cos^{4m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{m}{n}\binom{m}{n+2}\varepsilon^{4+4n},$$

allgemein

$$(13.)\quad A_\nu = \cos^{4m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\binom{m}{\nu}\varepsilon^{2\nu} + \binom{m}{1}\binom{m}{\nu+1}\varepsilon^{2\nu+4} + \binom{m}{2}\binom{m}{\nu+2}\varepsilon^{2\nu+8} + \cdots\right]$$

$$= \cos^{4m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{m}{n}\binom{m}{\nu+n}\varepsilon^{2\nu+4n}.$$

Wenn $\varepsilon = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ hinreichend klein ist, so sind die Größen A, wie sich zeigen läßt, durch stark konvergente Reihen ausgedrückt.

Die durch Gleichung (9.) dargestellte Reihe ist *gleichmäßig konvergent**), so daß man $\int\limits_0^\varphi (1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi)^m d\varphi$ erhält, indem man die einzelnen Glieder der Reihe integriert. Dies gibt

$$(14.)\quad \int\limits_0^\varphi (1 - \sin^2\alpha\sin^2\varphi)^m d\varphi = A_0\varphi + \frac{A_1}{1}\sin(2\varphi) + \frac{A_2}{2}\sin(4\varphi) + \frac{A_3}{3}\sin(6\varphi) + \cdots.$$

In dieser Formel sind auch die *„elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung“*, nämlich die Integrale

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}} = F(k, \varphi)$$

und

$$\int\limits_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\limits_0^\varphi \sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi} = E(k, \varphi)$$

als besondere Fälle enthalten.

Zur Entwickelung des elliptischen Normalintegrals *erster* Gattung $F(k, \varphi)$ hat man daher in den Gleichungen (8.) bis (14.) $m = -\frac{1}{2}$ zu setzen und erhält

---

*) Der Beweis für die gleichmäßige Konvergenz möge hier übergangen werden.

(15.) $\binom{m}{1} = -\frac{1}{2} = -c_1, \quad \binom{m}{2} = +\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} = +c_2, \ldots$

$$\binom{m}{n} = \pm\frac{1\,.\,3\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\ldots(2n)} = \pm c_n.$$

Setzt man in diesem Falle

$$A_0 = a_0, \quad A_1 = -a_1, \quad A_2 = +a_2, \ldots A_n = (-1)^n a_n,$$

so geht Gleichung (14.) über in

(16.) $$F(k, \varphi) = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}}$$

$$= a_0\varphi - \frac{a_1}{1}\sin(2\varphi) + \frac{a_2}{2}\sin(4\varphi) - \frac{a_3}{3}\sin(6\varphi) + - \cdots,$$

wobei nach Gleichung (10.) bis (13.), wenn man $c_0 = 1$ setzt,

(17.) $$a_0 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}(1 + c_1{}^2\varepsilon^4 + c_2{}^2\varepsilon^8 + c_3{}^2\varepsilon^{12} + \cdots)$$

$$= (1 + \varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n{}^2\varepsilon^{4n},$$

(18.) $$a_1 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}(c_1\varepsilon^2 + c_1c_2\varepsilon^6 + c_2c_3\varepsilon^{10} + \cdots)$$

$$= (1 + \varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_nc_{n+1}\varepsilon^{2+4n},$$

(19.) $$a_2 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}(c_2\varepsilon^4 + c_1c_3\varepsilon^8 + c_2c_4\varepsilon^{12} + \cdots)$$

$$= (1 + \varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_nc_{n+2}\varepsilon^{4+4n},$$

. . . .

Allgemein ist

(20.) $$a_\nu = (1 + \varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_nc_{n+\nu}\varepsilon^{2\nu+4n}.$$

Man braucht aber nur a_0 und a_1 durch diese Reihen zu berechnen, denn unter der Voraussetzung, daß man die durch Reihenentwickelung dargestellten Funktionen differentiieren darf, indem man die einzelnen Glieder der Reihe differentiiert, folgt aus der Gleichung

$$(21.)\quad \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}} = a_0 - 2a_1\cos(2\varphi) + 2a_2\cos(4\varphi) - 2a_3\cos(6\varphi) + - \cdots$$

durch Differentiation

$$(22.)\quad \frac{\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^3}} = 4a_1\sin(2\varphi) - 8a_2\sin(4\varphi) + 12a_3\sin(6\varphi) - + \cdots.$$

Wenn man beide Seiten dieser Gleichung mit

$$(23.)\quad \frac{2(1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi)}{\sin^2\alpha} = \frac{2-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos(2\varphi)}{\sin^2\alpha} = \frac{2-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \cos(2\varphi)$$

multipliziert und der Kürze wegen

$$(24.)\quad \frac{2-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1+\varepsilon^4}{2\varepsilon^2} = \zeta$$

setzt, so erhält man, weil $2\sin(2\lambda\varphi)\cos(2\varphi)$ bekanntlich gleich $\sin(2\lambda+2)\varphi + \sin(2\lambda-2)\varphi$ ist,

$$(25.)\quad \frac{\sin(2\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}} = -(-4a_1\zeta + 4a_2)\sin(2\varphi)$$
$$+ (2a_1 - 8a_2\zeta + 6a_3)\sin(4\varphi)$$
$$- (4a_2 - 12a_3\zeta + 8a_4)\sin(6\varphi)$$
$$+ (6a_3 - 16a_4\zeta + 10a_5)\sin(8\varphi)$$
$$- + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Andererseits ergibt sich, indem man beide Seiten der Gleichung (21.) mit $\sin(2\varphi)$ multipliziert und die bekannte Formel

$$2\sin(2\varphi)\cos(2\lambda\varphi) = \sin(2\lambda+2)\varphi - \sin(2\lambda-2)\varphi$$

anwendet,

$$(26.)\quad \frac{\sin(2\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}} = -(a_2-a_0)\sin(2\varphi) + (a_3-a_1)\sin(4\varphi) - (a_4-a_2)\sin(6\varphi) + (a_5-a_3)\sin(8\varphi) - + \cdots.$$

Aus der Vergleichung der Koeffizienten in diesen beiden Entwickelungen von $\frac{\sin(2\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}}$ findet man

$$a_2 - a_0 = \quad - 4a_1\zeta + 4a_2,$$
$$a_3 - a_1 = 2a_1 - 8a_2\zeta + 6a_3,$$
$$a_4 - a_2 = 4a_2 - 12a_3\zeta + 8a_4,$$
$$a_5 - a_3 = 6a_3 - 16a_4\zeta + 10a_5,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

folglich wird

$$(27.)\quad \begin{cases} 3a_2 = 4a_1\zeta - a_0, \\ 5a_3 = 8a_2\zeta - 3a_1, \\ 7a_4 = 12a_3\zeta - 5a_2, \\ 9a_5 = 16a_4\zeta - 7a_3, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

allgemein erhält man also für $n \geqq 2$

$$(28.)\quad (2n - 1)a_n = 4(n - 1)a_{n-1}\zeta - (2n - 3)a_{n-2}.$$

Zur Entwickelung des *elliptischen Normalintegrals zweiter Gattung* muß man, wie aus Gleichung (4.) hervorgeht, in den Gleichungen (8.) bis (14.) $m = +\frac{1}{2}$ setzen und erhält

$$(29.)\quad \binom{m}{1} = \frac{1}{2},\ \binom{m}{2} = -\frac{1}{2.4} = -\frac{c_1}{4},\ \binom{m}{3} = +\frac{1.3}{2.4.6} = +\frac{c_2}{6}, \ldots$$

allgemein

$$(30.)\quad \binom{m}{n} = (-1)^{n-1}\frac{c_{n-1}}{2n}.$$

Setzt man in diesem Falle

$$(31.)\quad A_0 = b_0,\ A_1 = +b_1,\ A_2 = -b_2,\ A_3 = +b_3, \ldots A_n = (-1)^{n-1}b_n,$$

so gehen die Gleichungen (9.) und (14.) über in

$$(32.)\quad \sqrt{1 - \sin^2\alpha\sin^2\varphi} = b_0 + 2b_1\cos(2\varphi) - 2b_2\cos(4\varphi) + 2b_3\cos(6\varphi) - + \cdots.$$

$$(33.)\quad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \sin^2\alpha\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi$$
$$= b_0\varphi + \frac{b_1}{1}\sin(2\varphi) - \frac{b_2}{2}\sin(4\varphi) + \frac{b_3}{3}\sin(6\varphi) - + \cdots,$$

Dabei ist nach Gleichung (10.)

$$(34.)\quad b_0 = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon^4}{2^2} + \frac{c_1^2}{4^2}\varepsilon^8 + \frac{c_2^2}{6^2}\varepsilon^{12} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{1+\varepsilon^2}\left(1 + \varepsilon^4 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n^2 \varepsilon^{4n}}{(2n+2)^2}\right).$$

Man kann aber die Größe b_0 auch durch a_0 un ausdrücken. Es ist nämlich nach den Gleichungen und (18.)

$$(17\text{a.})\quad a_0 = (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n^2 \varepsilon^{4n} = (1+\varepsilon^2)\left(1 + \varepsilon^4 \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+1}^2\right.$$

$$(18\text{a.})\quad a_1 = (1+\varepsilon^2)\varepsilon^2 \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{n+1} \varepsilon^{4n};$$

ferner ist

$$(35.)\quad k^2 = \sin^2\alpha = \frac{4\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2} = \frac{4\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2},$$

$$(36.)\quad 2 - k^2 = \frac{2(1+\varepsilon^4)}{(1+\varepsilon^2)^2}.$$

Daraus folgt

$$(37.)\quad (2-k^2)a_0 = \frac{2}{1+\varepsilon^2}\left[1 + \varepsilon^4 \sum_{n=0}^{n=\infty} (c_{n+1}^2 + c_n^2)\varepsilon^{4n}\right],$$

$$(38.)\quad k^2 a_1 = \frac{2\varepsilon^4}{1+\varepsilon^2}\sum_{n=0}^{n=\infty} 2c_n c_{n+1}\varepsilon^{4n},$$

also

$$(39.)\quad (2-k^2)a_0 - k^2 a_1 = \frac{2}{1+\varepsilon^2}\left[1 + \varepsilon^4 \sum_{n=0}^{n=\infty} (c_n - c_{n+1})\right.$$

Nun ist aber

$$(40.)\quad c_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}c_n, \quad \text{also} \quad c_n - c_{n+1} = \frac{c_n}{2n+2};$$

deshalb geht Gleichung (39.) über in

$$(41.)\quad (2-k^2)a_0 - k^2 a_1 = \frac{2}{1+\varepsilon^2}\left[1 + \varepsilon^4 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n^2}{(2n+2)^2}\varepsilon^{4n}\right] =$$

Auch die anderen Koeffizienten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ kann sehr einfach durch die Größen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ausdrü

Setzt man wieder voraus, daß man die durch Reihenentwickelung dargestellten Funktionen gliedweise differentiieren darf, so findet man durch Differentiation der Gleichung (32.)

$$(42.)\quad -\frac{\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}} = -4b_1\sin(2\varphi)+8b_2\sin(4\varphi) - 12b_3\sin(6\varphi)+-\cdots;$$

außerdem folgt aus Gleichung (26.)

$$(43.)\quad -\frac{\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}} = \frac{k^2}{2}[(a_2-a_0)\sin(2\varphi)-(a_3-a_1)\sin(4\varphi) + (a_4-a_2)\sin(6\varphi)-+\cdots],$$

folglich erhält man

$$8b_1 = k^2(a_0-a_2),\quad 16b_2 = k^2(a_1-a_3),\quad 24b_3 = k^2(a_2-a_4),\ldots,$$

allgemein

$$(44.)\qquad 8nb_n = k^2(a_{n-1}-a_{n+1}).$$

Setzt man also

$$a_0-a_2 = 2^2 . B_1,\quad a_1-a_3 = 4^2 . B_2,\quad a_2-a_4 = 6^2 . B_3,\ldots,$$

allgemein

$$(45.)\qquad a_{n-1}-a_{n+1} = (2n)^2 B_n,$$

so wird

$$(46.)\quad b_1 = \frac{k^2}{2}\cdot B_1,\ \frac{b_2}{2} = \frac{k^2}{2}\cdot B_2,\ \frac{b_3}{3} = \frac{k^2}{2}\cdot B_3,\cdots\frac{b_n}{n} = \frac{k^2}{2}\cdot B_n,$$

folglich geht Gleichung (33.) über in

$$(47.)\quad E(k,\varphi) = \int\limits_0^\varphi \sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi$$

$$= b_0\varphi + \frac{k^2}{2}[B_1\sin(2\varphi)-B_2\sin(4\varphi)+B_3\sin(6\varphi)-+\cdots].$$

Von besonderem Interesse sind die Werte der beiden Integrale $F(k,\varphi)$ und $E(k,\varphi)$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, die man bezw. mit K und E bezeichnet. Nach den Gleichungen (16.), (33.) und (41.) wird

$$(48.)\qquad K = F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}} = \frac{a_0\pi}{2},$$

$$(49.)\quad E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}\,.\,d\varphi = \frac{b_0\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[(2 - k^2)a_0 - k^2 a_1\right].$$

Eine kurzgefaßte Tabelle der Größen K und E, $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ findet sich im Anhange dieses Bandes.

Beispiel.

Die angeführten Reihen konvergieren um so schlechter, je mehr sich $k = \sin\alpha$ dem Werte 1 nähert. Wenn also in dem folgenden Beispiele

$$(50.)\qquad k = 0{,}8, \quad \varepsilon = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{k} = 0{,}5$$

gesetzt wird, so möge hervorgehoben werden, daß die Rechnung für kleinere Werte von k noch einfacher wird. Hier erhält man

$$1 + \varepsilon^2 = 1{,}25 \qquad \varepsilon^{12} = 0{,}000\,244\,14$$
$$(1 + \varepsilon^2)\varepsilon^2 = 0{,}312\,5 \qquad \varepsilon^{16} = 0{,}000\,015\,26$$
$$\varepsilon^4 = 0{,}062\,5 \qquad \varepsilon^{20} = 0{,}000\,000\,95$$
$$\varepsilon^8 = 0{,}003\,906\,25 \qquad \varepsilon^{24} = 0{,}000\,000\,06;$$

ferner ist

$$c_1^2 = 0{,}25 \qquad c_1c_2 = 0{,}187\,5$$
$$c_2^2 = 0{,}140\,625 \qquad c_2c_3 = 0{,}117\,187\,5$$
$$c_3^2 = 0{,}097\,656\,25 \qquad c_3c_4 = 0{,}085\,449\,22$$
$$c_4^2 = 0{,}074\,768\,07 \qquad c_4c_5 = 0{,}067\,291\,26$$
$$c_5^2 = 0{,}060\,562\,14 \qquad c_5c_6 = 0{,}055\,515\,29$$
$$c_6^2 = 0{,}050\,889\,02 \qquad c_6c_7 = 0{,}047\,254\,09.$$

Daraus folgt

$$(51.)\quad a_0 = (1 + \varepsilon^2)(1 + c_1^2\varepsilon^4 + c_2^2\varepsilon^8 + \cdots) = 1{,}270\,249\,20,$$

$$(52.)\quad a_1 = (1 + \varepsilon^2)\varepsilon^2(c_1 + c_1c_2\varepsilon^4 + c_2c_3\varepsilon^8 + \cdots) = 0{,}160\,062\,02.$$

Aus den Gleichungen (27.), nämlich aus den Formeln

$$(53.)\quad 3a_2 = 4a_1\zeta - a_0,\quad 5a_3 = 8a_2\zeta - 3a_1,\quad 7a_4 = 12a_3\zeta - 5a_2, \ldots,$$

wobei

(54.) $$\zeta = \frac{2-k^2}{k^2} = \frac{2-0{,}64}{0{,}64} = \frac{17}{8}$$

ist, findet man

(55.)
$$\begin{cases} a_2 = 0{,}030\,092\,65 & a_8 = 0{,}000\,003\,86 \\ a_3 = 0{,}006\,277\,80 & a_9 = 0{,}000\,000\,91 \\ a_4 = 0{,}001\,374\,39 & a_{10} = 0{,}000\,000\,21 \\ a_5 = 0{,}000\,309\,41 & a_{11} = 0{,}000\,000\,05 \\ a_6 = 0{,}000\,070\,93 & a_{12} = 0{,}000\,000\,01\,. \\ a_7 = 0{,}000\,016\,47 & \end{cases}$$

Es darf nicht verschwiegen werden, daß man diese Werte aus den Gleichungen (27.) nur dann findet, wenn man noch einige Dezimalstellen mehr berücksichtigt. Bei derartigen rekurrierenden Formeln werden nämlich die Fehler, welche durch die Vernachlässigung der folgenden Dezimalstellen entstehen, im allgemeinen bei jedem späteren Gliede größer. Wenn z. B. die letzte Dezimalstelle in a_0 und a_1 auch nur um 2 Einheiten unsicher ist, so wird in der Gleichung

$$3a_2 = 4a_1\zeta - a_0$$

a_1 (und deshalb auch der Fehler von a_1) mit $4\zeta = 8{,}5$ multipliziert, so daß $3a_2$ um 19 Einheiten, a_2 selbst um $\frac{19}{3}$ Einheiten in der letzten Dezimalstelle unsicher ist. Die Größe a_3 wird um etwa 23, a_4 um etwa 172 Einheiten unsicher. So steigert sich die Unsicherheit mit jedem späteren Gliede außerordentlich schnell, weshalb die vorstehenden Resultate nach Gleichung (20.), nämlich nach der Formel

$$a_\nu = (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{\nu+n} \varepsilon^{2\nu+4n}$$

berechnet sind. Sodann findet man aus den Gleichungen

$$2b_0 = (2-k^2)a_0 - k^2 a_1 = 1{,}36\,.\,a_0 - 0{,}64a_1,$$

$$4B_1 = a_0 - a_2,\quad 16B_2 = a_1 - a_3,\quad 36B_3 = a_2 - a_4, \ldots$$

(56.)
$$\begin{cases} b_0 = 0{,}812\,549\,61 & B_5 = 0{,}000\,013\,03 \\ B_1 = 0{,}310\,039\,14 & B_6 = 0{,}000\,002\,03 \\ B_2 = 0{,}009\,611\,51 & B_7 = 0{,}000\,000\,34 \\ B_3 = 0{,}000\,797\,73 & B_8 = 0{,}000\,000\,06 \\ B_4 = 0{,}000\,093\,26 & B_9 = 0{,}000\,000\,01\,. \end{cases}$$

Daraus folgt dann

(57.) $$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a_0\pi}{2} = 1{,}995\,302\,78,$$

(58.) $$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{b_0\pi}{2} = 1{,}276\,349\,94.$$

Soll z. B. bei der Rektifikation der Ellipse mit den Halbachsen

$$a = 10, \quad b = 6$$

der Quadrant q berechnet werden, so erhält man $e = 8$, also $k = \frac{e}{a} = 0{,}8$ und nach Gleichung (20.) des vorhergehenden Paragraphen

(59.) $$q = a\int_0^1 \frac{dt\sqrt{1 - k^2t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} = aE\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 12{,}763\,499\,4.$$

Zur Prüfung dieses Resultates beachte man, daß der Quadrant des Kreises mit dem Halbmesser a gleich 15,707 963 3, und der Quadrant des Kreises mit dem Halbmesser b gleich 9,424 778 0 ist.

§ 60.

Differentiation der Integrale.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 182 bis 184.)

Nach Formel Nr. 4 der Tabelle war ein bestimmtes Integral durch die Gleichung

(1.) $$J = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

erklärt worden. Man kann daher J als eine Funktion von a und b betrachten und erhält

(2.) $$\frac{\partial J}{\partial a} = -F'(a), \quad \frac{\partial J}{\partial b} = F'(b),$$

also

(3.) $$dJ = d\int_a^b F'(x)dx = -F'(a)da + F'(b)db,$$

oder, wenn man $F'(x)$ mit $f(x)$ bezeichnet,

$$(3\text{a.})\qquad dJ = d\int_a^b f(x)dx = -f(a)da + f(b)db.$$

Ist die Funktion unter dem Integralzeichen außer von x noch abhängig von einem variablen Parameter t, ist also

$$(4.)\qquad F'(x) = f(x, t),\quad J = \int_a^b f(x, t)dx,$$

so ist auch das bestimmte Integral J eine Funktion von t. Die Integrationsgrenzen a und b seien zunächst *unabhängig* von t, dann wird J übergehen in $J + \varDelta J$, wenn t um $\varDelta t$ wächst, wobei

$$(5.)\qquad J + \varDelta J = \int_a^b f(x, t + \varDelta t)dx$$

ist. Aus den Gleichungen (4.) und (5.) folgt daher

$$(6.)\qquad \varDelta J = \int_a^b f(x, t + \varDelta t)dx - \int_a^b f(x, t)dx,$$

$$= \int_a^b [f(x, t + \varDelta t) - f(x, t)]dx,$$

$$(7.)\qquad \frac{\varDelta J}{\varDelta t} = \int_a^b \frac{f(x, t + \varDelta t) - f(x, t)}{\varDelta t}dx;$$

folglich erhält man, wenn $\varDelta t$ verschwindend klein wird,

$$(8.)\qquad \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b f(x, t)dt = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}dx.$$

Sind die Integrationsgrenzen a und b gleichfalls Funktionen von t, so wird nach D.-R., Formel Nr. 223 der Tabelle

$$(9.)\qquad \frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial J}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial J}{\partial t},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (2.) und (4.)

$$(10.)\qquad \frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^b f(x, t)dx$$

$$= -f(a, t)\cdot\frac{da}{dt} + f(b, t)\cdot\frac{db}{dt} + \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}dx.$$

Ist J das *unbestimmte* Integral einer Differe Funktion $f(x, t)dx$, welche noch einen variablen Paran t enthält, so kann die Integrations-Konstante C gleicl noch von dem Parameter t abhängig sein, so daß erhält

$$J = \int f(x, t)dx + \varphi(t), \tag{11.}$$

wobei $\varphi(t)$ eine ganz beliebige Funktion von t ist. Wi t um Δt, so geht J über in

$$J + \Delta J = \int f(x, t + \Delta t)dx + \varphi(t + \Delta t); \tag{12.}$$

folglich wird

$$\Delta J = \int [f(x, t + \Delta t) - f(x, t)]dx + \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t \tag{13.}$$

also

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta J}{\Delta t} = \int \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + \varphi'(t). \tag{14.}$$

Da $\varphi(t)$ eine ganz beliebige Funktion von t ist, sc dasselbe von $\varphi'(t)$, d. h. $\varphi'(t)$ spielt auch in Gleichung die Rolle einer beliebigen Integrations-Konstanten, so in Gleichung (14.) der Satz ausgesprochen ist: *Ein stimmtes Integral wird nach einem variablen Parameter rentiiert, indem man die Funktion unter dem Integralze nach diesem Parameter differentiiert.*

§ 61.

Berechnung bestimmter Integrale durch Differentia

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 185 und 186.)

Aus Formel Nr. 28 der Tabelle, nämlich aus

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right), \tag{1.}$$

folgt durch Vertauschung von a^2 mit t

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{2.}$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung nach dem *Parameter* t differentiiert und mit -1 multipliziert, erhält man nach Formel Nr. 183 der Tabelle

(3.) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+t)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t\sqrt{t}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Wenn man beide Seiten dieser Gleichung nochmals nach t differentiiert und durch -2 dividiert, so ergibt sich

(4.) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+t)^3} = \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{t^2\sqrt{t}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens findet man

(5.) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+t)^4} = \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{t^3\sqrt{t}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

. . . .

(6.) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+t)^n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} \cdot \frac{1}{t^{n-1}\sqrt{t}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

oder

(6a.) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} \cdot \frac{1}{a^{2n-1}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Aus

(7.) $$\int e^{-tx}dx = -\frac{1}{t} \cdot e^{-tx} = -\frac{1}{t\,.\,e^{tx}}$$

folgt für positive Werte von t

(8.) $$\int_0^\infty e^{-tx}dx = \frac{1}{t}.$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung nach dem *Parameter* t differentiiert und mit -1 multipliziert, erhält man nach Formel Nr. 183 der Tabelle

(9.) $$\int_0^\infty e^{-tx}\,.\,x dx = \frac{1}{t^2},$$

und wenn man dieses Verfahren wiederholt,

$$(10.)\qquad \int_0^\infty e^{-tx} \cdot x^2 dx = \frac{1 \cdot 2}{t^3},$$

$$(11.)\qquad \int_0^\infty e^{-tx} \cdot x^3 dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{t^4},$$

. . . .

$$(12.)\qquad \int_0^\infty e^{-tx} \cdot x^n dx = \frac{n!}{t^{n+1}}.$$

§ 62.

Berechnung der Werte von einigen bestimmten Integralen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 187 bis 189.)

Zur Berechnung eines *bestimmten* Integrals ist es nicht immer erforderlich, vorher das *unbestimmte* Integral zu ermitteln; es sind dabei vielmehr häufig Vereinfachungen möglich, wie man aus den folgenden Beispielen ersehen kann.

Nach Formel Nr. 102 der Tabelle ist

$$(1.)\qquad \int \cos^{2n} x dx = \sin x \Big[\frac{1}{2n}\cos^{2n-1}x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)}\cos^{2n-3}x + \cdots$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5 \cdot 3}{2n(2n-2)\ldots 6 \cdot 4 \cdot 2}\cos x\Big] + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 6 \cdot 4 \cdot 2}x;$$

da nun

$$(2.)\qquad \sin 0 = 0, \quad \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$$

ist, so wird

$$(3.)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 6 \cdot 4 \cdot 2}\,\frac{\pi}{2}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich aus Formel Nr. 105 der Tabelle, nämlich aus

$$(4.)\quad \int \sin^{2n}x dx = -\cos x\left[\frac{1}{2n}\sin^{2n-1}x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)}\sin^{2n-3}x + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3}{2n(2n-2)\ldots 6.4.2}\sin x\right] + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3.1}{2n(2n-2)\ldots 6.4.2}\,x,$$

das bestimmte Integral

$$(5.)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3.1}{2n(2n-2)\ldots 6.4.2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Die Formeln Nr. 102 und 105 der Tabelle, deren Herleitung immerhin mit einigen Schwierigkeiten verknüpft ist, braucht man aber gar nicht einmal zur Berechnung dieser bestimmten Integrale; man findet vielmehr weit einfacher aus Formel Nr. 101 der Tabelle, nämlich aus

$$(6.)\quad \int \cos^{2n}x dx = \frac{1}{2n}\cos^{2n-1}x\sin x + \frac{2n-1}{2n}\int \cos^{2n-2}x dx,$$

das bestimmte Integral

$$(7.)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}x dx = \frac{2n-1}{2n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}x dx,$$

weil das erste Glied auf der rechten Seite von Gleichung (6.) an der oberen und an der unteren Grenze verschwindet. Indem man n mit $n-1$ vertauscht, geht Gleichung (7.) über in

$$(8.)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}x dx = \frac{2n-3}{2n-2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-4}x dx.$$

In dieser Weise kann man fortfahren, bis man endlich die Formeln

$$(9.)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{3}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx, \qquad (10.)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

erhält. Aus diesen Gleichungen ergibt sich dann wieder dasselbe Resultat wie in Gleichung (3.).

Ebenso liefert die Formel Nr. 104 der Tabelle, nämlich

$$\int \sin^{2n}x dx = -\frac{1}{2n}\sin^{2n-1}x\cos x + \frac{2n-1}{2n}\int \sin^{2n-2}x dx,$$

die Gleichungen

(11.) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x dx = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}x dx,$$

(12.) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}x dx = \frac{2n-3}{2n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-4}x dx,$$

. . . .

(13.) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx,$$

(14.) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich wieder dasselbe Resultat wie in Gleichung (5.).

Setzt man in Formel Nr. 101 der Tabelle $m = 2n + 1$, so erhält man

(15.) $$\int \cos^{2n+1}x dx = \frac{1}{2n+1}\cos^{2n}x\sin x + \frac{2n}{2n+1}\int \cos^{2n-1}x dx,$$

also

(16.) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}x dx = \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}x dx.$$

Ebenso wird

(17.) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}x dx = \frac{2n-2}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-3}x dx,$$

. . . .

$$(18.)\qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2}{3}\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3},$$

folglich wird

$$(19.)\qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2)\ldots 4.2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5.3.1}.$$

Ebenso findet man aus Formel Nr. 104 der Tabelle

$$(20.)\qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2)\ldots 4.2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5.3.1}.$$

In ähnlicher Weise liefern die Formeln Nr. 108 und 111 der Tabelle, nämlich die Gleichungen

$$(21.)\qquad \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{1}{m+n}\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x\cos^n x dx,$$

$$(22.)\qquad \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{m+n}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2} x dx,$$

ein einfaches Verfahren für die Berechnung von $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$. Aus Gleichung (21.) folgt nämlich, wenn $m > 1$ ist,

$$(23.)\qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{m-1}{m+n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}x\cos^n x dx.$$

Je nachdem *m gerade* oder *ungerade* ist, wird durch wiederholte Anwendung dieser Vereinfachung das gesuchte Integral schließlich entweder auf das bereits ermittelte Integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, oder auf

$$(24.)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x dx = -\left[\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n+1}$$

zurückgeführt.

Aus Gleichung (22.) folgt, wenn $n > 1$ ist,

$$(25.)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{n-1}{m+n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-2} x dx.$$

Je nachdem n *gerade* oder *ungerade* ist, wird durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung das gesuchte Integral schließlich entweder auf das bereits ermittelte Integral] $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$, oder auf

$$(26.)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos x dx = \left[\frac{\sin^{m+1} x}{m+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{m+1}$$

zurückgeführt.

Diese Resultate kann man auch zur Berechnung der Zahl π benutzen. Es ist nämlich für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$

$$(27.)\qquad \sin^{2n+1} x \leqq \sin^{2n} x \leqq \sin^{2n-1} x,$$

also nach den in § 54 ausgeführten Sätzen

$$(28.)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx,$$

oder

$$(29.)\qquad \frac{2n(n-2)\ldots 4.2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5.3} < \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3.1}{2n(2n-2)\ldots 6.4.2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

und

$$(30.)\qquad \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3.1}{2n(2n-2)\ldots 6.4.2}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3}.$$

Daraus folgt

$$(31.)\quad \frac{\pi}{2} > \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

und

$$(32.)\quad \frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}.$$

Die rechten Seiten dieser beiden Ungleichungen unterscheiden sich voneinander nur durch den Faktor $\frac{2n}{2n+1}$, der sich für unbegrenzt wachsendes n der Grenze 1 nähert, folglich ist

$$(33.)\quad \frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}.$$

Diese Formel rührt von *Wallis* her und ist bereits vor Entdeckung der Differential- und Integral-Rechnung gefunden worden.

§ 63.

Darstellung der Koeffizienten einer trigonometrischen Reihe.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 190.)

Sind die beiden positiven ganzen Zahlen m und n voneinander verschieden, so wird

$$(1.)\quad \int_0^\pi \cos(m-n)x\,.\,dx = \frac{1}{m-n}\left[\sin(m-n)x\right]_0^\pi = 0,$$

$$(2.)\quad \int_0^\pi \cos(m+n)x\,.\,dx = \frac{1}{m+n}\left[\sin(m+n)x\right]_0^\pi = 0.$$

Beachtet man die beiden bekannten Formeln

$$(3.)\quad \begin{cases} \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b, \\ \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b, \end{cases}$$

so findet man durch Addition und Subtraktion der Gleichungen (1.) und (2.) für $m \gtrless n$

(4.) $$\int_0^\pi \cos(mx)\cos(nx)dx = 0,$$

(5.) $$\int_0^\pi \sin(mx)\sin(nx)dx = 0.$$

Dagegen geht Gleichung (1.) für $m = n$ über in

(1 a.) $$\int_0^\pi \cos(m-n)x\,.\,dx = \int_0^\pi dx = \pi,$$

während Gleichung (2.) auch noch für $m = n$ richtig bleibt; folglich wird für $m = n > 1$

(6.) $$\int_0^\pi \cos(mx)\cos(nx)dx = \int_0^\pi \cos^2(nx)dx = \frac{\pi}{2},$$

(7.) $$\int_0^\pi \sin(mx)\sin(nx)dx = \int_0^\pi \sin^2(nx)dx = \frac{\pi}{2}.$$

Unter der Voraussetzung, daß sich $f(x)$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe von der Form

(8.) $$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos(2x) + \cdots + a_n\cos(nx) + \cdots$$

entwickeln läßt, so lange x zwischen 0 und π liegt, kann man die Koeffizienten a_0, a_1, $a_2, \ldots$ in folgender Weise bebestimmen.

Multipliziert man Gleichung (8.) mit dx und integriert auf beiden Seiten zwischen den Grenzen 0 und π, so erhält man, da die Reihe gleichmäßig konvergent ist und deshalb gliedweise integriert werden darf,

(9.) $$\int_0^\pi f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_0^\pi dx = \frac{a_0\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx,$$

denn $\int_0^\pi \cos(nx)dx$ verschwindet für $n > 0$. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (8.) mit $\cos(nx)dx$ und integriert zwischen den Grenzen 0 und π, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (4.) und (6.)

(10.) $$\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx = a_n\int_0^\pi \cos^2(nx)dx = a_n\frac{\pi}{2},$$

oder

(10a.) $$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx.$$

Hierbei ist $f(x)$ eine periodische *gerade* Funktion, die sich nicht ändert, wenn man x mit $-x$ oder mit $2\pi - x$ vertauscht, d. h. es ist

(11.) $$f(2\pi - x) = f(-x) = f(x);$$

deshalb findet man aus Gleichung (9.) und (10a.), indem man die Integrations-Veränderliche t nennt und dann $t = 2\pi - x$ setzt,

(12.) $$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt = -\frac{2}{\pi}\int_{2\pi}^\pi f(2\pi - x)dx = \frac{2}{\pi}\int_\pi^{2\pi} f(x)dx,$$

(13.) $$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt = -\frac{2}{\pi}\int_{2\pi}^\pi f(2\pi - x)\cos(nx)dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_\pi^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx;$$

folglich ergibt sich durch Addition der Gleichungen (9.) und (12.) bezw. der Gleichungen (10a.) und (13.)

(14.) $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx.$$

Weiß man, daß sich $f(x)$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe von der Form

(15.) $$f(x) = b_1\sin x + b_2\sin(2x) + \cdots + b_n\sin(nx) + \cdots$$

entwickeln läßt, so lange x zwischen den Grenzen 0 und π liegt, so darf die Reihe gliedweise integriert werden, und man erhält mit Rücksicht auf die Gleichungen (5.) und (7.)

(16.) $$\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx = b_n\int_0^\pi \sin^2(nx)dx = b_n\cdot\frac{\pi}{2},$$

oder

(16a.) $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx.$$

In diesem Falle ist $f(x)$ eine periodische *ungerade* Funktion, die nur ihr Zeichen wechselt, wenn man x mit $-x$ oder mit $2\pi - x$ vertauscht, d. h. es ist

(17.) $$f(2\pi - x) = f(-x) = -f(x).$$

Deshalb findet man aus Gleichung (16a.), indem man die Integrations-Veränderliche t nennt und dann $t = 2\pi - x$ setzt,

(18.) $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt = -\frac{2}{\pi}\int_{2\pi}^\pi f(x)\sin(nx)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_\pi^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx,$$

also durch Addition zu Gleichung (16a.)

(19.) $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Weiß man endlich, daß sich $f(x)$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe von der Form

(20.) $$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos(2x) + \cdots$$
$$+ b_1\sin x + b_2\sin(2x) + \cdots$$

entwickeln läßt, so lange x zwischen den Grenzen 0 und 2π liegt, so wird mit Rücksicht darauf, daß

(21.) $$\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]dx = \int_0^{2\pi}\sin(mx)\cos(nx)dx = 0$$

ist, gleichviel ob m und n voneinander verschieden sind oder nicht,

(22.) $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Dies gibt den Satz: *In jeder trigonometrischen Reihe*

$$f(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

welche in dem Intervalle von 0 *bis* 2π *gleichmäßig konvergent ist, haben die Koeffizienten* a_n *und* b_n *die Werte*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

§ 64.

Übungs-Beispiele.

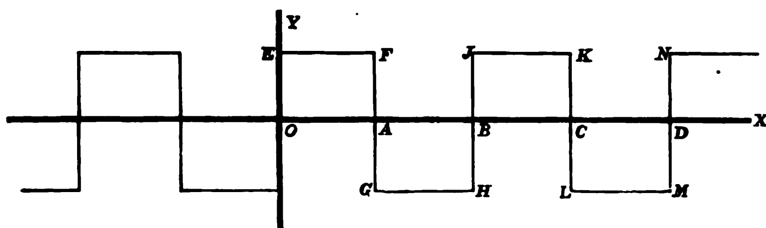
Die vorstehenden Angaben bleiben auch dann noch richtig, wenn die Kurve $y = f(x)$ aus verschiedenen geradlinigen oder krummlinigen Stücken zusammengesetzt ist, wie die hier folgenden Beispiele zeigen mögen.

Aufgabe 1. Es sei (Fig. 105)

$$(1.)\qquad \begin{cases} y = +c & \text{für} \quad 2\varkappa\pi \leqq x \leqq (2\varkappa+1)\pi, \\ y = -c & \text{für} \quad (2\varkappa+1)\pi \leqq x \leqq (2\varkappa+2)\pi, \end{cases}$$

wobei die Zahl $\varkappa$ alle ganzzahligen Werte annehmen darf.

Fig. 105.



Auflösung. Hier ist, wenn man $x - \pi = t$ setzt,

$$(2.)\qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{c}{\pi}\left[\int_0^{\pi} dx - \int_{\pi}^{2\pi} dx\right] = \frac{c}{\pi}\left[\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} dt\right] = 0,$$

$$(3.)\qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{c}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos(nx)dx - \int_{\pi}^{2\pi}\cos(nx)\,dx\right]\cdot$$

Nun ist

$$\cos(nx) = \cos(nt + n\pi) = \cos(nt)\cos(n\pi) - \sin(nt)\sin(n\pi)$$
$$= (-1)^n \cos(nt),$$

folglich wird

$$(4.)\quad a_n = \frac{c}{\pi}\left[\int_0^\pi \cos(nx)dx - (-1)^n \int_0^\pi \cos(nt)dt\right]$$
$$= \frac{c}{\pi}\left[1 - (-1)^n\right]\int_0^\pi \cos(nx)dx$$
$$= \frac{c}{\pi}\left[1 - (-1)^n\right]\frac{1}{n}\left[\sin(n\pi) - \sin 0\right] = 0.$$

Ferner wird

$$(5.)\quad b_n = \frac{c}{\pi}\left[\int_0^\pi \sin(nx)dx - \int_\pi^{2\pi} \sin(nx)dx\right].$$

Dabei ist

$$\sin(nx) = \sin(nt + n\pi) = \sin(nt)\cos(n\pi) + \cos(nt)\sin(n\pi)$$
$$= (-1)^n \sin(nt),$$

also

$$(6.)\quad b_n = \frac{c}{\pi}\left[\int_0^\pi \sin(nx)dx - (-1)^n \int_0^\pi \sin(nt)dt\right]$$
$$= \frac{c}{\pi}\left[1 - (-1)^n\right]\int_0^\pi \sin(nx)dx$$
$$= \frac{c}{\pi}\left[1 - (-1)^n\right]\frac{1}{n}\Big[-\cos(nx)\Big]_0^\pi$$
$$= \frac{c}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]\left[1 - \cos(n\pi)\right],$$

folglich ist

$$(7.)\quad b_{2\alpha} = 0,\quad b_{2\alpha+1} = \frac{2c}{(2\alpha + 1)\pi}(1 + 1) = \frac{4c}{(2\alpha + 1)\pi}.$$

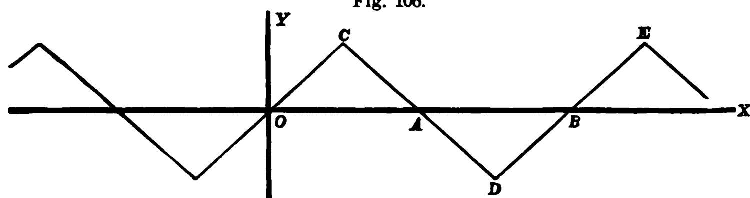
Dies gibt

$$(8.)\quad f(x) = \frac{4c}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \cdots\right].$$

Aufgabe 2. Es sei die Kurve (vergl. Fig. 106) zusammengesetzt aus den geraden Linien

$$(9.)\quad \begin{cases} y = +mx & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2}, \\ y = -m(x-\pi) & \text{für } +\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{3\pi}{2}, \\ y = +m(x-2\pi) & \text{für } +\frac{3\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{5\pi}{2}, \\ y = -m(x-3\pi) & \text{für } +\frac{5\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{7\pi}{2}, \\ \ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

Fig. 106.



Auflösung. Hier ist

$$(10.)\quad a_0 = \frac{m}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (x-\pi)dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (x-2\pi)dx\right],$$

oder, wenn man

$$x - \pi = t \quad x - 2\pi = u$$

setzt,

$$(11.)\quad a_0 = \frac{m}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} t dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} u du\right] = \frac{m}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x dx\right] = 0.$$

Ferner wird

$$(12.)\quad a_n = \frac{m}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (x-\pi)\cos(nx)dx \right.$$
$$\left. + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (x-2\pi)\cos(nx)dx\right].$$

Dabei ist

$$\cos(nx) = \cos(nt + n\pi) = \cos(nt)\cos(n\pi) - \sin(nt)\sin(n\pi)$$
$$= (-1)^n \cos(nt),$$
$$\cos(nx) = \cos(nu + 2n\pi) = \cos(nu),$$

folglich wird

$$(13.)\quad a_n = \frac{m}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)dx - (-1)^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} t\cos(nt)dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} u\cos(nu)du\right]$$

$$= \frac{m}{\pi}\left[1 - (-1)^n\right]\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)dx$$

$$= \frac{m}{\pi}\left[1 - (-1)^n\right]\cdot\left[\frac{x}{n}\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Dagegen wird

$$(14.)\quad b_n = \frac{m}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (x - \pi)\sin(nx)dx\right.$$
$$\left. + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (x - 2\pi)\sin(nx)dx\right].$$

Dabei ist

$$\sin(nx) = \sin(nt + n\pi) = \sin(nt)\cos(n\pi) + \cos(nt)\sin(n\pi)$$
$$= (-1)^n \sin(nt),$$
$$\sin(nx) = \sin(nu + 2n\pi) = \sin(nu),$$

also

$$(15.)\quad b_n = \frac{m}{\pi}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)dx - (-1)^n \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} t\sin(nt)dt + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} u\sin(nu)du\right]$$

$$= \frac{m}{\pi}\left[1 - (-1)^n\right]\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)dx$$

$$= \frac{m}{\pi}\left[1 - (-1)^n\right]\cdot\left[-\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}},$$

folglich wird

$$(16.)\quad b_{2\alpha} = \frac{2m}{\pi}(1-1)\left[-\frac{\pi}{4\alpha}\cos(\alpha\pi) + \frac{1}{4\alpha^2}\sin(\alpha\pi)\right] = 0,$$

$$(17.)\quad b_{2\alpha+1} = \frac{2m}{\pi}\cdot\frac{2}{(2\alpha+1)^2}\sin\left(\frac{2\alpha+1}{2}\pi\right).$$

Dies gibt

$$(18.)\quad b_1 = +\frac{4m}{\pi},\quad b_3 = -\frac{4m}{\pi}\cdot\frac{1}{9},\quad b_5 = +\frac{4m}{\pi}\cdot\frac{1}{25},\cdots$$

also

$$(19.)\quad f(x) = \frac{4m}{\pi}\left[\sin x - \frac{1}{9}\sin(3x) + \frac{1}{25}\sin(5x) - \frac{1}{49}\sin(7x) + \cdots\right].$$

§ 65.

Berechnung bestimmter Integrale bei Anwendung mehrdeutiger Substitutionen.

Führt man in ein bestimmtes Integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ durch die Substitution

$$(1.)\qquad y = \varphi(x)$$

eine neue Integrations-Veränderliche y ein, so muß man auch die Integrationsgrenzen ändern, und zwar ist in dem

vorliegenden Falle die untere Grenze $\varphi(a)$ und die obere $\varphi(b)$. Bei der Ausrechnung ist aber noch besondere Vorsicht erforderlich, wenn die Gleichung (1.) inbezug auf x mehrdeutig ist. Ein einfaches Beispiel möge zeigen, wie bei solchen mehrdeutigen Substitutionen leicht Fehler entstehen.

Es ist

$$(2.)\qquad \int_1^7 (x^2 - 6x + 13)dx = [\tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 13x]_1^7 = 48.$$

Wendet man dagegen die Substitution

$$(3.)\qquad 2y = x^2 - 6x + 13$$

an, so wird $y = 4$ für $x = 1$ und $y = 10$ für $x = 7$. Da nun

$$(4.)\qquad x = 3 \pm \sqrt{2y - 4}, \quad \text{also} \quad dx = \pm \frac{dy}{\sqrt{2y - 4}}$$

ist, so wird man geneigt sein, entweder

$$(5.)\qquad \int_1^7 (x^2 - 6x + 13)dx = + \int_4^{10} \frac{2ydy}{\sqrt{2y - 4}},$$

oder

$$(6.)\qquad \int_1^7 (x^2 - 6x + 13)dx = - \int_4^{10} \frac{2ydy}{\sqrt{2y - 4}}$$

zu setzen. Tatsächlich sind aber die Gleichungen (5.) und (6.) *beide unrichtig*, wie man schon daraus erkennt, daß

$$(7.)\qquad \pm \int_4^{10} \frac{2ydy}{\sqrt{2y - 4}} = \pm \tfrac{1}{3}[(2y + 8)\sqrt{2y - 4}]_4^{10} = \pm \frac{80}{3}$$

ist, während das gesuchte Integral nach Gleichung (2.) den Wert 48 hat.

Zur Lösung des Widerspruches beachte man, daß nach Gleichung (4.) zu jedem Werte von y *zwei* Werte von x gehören, von denen der eine, nämlich

$$(8.)\qquad x = 3 + \sqrt{2y - 4},$$

immer *größer* als 3 ist, während der andere, nämlich

(9.) $$x = 3 - \sqrt{2y - 4},$$

immer *kleiner* als 3 ist. Diesen beiden verschiedenen Werten von x, welche zu demselben Werte von y gehören, entsprechen die beiden verschiedenen Werte von dx, und zwar erkennt man aus den Gleichungen (4.), daß den Werten von x, welche größer als 3 sind,

(10.) $$dx = +\frac{dy}{\sqrt{2y - 4}}$$

zugeordnet werden muß, während den Werten von x, welche *kleiner* als 3 sind, der Wert

(11.) $$dx = -\frac{dy}{\sqrt{2y - 4}}$$

entspricht. Dieses Verhalten muß bei der Umformung des gesuchten Integrals berücksichtigt werden, weil der Wert $x = 3$ *zwischen* den Grenzen 1 und 7 liegt. Es kommen deshalb bei der Berechnung des gesuchten Integrals Werte von x vor, welche *kleiner* als 3 sind, und außerdem auch solche, welche *größer* als 3 sind, so daß man nicht *durchweg denselben* Wert von dx benutzen darf. Man muß vielmehr das gesuchte Integral in zwei andere Integrale zerlegen, indem man

(12.) $$\int_1^7 (x^2 - 6x + 13)dx = \int_1^3 (x^2 - 6x + 13)dx + \int_3^7 (x^2 - 6x + 13)dx$$

setzt. Bei dem ersten Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung ist $x \leqq 3$, folglich muß man bei diesem

$$dx = -\frac{dy}{\sqrt{2y - 4}}$$

setzen. Bei dem zweiten Integrale ist $x \geqq 3$, folglich muß man dabei

$$dx = +\frac{dy}{\sqrt{2y - 4}}$$

setzen. Da nun noch $y = 2$ wird für $x = 3$, so erhält man

(13.) $$\int_1^3 (x^2 - 6x + 13)dx = -\int_4^2 \frac{2ydy}{\sqrt{2y - 4}} = \int_2^4 \frac{2ydy}{\sqrt{2y - 4}},$$

$$(14.)\quad \int\limits_3^7 (x^2 - 6x + 13)dx = + \int\limits_2^{10} \frac{2ydy}{\sqrt{2y-4}}.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen ergibt sich

$$(15.)\quad \int\limits_1^7 (x^2 - 6x + 13)dx = \int\limits_2^4 \frac{2ydy}{\sqrt{2y-4}} + \int\limits_2^{10} \frac{2ydy}{\sqrt{2y-4}}.$$

Nun ist nach den Ausführungen in § 52

$$(16.)\quad \int\limits_2^4 \frac{2ydy}{\sqrt{2y-4}} = \lim_{\alpha=0} \int\limits_{2+\alpha}^4 \frac{2ydy}{\sqrt{2y-4}}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\alpha=0} [(2y+8)\sqrt{2y-4}]_{2+\alpha}^4 = \frac{1}{3} [(2y+8)\sqrt{2y-4}]_2^4 = \frac{32}{3},$$

$$(17.)\quad \int\limits_2^{10} \frac{2ydy}{\sqrt{2y-4}} = \lim_{\alpha=0} \int\limits_{2+\alpha}^{10} \frac{2ydy}{\sqrt{2y-4}}$$

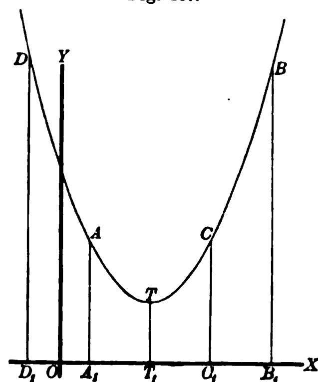
$$= \frac{1}{3} \lim_{\alpha=0} [(2y+8)\sqrt{2y-4}]_{2+\alpha}^{10} = \frac{1}{3} [(2y+8)\sqrt{2y-4}]_2^{10} = \frac{112}{3};$$

man erhält also in Übereinstimmung mit Gleichung (2.)

$$(18.)\quad \int\limits_1^7 (x^2 - 6x + 13)dx = \frac{32}{3} + \frac{112}{3} = 48.$$

Um die vorstehende Untersuchung auf graphischem Wege zu veranschaulichen, sei in Figur 107 die Kurve gezeichnet, welche der Substitutions-Gleichung

Fig. 107.



$$(19.)\quad 2y = x^2 - 6x + 13$$

entspricht. Für alle Werte von x, welche kleiner als 3 sind, *fällt* die Kurve, folglich ist $\frac{dy}{dx}$ für diese Werte von x *negativ*. Für alle Werte von x dagegen, welche größer als 3 sind, *steigt* die Kurve, folg-

lich ist $\frac{dy}{dx}$ für diese Werte von x *positiv*. Deshalb darf man nicht in dem ganzen Intervalle von $x = 1$ bis $x = 7$ die Größe

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2y - 4}$$

mit demselben Vorzeichen nehmen; es gilt vielmehr für alle Werte von $x = 1$ bis $x = 3$ das *untere* Zeichen und für alle Werte von $x = 3$ bis $x = 7$ das *obere* Zeichen.

Aus Figur 107 erkennt man auch leicht, weshalb die Gleichungen (5.) und (6.) fehlerhaft sind.

Das gesuchte Integral gibt nämlich den doppelten Flächeninhalt der Figur A_1B_1BA, also

$$(20.)\qquad 2A_1B_1BA = 2\int_1^7 y dx = \int_1^7 (x^2 - 6x + 13)dx,$$

während

$$(21.)\qquad \int_4^{10} \frac{2ydy}{\sqrt{2y-4}} = 2\int_5^7 ydx = \int_5^7 (x^2 - 6x + 13)dx = 2C_1B_1BC$$

und

$$(22.)\qquad -\int_4^{10} \frac{2ydy}{\sqrt{2y-4}} = 2\int_1^{-1} ydx$$

$$= -\int_{-1}^{+1} (x^2 - 6x + 13)dx = -2D_1A_1AD$$

sein würde. Die doppelte Fläche A_1B_1BA erhält man aus $\int \frac{2ydy}{\sqrt{2y-4}}$ nur dadurch, daß man y von $A_1A = 4$ bis $T_1T = 2$ abnehmen und dann von $T_1T = 2$ bis $B_1B = 10$ zunehmen läßt.

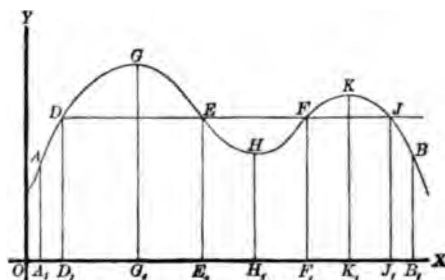
Um den allgemeinen Fall zu behandeln, nehme man an, daß in dem Integral $\int_a^b f[\varphi(x)]dx$ statt der Integrations-Veränderlichen x durch die Gleichung

$$(23.)\qquad y = \varphi(x)$$

die neue Integrations-Veränderliche y substituiert werde. Ist nun die Kurve, welche der Gleichung (23.) entspricht, durch die Figur 108 dargestellt, so hat y zwischen den Grenzen a und b für

(24.) $\quad x = g = OG_1, \quad x = h = OH_1, \quad x = k = OK_1$

Fig. 108.



Maxima bezw. Minima. Es werden also zwischen den Grenzen $x = g$ und $x = h$ diejenigen Werte von y, welche zwischen den Grenzen $x = a = OA_1$ und $x = g$ vorkommen, wenigstens teilweise wiederkehren. Ebenso werden zwischen den Grenzen $x = h$ und $x = k$ diejenigen Werte, welche zwischen den Grenzen $x = g$ und $x = k$ vorkommen, wenigstens teilweise wiederkehren. Usw. Es haben z. B. die 4 Punkte D, E, F und J, welche in den 4 voneinander unterschiedenen Intervallen liegen, gleiche Ordinaten y, obgleich die zugehörigen Abszissen x voneinander verschieden sind; d. h. die Gleichung (23.) hat, wenn man sie nach x auflöst, für den betrachteten Wert von y mehrere Wurzeln. In Figur 108 ist z. B. die Zahl dieser Wurzeln gleich 4. Bezeichnet man diese Wurzeln mit $w_1(y)$, $w_2(y)$, $w_3(y)$, $w_4(y)$, ist also

(25.) $x = w_1(y)$ zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = g$,

(26.) $x = w_2(y)$ „ „ „ $x = g$ „ $x = h$,

(27.) $x = w_3(y)$ „ „ „ $x = h$ „ $x = k$,

(28.) $x = w_4(y)$ „ „ „ $x = k$ „ $x = b$,

so muß man dem entsprechend das gesuchte Integral in 4 Integrale zerlegen, indem man

$$(29.)\quad \int_a^b f[\varphi(x)]dx = \int_a^g f[\varphi(x)]dx + \int_g^h f[\varphi(x)]dx + \int_h^k f[\varphi(x)]dx + \int_k^b f[\varphi(x)]dx$$

setzt. Dadurch erhält man nach Einführung der neuen Integrations-Veränderlichen y

$$(30.)\quad \int_a^g f[\varphi(x)]dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(g)} f(y) \,.\, w_1'(y)dy, \qquad \text{[nach Gl. (25.)]}$$

$$(31.)\quad \int_g^h f[\varphi(x)]dx = \int_{\varphi(g)}^{\varphi(h)} f(y) \,.\, w_2'(y)dy, \qquad \text{[nach Gl. (26.)]}$$

$$(32.)\quad \int_h^k f[\varphi(x)]dx = \int_{\varphi(h)}^{\varphi(k)} f(y) \,.\, w_3'(y)dy, \qquad \text{[nach Gl. (27.)]}$$

$$(33.)\quad \int_k^b f[\varphi(x)]dx = \int_{\varphi(k)}^{\varphi(b)} f(y) \,.\, w_4'(y)dy; \qquad \text{[nach Gl. (28.)]}$$

das gesuchte Integral wird daher

$$(34.)\quad \int_a^b f[\varphi(x)]dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(g)} f(y) \,.\, w_1'(y)dy + \int_{\varphi(g)}^{\varphi(h)} f(y) \,.\, w_2'(y)dy + \int_{\varphi(h)}^{\varphi(k)} f(y) \,.\, w_3'(y)dy + \int_{\varphi(k)}^{\varphi(b)} f(y) \,.\, w_4'(y)dy.$$

Beispiel. Macht man bei der Rektifikation der Astroide

$$(35.)\quad x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$$

(vergl. Fig. 77 bei Aufgabe 6 in § 27) den Punkt A mit den Koordinaten $x = a$, $y = 0$ zum Anfangspunkte des Bogens, so wächst der Bogen gleichzeitig mit t, und man erhält den ganzen Umfang der Astroide, wenn t alle Werte von 0 bis 2π durchläuft. Deshalb haben ds und dt in dem ganzen Intervall gleiches Zeichen. Aus den Gleichungen

$$(36.)\quad dx = -3a\cos^2 t \sin t\, dt, \quad dy = 3a\sin^2 t \cos t\, dt,$$

$$(37.)\quad ds^2 = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t\, dt^2$$

folgt daher

$$(38.)\quad ds = \pm 3a\sin t \cos t\, dt = \pm 3a \sin t\, d(\sin t),$$

wobei das Zeichen so zu wählen ist, daß $\frac{ds}{dt}$ positiv wird. Um den ganzen Umfang zu berechnen, muß man deshalb das Intervall von 0 bis 2π in vier gleiche Teile zerlegen und muß in jedem dieser Teile abwechselnd das positive

und das negative Vorzeichen nehmen. Dadurch erhält man für den ganzen Umfang

$$(39.)\qquad U = +3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt - 3a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin t\cos t\,dt$$

$$+3a\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt - 3a\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin t\cos t\,dt,$$

oder

$$(40.)\quad U = \frac{3a}{2}[\sin^2 t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3a}{2}[\sin^2 t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{3a}{2}[\sin^2 t]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{3a}{2}[\sin^2 t]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= \frac{3a}{2}(1-0) - \frac{3a}{2}(0-1) + \frac{3a}{2}(1-0) - \frac{3a}{2}(0-1) = 6a.$$

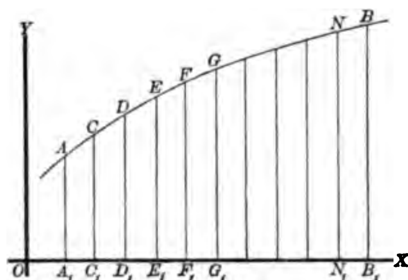
§ 66.

Messungsmethoden zur Berechnung bestimmter Integrale.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 191 und 192.)

Soll der Flächeninhalt $F = A_1B_1BA$ einer ebenen Figur berechnet werden, welche oben wieder durch den Kurvenbogen AB (Fig. 109) mit der Gleichung

Fig. 109.



$$(1.)\qquad y = f(x),$$

unten von der X-Achse, links und rechts von den Ordinaten $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, so kann man

$$(2.)\quad F = A_1B_1BA = \int_a^b f(x)dx$$

näherungsweise auch durch *lineare Messungen* finden. Man braucht dann die Funktion

$$(3.)\qquad F(x) = \int f(x)dx$$

gar nicht zu bestimmen, ja es braucht nicht einmal die Funktion $y = f(x)$ bekannt zu sein.

Teilt man nämlich die Strecke A_1B_1 in n gleiche Teile h und legt durch die Teilpunkte Parallele zur Y-Achse, so wird die Figur in n schmale Streifen zerlegt. Diese Streifen kann man näherungsweise als Paralleltrapeze betrachten, indem man die einzelnen Kurvenbogen durch gerade Linien ersetzt. Dies gibt, wenn man

$$f(a) = y_0,\quad f(a+h) = y_1,\quad f(a+2h) = y_2, \ldots \tag{4.}$$
$$f(a+nh) = f(b) = y_n$$

setzt,

$$A_1C_1CA = \frac{h}{2}(y_0 + y_1),\quad C_1D_1DC = \frac{h}{2}(y_1 + y_2), \tag{5.}$$

$$D_1E_1ED = \frac{h}{2}(y_2 + y_3), \ldots N_1B_1BN = \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n),$$

also

$$A_1B_1BA = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \tag{6.}$$
$$= \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 2f(b-h) + f(b)].$$

Je größer die Anzahl n der Streifen wird, um so genauer wird das Resultat; wächst n ins Unendliche, so wird der gefundene Ausdruck dem gesuchten Integral bezw. dem gesuchten Flächeninhalt sogar genau gleich.

Beispiel.

Es ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}. \tag{7.}$$

Für $n = 8$, $h = \frac{1}{8}$ wird in diesem Falle

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}\left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{8}\right) + 2f\left(\frac{2}{8}\right) + \cdots + 2f\left(\frac{7}{8}\right) + f(1)\right],$$

oder, da $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ist,

$$\pi = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{128}{65} + \frac{128}{68} + \frac{128}{73} + \frac{128}{80} + \frac{128}{89} + \frac{128}{100} + \frac{128}{113} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{32}{65} + \frac{8}{17} + \frac{32}{73} + \frac{2}{5} + \frac{32}{89} + \frac{8}{25} + \frac{32}{113} + \frac{1}{8}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 1 : 4 &= 0{,}25 \\ 32 : 65 &= 0{,}492\,307\,69 \\ 8 : 17 &= 0{,}470\,588\,24 \\ 32 : 73 &= 0{,}438\,356\,16 \\ 2 : 5 &= 0{,}4 \\ 32 : 89 &= 0{,}359\,550\,56 \\ 8 : 25 &= 0{,}32 \\ 32 : 113 &= 0{,}283\,185\,84 \\ 1 : 8 &= 0{,}125; \end{aligned}$$

folglich erhält man *näherungsweise*

$$\pi = 3{,}138\,988\,49.$$

Der gefundene Wert ist also um 0,002 604 16 *kleiner* als der wahre Wert der Zahl

$$\pi = 3{,}141\,592\,65.$$

Bei dem angegebenen Verfahren ist an die Stelle des Kurvenbogens AB ein der Kurve *einbeschriebenes* Polygon getreten. Man kann mit gleichem Rechte auch ein der Kurve *umschriebenes* Polygon in Betracht ziehen, indem man in den Punkten C, E, G, ... (Fig. 109) an die Kurve Tangenten legt und z. B. die beiden Streifen A_1C_1CA und C_1D_1DC durch das Paralleltrapez $A_1D_1D'A'$ (Fig. 110) ersetzt. Dabei wird

Fig. 110.

(8.) $A_1A' + D_1D' = 2C_1C = 2f(a+h)$, also

(9.) $A_1D_1D'A' = 2h \,.\, f(a+h)$.

Ebenso findet man für die beiden folgenden Streifen den Näherungswert

(10.) $2h \,.\, f(a+3h)$,

usw.

Unter der Voraussetzung, daß die Anzahl der Streifen ne *gerade* ist — sie heiße jetzt $2n$ —, findet man daher ir den Flächeninhalt der ganzen Figur den Näherungswert

$$\text{(11.)}\quad F = 2h[f(a+h) + f(a+3h) + \cdots + f(b-h)]$$
$$= 2h(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{2n-1}),$$

ro wieder

$$f(a+h) = y_1, \quad f(a+3h) = y_3, \quad f(a+5h) = y_5, \ldots$$
$$f[a+(2n-1)h] = f(b-h) = y_{2n-1}$$

esetzt ist.

Zu bemerken ist dabei, daß die Tangenten in den unkten C und E (Fig. 109) die Ordinate D_1D im allgeneinen nicht genau in demselben Punkte D' treffen weren, so daß die Figur, deren Flächeninhalt durch Gleichung 11.) berechnet worden ist, von dem umschriebenen Polygon ich um eine kleine Größe unterscheidet.

Beispiel.

Es möge auch diese letzte Formel auf die Berechnung r Zahl π angewendet werden, wenn man wieder von leichung (7.) ausgeht. In diesem Falle sei die Anzahl der reifen

$$2n = 16, \quad \text{also} \quad h = \frac{1}{16},$$

nn wird

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{8}\left[f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + \cdots + f\left(\frac{15}{16}\right)\right],$$

$$\pi = \frac{128}{257} + \frac{128}{265} + \frac{128}{281} + \frac{128}{305} + \frac{128}{337} + \frac{128}{377} + \frac{128}{425} + \frac{128}{481}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
128 : 257 &= 0{,}498\,054\,47\\
128 : 265 &= 0{,}483\,018\,87\\
128 : 281 &= 0{,}455\,516\,01\\
128 : 305 &= 0{,}419\,672\,13\\
128 : 337 &= 0{,}379\,821\,96\\
128 : 377 &= 0{,}339\,522\,55\\
128 : 425 &= 0{,}301\,176\,47\\
128 : 481 &= 0{,}266\,112\,27;
\end{aligned}$$

folglich erhält man *näherungsweise*

$$\pi = 3{,}142\,894\,73.$$

Der gefundene Wert ist also um 0,001 302 08 *größer* als der wahre Wert der Zahl

$$\pi = 3{,}141\,592\,65.$$

Der Fehler ist in diesem Falle etwa *halb so groß* wie bei der vorhergehenden Methode.

Diese zweite Methode wird auch bei anderen Anwendungen in der Regel genauere Resultate liefern als die erste, ohne daß man mehr einzelne Glieder zu berechnen braucht, weil sich einer Kurve die Tangenten im allgemeinen enger anschmiegen als die Sehnen. Von diesem Umstande wird in dem folgenden Paragraphen Vorteil gezogen werden.

§ 67.

*Simpson*sche Regel.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 193 und 194.)

Es möge wieder eine Figur begrenzt sein oben durch den Kurvenbogen AB mit der Gleichung

$$(1.)\qquad y = f(x),$$

unten durch die X-Achse, links und rechts durch die Ordinaten $x = a$ und $x = b$ (vergl. Figur 109); die Strecke A_1B_1 sei in $2n$ gleiche Teile von der Länge h, und die Figur selbst sei durch die Ordinaten $y_1, y_2, y_3 \ldots y_{2n-1}$ in $2n$ Streifen zerlegt. Vereinigt man zunächst je 2 benachbarte Streifen, so daß man tatsächlich nur noch n Doppelstreifen hat, und ersetzt die begrenzenden Kurvenbogen durch die zugehörigen Sehnen, so findet man aus Formel Nr. 191 der Tabelle für den gesuchten Flächeninhalt, indem man h mit $2h$ vertauscht, den angenäherten Wert

$$(2.)\quad F_1 = h[f(a) + 2f(a+2h) + 2f(a+4h) + \cdots + 2f(b-2h) + f(b)].$$

Ersetzt man dagegen bei den Doppelstreifen die Kurvenbogen bezw. durch die Tangenten, welche in den Endpunkten der Ordinaten $y_1, y_3, y_5, \ldots y_{2n-1}$ an die Kurve

gelegt sind, so erhält man nach Formel Nr. 192 der Tabelle den angenäherten Wert

$$(3.)\quad F_2 = 2h[f(a+h) + f(a+3h) + f(a+5h) + \cdots + f(b-h)].$$

Ist der begrenzende Kurvenbogen AB zwischen A und B *nach oben konvex*, so ist F_1 *kleiner* als der gesuchte Flächeninhalt

$$(4.)\quad F = \int_a^b f(x)dx,$$

und F_2 ist *größer* als F; es ist also

$$(5.)\quad F_1 < F < F_2.$$

Ist dagegen der begrenzende Kurvenbogen AB zwischen A und B *nach oben konkav*, so wird

$$(6.)\quad F_1 > F > F_2.$$

In beiden Fällen ist F ein Mittelwert zwischen F_1 und F_2, so daß die Größe v, welche durch die Gleichung

$$(7.)\quad \frac{F - F_1}{F_2 - F} = v$$

erklärt wird, immer *positiv* ist, und zwar wird v für hinreichend große Werte von n in der Regel größer als 1 sein, weil sich die Tangenten enger an die Kurve anschmiegen als die Sehnen. Aus Gleichung (7.) ergibt sich sodann

$$(8.)\quad F = \frac{F_1 + vF_2}{1 + v}.$$

Bei der angenäherten Berechnung der Zahl π im vorhergehenden Paragraphen war z. B. $F - F_1$ etwa doppelt so groß wie $F_2 - F$. Setzt man daher in den Gleichungen (7.) und (8.) $v = 2$, so erhält man durch die Formel

$$(9.)\quad F = \frac{F_1 + vF_2}{1 + v} = \frac{F_1 + 2F_2}{3}$$

eine noch stärkere Annäherung an den wirklichen Wert des bestimmten Integrals. Dies gibt, wenn man die Werte von F_1 und F_2 in Gleichung (9.) einsetzt,

$$(10.)\quad F = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \cdots + 2f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)],$$

oder

$$(11.)\quad F=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+2y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}).$$

Für die Zahl π erhält man daher unter Benutzung der im vorigen Paragraphen gefundenen Resultate

$$\pi=\frac{1}{3}(3{,}138\,988\,49+6{,}285\,789\,46)=3{,}141\,592\,65.$$

Der gefundene Wert stimmt also bis auf 8 Dezimalstellen genau mit dem wahren Werte von π überein.

Die in den Gleichungen (10.) und (11.) enthaltene Formel, welche unter dem Namen „*Simpson*sche Regel" bekannt ist, gibt nicht nur für die Berechnung der Zahl π sehr genaue Werte, sondern auch für die Berechnung von anderen bestimmten Integralen, wenn man nur die Zahl n groß genug macht. Bei dem ersten, in § 66 angewendeten Näherungsverfahren wurde die begrenzende Kurve durch *gerade Linien* mit der Gleichung

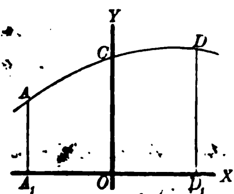
$$y=ax+b$$

ersetzt, wobei die Konstanten a und b so bestimmt werden können, daß jede dieser Geraden durch zwei benachbarte Punkte der Kurve hindurchgeht. Auf die *Simpson*sche Regel dagegen wird man geführt, indem man bei der Berechnung der Doppelstreifen die einzelnen Kurvenbogen durch passend gewählte *Parabelbogen* ersetzt, welche sich der Kurve sehr eng anschließen. Dies geschieht in folgender Weise.

Die Gleichung

$$(12.)\quad y=ax^2+bx+c$$

Fig. 111.



stellt, was auch die konstanten Koeffizienten a, b, c sein mögen, eine Parabel dar, deren Achse zur Y-Achse parallel ist. Über die Koeffizienten a, b, c kann man nun so verfügen, daß die Parabel durch die drei Punkte A, C, D (Fig. 111) mit den Koordinaten $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, $(+h, y_2)$ hindurchgeht, indem man die Gleichungen

$$(13.)\quad \begin{cases} y_0 = ah^2 - bh + c, \\ y_1 = c, \\ y_2 = ah^2 + bh + c \end{cases}$$

befriedigt. Daraus ergibt sich

$$(14.)\quad a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2), \quad b = \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2), \quad c = y_1,$$

so daß Gleichung (12.) übergeht in

$$(15.)\quad y = \frac{1}{2h^2}[(y_0 - 2y_1 + y_2)x^2 + h(-y_0 + y_2)x + 2h^2y_1].$$

Der Flächeninhalt der Figur A_1D_1DA wird daher

$$(16.)\quad A_1D_1DA = \int_{-h}^{+h} y dx$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left[(y_0 - 2y_1 + y_2)\frac{x^3}{3} + h(-y_0 + y_2)\frac{x^2}{2} + 2h^2y_1x\right]_{-h}^{+h}$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[(y_0 - 2y_1 + y_2)\frac{h^3}{3} + 2h^2y_1h\right] = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Da bei einer beliebigen Parallelverschiebung der Y-Achse sich weder die Länge der Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{2n}$ noch die Größe h ändert, so kann man in ähnlicher Weise den Flächeninhalt der sämtlichen Doppelstreifen (in Figur 109) berechnen und findet dafür bezw.

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4), \cdots \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n});$$

dabei hat man die einzelnen Kurvenbogen durch Parabelbogen ersetzt, welche durch je 3 aufeinander folgende Punkte der begrenzenden Kurve AB hindurchgehen. Für den Flächeninhalt der ganzen Figur erhält man dann den angenäherten Wert

$$(17.)\quad F = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}),$$

ein Ausdruck, welcher mit Gleichung (11.), d. h. mit der *Simpson*schen Regel genau übereinstimmt.

Um sich darüber Rechenschaft zu geben, wie genau die durch Anwendung der *Simpson*schen Regel gefundenen Resultate sind, diene die folgende Betrachtung. Entwickelt man

$$(18.)\quad \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)]$$

nach steigenden Potenzen von h, so erhält man durch Anwendung der *Taylor*schen Reihe

$$(19.)\quad \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) = 2h\,.\,f(a) + 2h^2\,.\,f'(a) + \frac{4h^3}{3}f''(a) + \frac{2h^4}{3}f'''(a) + \frac{5h^5}{18}f^{(4)}(a) + \cdots.$$

Anderseits ist nach der *Taylor*schen Reihe, wenn man die Funktion $F(x)$ durch die Gleichung

$$F'(x) = f(x)$$

erklärt,

$$(20.)\quad \int\limits_a^{a+2h} f(x)dx = F(a+2h) - F(a)$$

$$= \frac{2h}{1!}f(a) + \frac{4h^2}{2!}f'(a) + \frac{8h^3}{3!}f''(a) + \frac{16h^4}{4!}f'''(a) + \frac{32h^5}{5!}f^{(4)}(a) + \cdots,$$

folglich wird

$$(21.)\quad \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) - \int\limits_a^{a+2h} f(x)dx = \frac{h^5}{90}f^{(4)}(a) + \cdots.$$

Man erkennt daraus, daß der Unterschied zwischen dem Näherungswert, den die *Simpson*sche Regel liefert, und dem wahren Werte des Integrals mit h zugleich unendlich klein wird von der *fünften* Ordnung.

Für n Doppelstreifen ist daher der Unterschied etwa n-mal so groß, folglich wird der gesamte Fehler, da $2nh = b - a$ ist, gleich einem Mittelwerte von $f^{(4)}(x)$, multipliziert mit $\frac{(b-a)h^4}{180}$.

Es war bei Herleitung der Näherungsformeln in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen bisher die Voraus-

setzung gemacht worden, daß der begrenzende Kurvenbogen *AB über* der *X*-Achse liegt; es gelten aber noch dieselben Schlüsse auch dann, wenn der Bogen *AB unter* der *X*-Achse liegt, es wird dann aber der Wert des bestimmten Integrals *negativ*. Die Formeln bleiben sogar noch richtig, wenn die Kurve teilweise *über*, teilweise *unter* der *X*-Achse liegt, wie aus der Zerlegung des bestimmten Integrals hervorgeht.

Ebenso ist es nicht notwendig, daß der Bogen *AB* in seiner ganzen Ausdehnung *nach oben konvex* oder *nach oben konkav* ist. Es wird aber zweckmäßig sein, durch die Ordinaten der Wendepunkte, welche zwischen *A* und *B* möglicherweise vorhanden sind, die Figur (bezw. das bestimmte Integral) zu zerlegen.

Das Verfahren, durch welches die *Simpson*sche Regel zuletzt hergeleitet worden ist, läßt sich noch verallgemeinern, indem man die Figur in $4n$ Streifen von gleicher Breite h zerlegt und in der Gleichung

$$y = ax^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \tag{22.}$$

die 5 konstanten Koeffizienten a, a_1, a_2, a_3, a_4 so bestimmt, daß die neue Kurve mit dem Kurvenbogen *AB* (Fig. 109) 5 aufeinander folgende Punkte, z. B. die 5 Punkte *A*, *C*, *D*, *E*, *F*, gemeinschaftlich hat. Auf diese Weise erhält man eine Kurve, welche sich der gegebenen Kurve längs des Bogens *ACDEF* im allgemeinen noch enger anschließt. Deshalb findet man dann auch bei der Berechnung des Inhaltes der Fläche A_1F_1FA noch genauere Resultate als durch die bisherigen Methoden, wenn man die gegebene Kurve durch die der Gleichung (22.) entsprechende ersetzt.

Ähnlich wie bei der *Simpson*schen Regel findet man dann für den Näherungswert den Ausdruck

$$\begin{aligned} F = \frac{2h}{45}[&(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4) \\ &+ (7y_4 + 32y_5 + 12y_6 + 32y_7 + 7y_8) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (7y_{4n-4} + 32y_{4n-3} + 12y_{4n-2} + 32y_{4n-1} + 7y_{4n})]. \end{aligned} \tag{23.}$$

Auch hier kann man sich über die Genauigkeit der gefundenen Resultate durch die Entwickelung nach der *Taylor*schen Reihe Rechenschaft geben, denn es ist

$$(24.)\quad F_1 = \frac{2h}{45}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4)$$

$$= \frac{2h}{45}\Big[7f(a) + 32f(a+h) + 12f(a+2h) + 32f(a+3h) + 7f(a+4h)\Big]$$

$$= 4hf(a) + 8h^2f'(a) + \frac{32h^3}{3}f''(a) + \frac{32h^4}{3}f'''(a) + \frac{128h^5}{15}f^{(4)}(a) + \frac{256h^6}{45}f^{(5)}(a) + \frac{88h^7}{27}f^{(6)}(a) + \cdots.$$

Anderseits ist

$$(25.)\quad \int\limits_a^{a+4h} f(x)dx = \int\limits_a^{a+4h} F'(x)dx = F(a+4h) - F(a)$$

$$= 4hf(a) + 8h^2f'(a) + \frac{32h^3}{3}f''(a) + \frac{32h^4}{3}f'''(a) + \frac{128h^5}{15}f^{(4)}(a) + \frac{256h^6}{45}f^{(5)}(a) + \frac{1024h^7}{315}f^{(6)}(a) + \cdots,$$

folglich wird

$$(26.)\quad F_1 - \int\limits_a^{a+4h} f(x)dx = \frac{8h^7}{945}f^{(6)}(a) + \cdots.$$

Der Unterschied zwischen dem Näherungswerte und dem wahren Werte des Integrals wird also für je 4 Streifen von der Breite h mit h zugleich unendlich klein von der *siebenten* Ordnung.

Für alle $4n$ Streifen wird demnach der Unterschied etwa n-mal so groß. Der gesamte Fehler wird also, da

$$4nh = b - a$$

ist, gleich einem Mittelwert von $f^{(6)}(x)$, multipliziert mit

$$\frac{2(b-a)h^6}{945}.$$

In dieser Weise kann man fortfahren und die einzelnen Teile des Kurvenbogens AB durch Kurvenbogen mit der Gleichung

$$y = ax^{2m} + a_1x^{2m-1} + a_2x^{2m-2} + \cdots + a_{2m-1}x + a_{2m} \tag{27.}$$

ersetzen, welche durch je $2m+1$ aufeinander folgende Punkte der gegebenen Kurve hindurchgehen.

Es ist dabei noch zu bemerken, daß die Genauigkeit im allgemeinen keine wesentlich größere wird, wenn man die Gleichung (27.) mit der Gleichung

$$y = ax^{2m+1} + a_1x^{2m} + a_2x^{2m-1} + \cdots + a_{2m}x + a_{2m+1} \tag{28.}$$

vertauscht und die $2m+2$ Koeffizienten $a, a_1, a_2, \ldots a_{2m+1}$ so bestimmt, daß die entsprechende Kurve durch $2m+2$ aufeinander folgende Punkte der gegebenen Kurve hindurchgeht. Der Grund dafür liegt darin, daß bei dem Integral

$$\int\limits_{-k}^{+k} y\,dx = \left[a\frac{x^{2m+2}}{2m+2} + a_1\frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \cdots + a_{2m}\frac{x^2}{2} + a_{2m+1}x\right]_{-k}^{+k} \tag{29.}$$

$$= 2\left(a_1\frac{k^{2m+1}}{2m+1} + a_8\frac{k^{2m-1}}{2m-1} + \cdots + a_{2m+1}k\right)$$

der Koeffizient a von x^{2m+1} in dem Endresultat überhaupt nicht mehr vorkommt.

§ 68.

Übungs-Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll mit Anwendung der *Simpson*schen Regel

$$\ln 2 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x} \tag{1.}$$

berechnen.

Auflösung. Es sei $2n = 12$, also $h = \frac{1}{12}$, dann wird

$$(2.)\quad \ln 2 = \frac{1}{36}\Big[f(1) + 4f\Big(\frac{13}{12}\Big) + 2f\Big(\frac{14}{12}\Big) + \cdots + 4f\Big(\frac{23}{12}\Big) + f(2)\Big]$$

$$= \frac{1}{36}\Big(1 + \frac{48}{13} + \frac{24}{14} + \frac{48}{15} + \frac{24}{16} + \frac{48}{17} + \frac{24}{18} + \frac{48}{19} + \frac{24}{20}$$

$$+ \frac{48}{21} + \frac{24}{22} + \frac{48}{23} + \frac{12}{24}\Big).$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
1 : 36 &= 0{,}027\,777\,78 \\
4 : 39 &= 0{,}102\,564\,10 \\
2 : 42 &= 0{,}047\,619\,05 \\
4 : 45 &= 0{,}088\,888\,89 \\
2 : 48 &= 0{,}041\,666\,67 \\
4 : 51 &= 0{,}078\,431\,37 \\
2 : 54 &= 0{,}037\,037\,04 \\
4 : 57 &= 0{,}070\,175\,44 \\
2 : 60 &= 0{,}033\,333\,33 \\
4 : 63 &= 0{,}063\,492\,06 \\
2 : 66 &= 0{,}030\,303\,03 \\
4 : 69 &= 0{,}057\,971\,01 \\
1 : 72 &= 0{,}013\,888\,89;
\end{aligned}$$

folglich findet man für ln2 den Näherungswert 0,693 148 66, der sich von dem wahren Werte, nämlich von

$$\ln 2 = 0{,}693\,147\,18$$

nur um 0,000 001 48 unterscheidet.

Berechnet man $\ln 2 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ nach der zweiten Methode, also nach Formel Nr. 194 der Tabelle, indem man wieder 12 Intervalle annimmt, so wird

$$(3.)\qquad 4n = 12, \quad h = \frac{1}{12},$$

also

$$(4.)\quad F = \frac{2h}{45}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 14y_4 + 32y_5$$
$$+ 12y_6 + 32y_7 + 14y_8 + 32y_9 + 12y_{10} + 32y_{11} + 7y_{12})$$
$$= \frac{1}{270}\Big(7 + \frac{384}{13} + \frac{144}{14} + \frac{384}{15} + \frac{168}{16} + \frac{384}{17} + \frac{144}{18}$$
$$+ \frac{384}{19} + \frac{168}{20} + \frac{384}{21} + \frac{144}{22} + \frac{384}{23} + \frac{7}{2}\Big).$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
7 &= 7 \\
384 : 13 &= 29{,}538\,461\,538\,5 \\
144 : 14 &= 10{,}285\,714\,285\,7 \\
384 : 15 &= 25{,}6 \\
168 : 16 &= 10{,}5 \\
384 : 17 &= 22{,}588\,235\,294\,1 \\
144 : 18 &= 8 \\
384 : 19 &= 20{,}210\,526\,315\,8 \\
168 : 20 &= 8{,}4 \\
384 : 21 &= 18{,}285\,714\,285\,7 \\
144 : 22 &= 6{,}545\,454\,545\,5 \\
384 : 23 &= 16{,}695\,652\,173\,9 \\
7 : 2 &= 3{,}5;
\end{aligned}$$

folglich erhält man für $\ln 2$ den Näherungswert

$$(5.)\qquad F = 187{,}149\,758\,439\,2 : 270 = 0{,}693\,147\,253\,5,$$

der sich von

$$\ln 2 = 0{,}693\,147\,180\,6$$

nur um

$$(6.)\qquad F - \ln 2 = 0{,}000\,000\,072\,9$$

unterscheidet.

Aufgabe 2. Man soll die Zahl π durch Anwendung der *Simpson*schen Regel aus der Gleichung

$$(7.)\qquad \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^{0,5} = \frac{\pi}{6}$$

berechnen.

Auflösung. Für $2n = 8$, also $h = \frac{1}{16}$ erhält man

$$(8.)\quad \pi = \frac{6h}{3}\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{16}\right) + \cdots + 4f\left(\frac{7}{16}\right) + f\left(\frac{8}{16}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + \frac{64}{\sqrt{255}} + \frac{32}{\sqrt{252}} + \frac{64}{\sqrt{247}} + \frac{32}{\sqrt{240}} + \frac{64}{\sqrt{231}} + \frac{32}{\sqrt{220}} + \frac{64}{\sqrt{207}} + \frac{16}{\sqrt{192}}\right)$$

oder

$$(9.)\quad \pi = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{16320}}{255} + \frac{\sqrt{28}}{21} + \frac{\sqrt{15808}}{247} + \frac{\sqrt{15}}{15} + \frac{\sqrt{14784}}{231} + \frac{\sqrt{220}}{55} + \frac{\sqrt{1472}}{69} + \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 1 : 8 &= 0{,}125 \\ \sqrt{16320} : 255 &= 0{,}500\,979\,43 \\ \sqrt{28} : \ 21 &= 0{,}251\,976\,31 \\ \sqrt{15808} : 247 &= 0{,}509\,027\,81 \\ \sqrt{15} : \ 15 &= 0{,}258\,198\,89 \\ \sqrt{14784} : 231 &= 0{,}526\,361\,35 \\ \sqrt{220} : \ 55 &= 0{,}269\,679\,95 \\ \sqrt{1472} : \ 69 &= 0{,}556\,038\,44 \\ \sqrt{3} : \ 12 &= 0{,}144\,337\,57; \end{aligned}$$

folglich erhält man für die Zahl π den Näherungsw 3,141 599 75, der sich von dem wahren Werte, nämlich

$$\pi = 3{,}141\,592\,65,$$

nur um die Größe 0,000 007 10 unterscheidet.

Aufgabe 3. Von einer Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ den Halbachsen $a = 6$, $b = 4$ soll man das Flächenst $Q_1Q_2P_2P_1$ berechnen (Fig. 112), wenn $OQ_1 = -1$ $OQ_2 = +5$ ist.

Auflösung. Aus der Gleichung der Ellipse folgt

$$(10.)\quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2}{3}\sqrt{36 - x^2},$$

laß man für den ge-
ten Flächeninhalt

$$) \quad F = \frac{2}{3}\int_{-1}^{+5} dx\sqrt{36 - x^2}$$

ilt. Nach der *Simpson*-
n Regel wird daher für
$= 12$, $h = \frac{1}{2}$

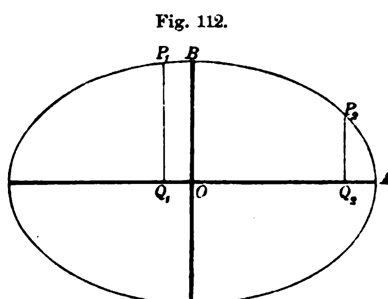


Fig. 112.

$$) \quad F = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}(\sqrt{35} + 4\sqrt{35{,}75} + 2\sqrt{36} + 4\sqrt{35{,}75}$$
$$+ 2\sqrt{35} + 4\sqrt{33{,}75} + 2\sqrt{32} + 4\sqrt{29{,}75}$$
$$+ 2\sqrt{27} + 4\sqrt{23{,}75} + 2\sqrt{20} + 4\sqrt{15{,}75} + \sqrt{11}).$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
2\sqrt{36} &= 2\,.\,6 &&= 12{,}000\,000\,0\\
8\sqrt{35{,}75} &= \sqrt{2288} &&= 47{,}833\,043\,0\\
3\sqrt{35} &= \sqrt{315} &&= 17{,}748\,239\,3\\
4\sqrt{33{,}75} &= \sqrt{540} &&= 23{,}237\,900\,1\\
2\sqrt{32} &= \sqrt{128} &&= 11{,}313\,708\,5\\
4\sqrt{29{,}75} &= \sqrt{476} &&= 21{,}817\,424\,2\\
2\sqrt{27} &= \sqrt{108} &&= 10{,}392\,304\,8\\
4\sqrt{23{,}75} &= \sqrt{380} &&= 19{,}493\,588\,7\\
2\sqrt{20} &= \sqrt{80} &&= 8{,}944\,271\,9\\
4\sqrt{15{,}75} &= \sqrt{252} &&= 15{,}874\,507\,9\\
& \ \sqrt{11} &&= 3{,}316\,624\,8;
\end{aligned}$$

erhält daher für F den *Näherungswert*

$$191{,}971\,613\,2 : 9 = 21{,}330\,179\,24.$$

Den *wahren* Wert von F findet man aus

$$F = \frac{2}{3}\int_{-1}^{5} dx\sqrt{36 - x^2} = \frac{2}{3}\left[\frac{x}{2}\sqrt{36 - x^2} + 18\arcsin\left(\frac{x}{6}\right)\right]_{-1}^{+5}$$
$$= \frac{1}{3}(5\sqrt{11} + \sqrt{35}) + 12\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) - 12\arcsin\left(-\frac{1}{6}\right).$$

Dabei ist (vergl. Aufgabe 4 in § 19)

$$\frac{5}{3}\sqrt{11} = 5{,}527\,708$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{35} = 1{,}972\,027$$

$$12\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) = 11{,}821\,327$$

$$12\arcsin\left(\frac{1}{6}\right) = 2{,}009\,377,$$

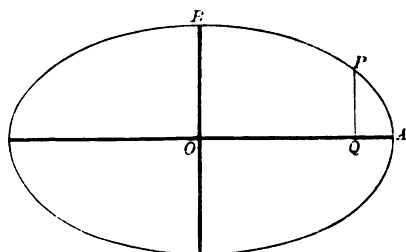
also

(15.) $$F = 21{,}330\,439.$$

Der durch die Anwendung der *Simpson*schen Regel gefundene Wert ist also um 0,000 260 zu klein.

Aufgabe 4. In einer Ellipse (Fig. 113) mit der Gleichung

Fig. 113.



(16.) $$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

seien die beiden Halbachsen

(17.) $$a = 10 \text{ und } b = 6;$$

man soll die Länge des Bogens BP bestimmen, wenn OQ gleich 8 ist.

Auflösung. Aus Gleichung (16.) folgt

(18.) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{a^4 - e^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}.$$

In dem vorliegenden Falle ist e gleich 8, also

(19.) $$s = BP = \int_0^8 dx \sqrt{\frac{10000 - 64x^2}{100(100 - x^2)}}.$$

Deshalb erhält man durch Anwendung der *Simpson*schen Regel für $2n = 8$, $h = 1$

(20.) $$s = \frac{1}{3}\Big(1 + 4\sqrt{\frac{9936}{9900}} + 2\sqrt{\frac{9744}{9600}} + 4\sqrt{\frac{9424}{9100}}$$

$$+ 2\sqrt{\frac{8976}{8400}} + 4\sqrt{\frac{8400}{7500}} + 2\sqrt{\frac{7696}{6400}} + 4\sqrt{\frac{6864}{5100}} + \sqrt{\frac{5904}{3600}}\Big).$$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
& & & 1 &= 1{,}000\,000\,00 \\
4\sqrt{9936} : \sqrt{9900} &= \sqrt{48576} &&: 55 &= 4{,}007\,266\,12 \\
2\sqrt{9744} : \sqrt{9600} &= \sqrt{406} &&: 10 &= 2{,}014\,944\,17 \\
4\sqrt{9424} : \sqrt{9100} &= \sqrt{3430336} &&: 455 &= 4{,}070\,586\,00 \\
2\sqrt{8976} : \sqrt{8400} &= \sqrt{20944} &&: 70 &= 2{,}067\,434\,57 \\
4\sqrt{8400} : \sqrt{7500} &= \sqrt{448} &&: 5 &= 4{,}233\,202\,10 \\
2\sqrt{7696} : \sqrt{6400} &= \sqrt{481} &&: 10 &= 2{,}193\,171\,22 \\
4\sqrt{6864} : \sqrt{5100} &= \sqrt{155584} &&: 85 &= 4{,}640\,486\,78 \\
\sqrt{5904} : \sqrt{3600} &= \sqrt{41} &&: 5 &= 1{,}280\,624\,85;
\end{aligned}
$$

folglich findet man für die Bogenlänge BP den Näherungswert

$$s = 25{,}507\,715\,81 : 3 = 8{,}502\,571\,94. \tag{21.}$$

Soll der Quadrant der Ellipse, nämlich

$$q = \int_0^{10} dx \sqrt{\frac{10000 - 64x^2}{100(100 - x^2)}} \tag{22.}$$

berechnet werden, so würde die Rechnung auf Schwierigkeiten stoßen, weil

$$f(x) = \sqrt{\frac{10000 - 64x^2}{100(100 - x^2)}}$$

für $x = 10$ unendlich groß wird. Um auch in diesem Falle die angenäherte Berechnung von $\int_8^{10} f(x)dx$ auszuführen, mache man y zur Integrations-Veränderlichen, indem man

$$y = \frac{6}{10}\sqrt{100 - x^2}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{10}{6}\sqrt{36 - y^2} \tag{23.}$$

setzt. Dies gibt (Fig. 113)

$$dx = -\frac{5ydy}{3\sqrt{36 - y^2}}, \quad ds = -dy\sqrt{\frac{1296 + 64y^2}{36(36 - y^2)}}, \tag{24.}$$

(25.) $$PA = \int_{8}^{10} f(x)dx = -\int_{3,6}^{0} dy \sqrt{\frac{324 + 16y^2}{9(36 - y^2)}}$$

$$= +\int_{0}^{3,6} dy \sqrt{\frac{324 + 16y^2}{9(36 - y^2)}}.$$

Wendet man auf die Berechnung dieses Integrals die *Simpson*sche Regel an, indem man $2n = 4$, also $h = 0,9$ setzt, so erhält man

(26.) $$PA = 0,3\left(1 + 4\sqrt{\frac{416}{391}} + 2\sqrt{\frac{116}{91}} + 4\sqrt{\frac{544}{319}} + \sqrt{\frac{41}{16}}\right).$$

Nun ist

$$0,3 = 0,300\,000\,00$$

$$1,2 \,.\, \sqrt{416} : \sqrt{391} = \sqrt{234224,64} : 391 = 1,237\,768\,80$$

$$0,6 \,.\, \sqrt{116} : \sqrt{91} = \sqrt{3800,16} : 91 = 0,677\,422\,39$$

$$1,2 \,.\, \sqrt{544} : \sqrt{319} = \sqrt{249891,84} : 319 = 1,567\,059\,02$$

$$0,3 \,.\, \sqrt{41} : \sqrt{16} = \sqrt{3,69} : 4 = 0,480\,234\,32;$$

folglich erhält man für PA den Näherungswert

(27.) $$PA = 4,262\,484\,53,$$

so daß man mit Rücksicht auf Gleichung (21.) für den ganzen Ellipsenquadranten

(28.) $$BPA = q = 12,765\,056\,47$$

erhält. Durch wirkliche Berechnung des elliptischen Integrals hatte man auf Seite 328 in § 59 für denselben Ellipsenquadranten

(29.) $$q = 12,763\,499\,4$$

gefunden, so daß das durch Anwendung der *Simpson*schen Regel berechnete Resultat um 0,001 557 1, d. h. um 0,000 122 00 der Bogenlänge zu groß ist.

Wenn man für die Zahl n noch größere Werte wählt, so werden die Resultate natürlich genauer.

§ 69.

*Gauß*sche Quadratur.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 195 und 196.)

Nach der *Simpson*schen Regel (Formel Nr. 193 der Tabelle) ist *näherungsweise*

$$(1.)\quad F = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)$$
$$+ f(a+2h) + 4f(a+3h) + f(a+4h)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)]$$
$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Auch bei dem in Formel Nr. 194 angegebenen Näherungswerte hatte F die Form

$$(2.)\quad F = h(c_0y_0 + c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_{4n}y_{4n}),$$

wobei $c_0, c_1, c_2, \ldots c_{4n}$ passend gewählte Zahlkoeffizienten und $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{4n}$ Ordinaten der Kurve

$$(3.)\quad y = f(x)$$

sind, welche *gleichen Abstand voneinander haben.* Eine noch stärkere Annäherung *bei gleicher oder sogar noch kleinerer Anzahl von Ordinaten* erhält man, wenn man den Ordinaten nicht die Beschränkung auferlegt, daß sie gleichen Abstand voneinander haben, sondern wenn man dieselben passend auswählt.

Handelt es sich z. B. um den Doppelstreifen

$$(4.)\quad \int_{c-h}^{c+h} f(x)dx = \int_{c-h}^{c+h} F'(x)dx = F(c+h) - F(c-h)$$
$$= 2\left[\frac{h}{1!}f(c) + \frac{h^3}{3!}f''(c) + \frac{h^5}{5!}f^{(4)}(c) + \cdots\right],$$

so mögen in dem Ausdruck

$$(5.)\quad F_1 = h[c_1f(c-\alpha h) + c_2f(c+\beta h)]$$

die 4 Größen c_1, c_2, α, β so bestimmt werden, daß in der Entwickelung von F_1 nach steigenden Potenzen von h, also in

$$(6.)\quad F_1 = (c_1 + c_2)hf(c) + (-c_1\alpha + c_2\beta)\frac{h^2}{1!}f'(c)$$
$$+ (c_1\alpha^2 + c_2\beta^2)\frac{h^3}{2!}f''(c) + (-c_1\alpha^3 + c_2\beta^3)\frac{h^4}{3!}f'''(c)$$
$$+ (c_1\alpha^4 + c_2\beta^4)\frac{h^5}{4!}f^{(4)}(c) + \cdots$$

möglichst viele Glieder mit der in Gleichung (4.) gegebenen Entwickelung übereinstimmen. Zunächst folgt aus den Gleichungen

$$(7.)\qquad -c_1\alpha + c_2\beta = 0, \quad \text{oder} \quad c_1\alpha = c_2\beta$$

und

$$(8.)\qquad -c_1\alpha^3 + c_2\beta^3 = 0, \quad \text{oder} \quad c_1\alpha^3 = c_2\beta^3,$$

daß

$$(9.)\qquad \beta^2 = \alpha^2, \quad \text{oder} \quad \beta = \pm\alpha.$$

Wäre $\beta = -\alpha$, so würden die beiden Ordinaten $f(c - \alpha h)$ und $f(c + \beta h)$ zusammenfallen; damit man zwei verschiedene Ordinaten erhält, muß man also in Gleichung (9.) das obere Vorzeichen wählen. Daraus folgt dann

$$(10.)\qquad c_1 = c_2,$$

so daß die Gleichungen (5.) und (6.) übergehen in

$$(11.)\quad F_1 = c_1h[f(c - \alpha h) + f(c + \alpha h)]$$
$$= 2\left[c_1hf(c) + c_1\alpha^2\frac{h^3}{2!}f''(c) + c_1\alpha^4\frac{h^5}{4!}f^{(4)}(c) + \cdots\right].$$

Jetzt sind nur noch die beiden Größen c_1 und α so zu bestimmen, daß

$$(12.)\qquad c_1 = 1, \quad 3c_1\alpha^2 = 1, \quad \text{also} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

wird. Dies gibt

$$(13.)\quad F_1 = h\left[f\left(c - \frac{h}{\sqrt{3}}\right) + f\left(c + \frac{h}{\sqrt{3}}\right)\right]$$
$$= 2\left[hf(c) + \frac{h^3}{3.2!}f''(c) + \frac{h^5}{9.4!}f^{(4)}(c) + \cdots\right].$$

Es ist daher

$$(14.)\qquad \int_{c-h}^{c+h} f(x)dx - F_1 = \frac{h^5}{135}f^{(4)}(c) + \cdots.$$

Indem man in Gleichung (13.) für c die Werte $c = a + h$, $a + 3h'$, $\dots b - h$ einsetzt und die daraus sich ergebenden Ausdrücke addiert, findet man für $\int_a^b f(x)dx$ den Näherungswert

$$(15.)\quad F = h\Big[f\Big(a + \frac{3-\sqrt{3}}{3}h\Big) + f\Big(a + \frac{3+\sqrt{3}}{3}h\Big) + f\Big(a + \frac{9-\sqrt{3}}{3}h\Big) + f\Big(a + \frac{9+\sqrt{3}}{3}h\Big) + f\Big(a + \frac{15-\sqrt{3}}{3}h\Big) + f\Big(a + \frac{15+\sqrt{3}}{3}h\Big) + \dots\dots + f\Big(b - \frac{3+\sqrt{3}}{3}h\Big) + f\Big(b - \frac{3-\sqrt{3}}{3}h\Big)\Big].$$

In dieser Formel braucht man $2n$ Ordinaten und erhält eine etwas stärkere Annäherung als bei der *Simpson*schen Regel unter Benutzung von $2n + 1$ Ordinaten. Da nämlich $2nh$ gleich $b - a$ ist, so wird der Fehler bei dieser Formel nach Gleichung (14.) gleich einem Mittelwert von $f^{(4)}(x)$ multipliziert mit $\frac{(b-a)h^4}{270}$; er verhält sich also zum Fehler bei der *Simpson*schen Regel etwa wie 2 zu 3.

Durch die Einführung der Irrationalität $\sqrt{3}$ wird die Rechnung im allgemeinen *nicht* erschwert. Wenn z. B. $f(x)$ eine *rationale* Funktion von x ist, so wird die Summe

$$f\Big(c - \frac{h}{\sqrt{3}}\Big) + f\Big(c + \frac{h}{\sqrt{3}}\Big)$$

rational. Die Rechnung wird dann sogar noch einfacher als bei Anwendung der *Simpson*schen Regel, wie das folgende Beispiel zeigen möge.

Aufgabe. Es soll wieder

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

berechnet werden unter Anwendung von 12 Ordinaten.

Auflösung. In diesem Falle ist $h = 1 : 12$ und

$$F = \frac{1}{12}\Big[f\Big(\frac{39-\sqrt{3}}{36}\Big) + f\Big(\frac{39+\sqrt{3}}{36}\Big) + f\Big(\frac{45-\sqrt{3}}{36}\Big) + f\Big(\frac{45+\sqrt{3}}{36}\Big) + f\Big(\frac{51-\sqrt{3}}{36}\Big) + f\Big(\frac{51+\sqrt{3}}{36}\Big) + f\Big(\frac{57-\sqrt{3}}{36}\Big) + f\Big(\frac{57+\sqrt{3}}{36}\Big) + f\Big(\frac{63-\sqrt{3}}{36}\Big) + f\Big(\frac{63+\sqrt{3}}{36}\Big) + f\Big(\frac{69-\sqrt{3}}{36}\Big) + f\Big(\frac{69+\sqrt{3}}{36}\Big)\Big],$$

oder da $f(x) = \frac{1}{x}$ ist,

$$(16.)\quad F = 3\Big[\Big(\frac{1}{39-\sqrt{3}} + \frac{1}{39+\sqrt{3}}\Big) + \Big(\frac{1}{45-\sqrt{3}} + \frac{1}{45+\sqrt{3}}\Big) + \Big(\frac{1}{51-\sqrt{3}} + \frac{1}{51+\sqrt{3}}\Big) + \Big(\frac{1}{57-\sqrt{3}} + \frac{1}{57+\sqrt{3}}\Big) + \Big(\frac{1}{63-\sqrt{3}} + \frac{1}{63+\sqrt{3}}\Big) + \Big(\frac{1}{69-\sqrt{3}} + \frac{1}{69+\sqrt{3}}\Big)\Big]$$

$$= \frac{39}{253} + \frac{45}{337} + \frac{51}{433} + \frac{57}{541} + \frac{63}{661} + \frac{69}{793}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 39 : 253 &= 0{,}154\,150\,197\,6 \\ 45 : 337 &= 0{,}133\,531\,157\,3 \\ 51 : 433 &= 0{,}117\,782\,909\,9 \\ 57 : 541 &= 0{,}105\,360\,443\,6 \\ 63 : 661 &= 0{,}095\,310\,136\,2 \\ 69 : 793 &= 0{,}087\,011\,349\,3, \end{aligned}$$

also

$$(17.)\quad \begin{aligned} F &= 0{,}693\,146\,193\,9 \\ &= \ln 2 - 0{,}000\,000\,986\,7. \end{aligned}$$

Der Fehler ist also kleiner als bei Anwendung der *Simpson*schen Regel mit 13 Ordinaten. (Vergl. Aufgabe 1 auf Seite 363 und 364.)

Auch dieses Verfahren läßt sich verallgemeinern, indem man

$$(18.)\quad F_2 \doteq hc_1[f(c-\alpha h)+f(c+\alpha h)]+hc_2[f(c-\beta h)+f(c+\beta h)]$$
$$=2\Big[(c_1+c_2)hf(c)+(c_1\alpha^2+c_2\beta^2)\frac{h^3}{2!}f''(c)$$
$$+(c_1\alpha^4+c_2\beta^4)\frac{h^5}{4!}f^{(4)}(c)+(c_1\alpha^6+c_2\beta^6)\frac{h^7}{6!}f^{(6)}(c)$$
$$+(c_1\alpha^8+c_2\beta^8)\frac{h^9}{8!}f^{(8)}(c)+\cdots\Big]$$

setzt und die 4 Größen c_1, c_2, α, β so bestimmt, daß möglichst viele Glieder dieser Entwickelung mit den entsprechenden Gliedern in der Entwickelung von

$$(19.)\quad \int_{c-2h}^{c+2h} f(x)dx = \int_{c-2h}^{c+2h} F'(x)dx = F(c+2h)-F(c-2h)$$
$$=2\Big[\frac{2h}{1!}f(c)+\frac{8h^3}{3!}f''(c)+\frac{32h^5}{5!}f^{(4)}(c)+\frac{128h^7}{7!}f^{(6)}(c)$$
$$+\frac{512h^9}{9!}f^{(8)}(c)+\cdots\Big]$$

übereinstimmen. Dies gibt die Gleichungen

$$(20.)\quad c_1+c_2=2,$$

$$(21.)\quad c_1\alpha^2+c_2\beta^2=\frac{8}{3},$$

$$(22.)\quad c_1\alpha^4+c_2\beta^4=\frac{32}{5},$$

$$(23.)\quad c_1\alpha^6+c_2\beta^6=\frac{128}{7}.$$

Eliminiert man aus den Gleichungen (20.) und (21.), (21.) und (22.), (22.) und (23.) die Größe c_1, so erhält man

$$(24.)\quad c_2(\alpha^2-\beta^2)=2\Big(\alpha^2-\frac{4}{3}\Big),$$

$$(25.)\quad c_2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)=8\Big(\frac{\alpha^2}{3}-\frac{4}{5}\Big)=2\beta^2\Big(\alpha^2-\frac{4}{3}\Big),$$

$$(26.)\quad c_2\beta^4(\alpha^2-\beta^2)=32\Big(\frac{\alpha^2}{5}-\frac{4}{7}\Big)=8\beta^2\Big(\frac{\alpha^2}{3}-\frac{4}{5}\Big),$$

also

$$(27.)\quad \beta^2 = 4\left(\frac{\alpha^2}{3} - \frac{4}{5}\right):\left(\alpha^2 - \frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{\alpha^2}{5} - \frac{4}{7}\right):\left(\frac{\alpha^2}{3} - \frac{4}{5}\right).$$

Dies gibt

$$\left(\alpha^2 - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{\alpha^2}{5} - \frac{4}{7}\right) = \left(\frac{\alpha^2}{3} - \frac{4}{5}\right)^2,$$

oder

$$(28.)\quad 35\alpha^4 - 120\alpha^2 + 48 = 0,$$

$$(29.)\quad \alpha^2 = \frac{60 \pm \sqrt{1920}}{35} = \frac{12 \pm 1{,}6\sqrt{30}}{7}.$$

Da die Gleichungen (20.) bis (23.) sich nicht ändern, wenn man c_1 mit c_2 und α mit β vertauscht, so genügt β derselben Gleichung (28.) wie α; es sei deshalb

$$(30.)\quad \alpha^2 = \frac{4}{7}(3 - 0{,}4\sqrt{30}), \quad \beta^2 = \frac{4}{7}(3 + 0{,}4\sqrt{30}).$$

Dann folgt aus Gleichung (24.)

$$(31.)\quad c_2 = \frac{2(3\alpha^2 - 4)}{3(\alpha^2 - \beta^2)} = \frac{8(9 - 1{,}2\sqrt{30} - 7)}{-3 \,.\, 3{,}2\sqrt{30}} = 1 - \frac{1}{18}\sqrt{30},$$

$$(32.)\quad c_1 = \frac{2(3\beta^2 - 4)}{3(\beta^2 - \alpha^2)} = 1 + \frac{1}{18}\sqrt{30}.$$

Es ist daher

$$(33.)\quad F_2 = \left(1 + \frac{1}{18}\sqrt{30}\right)h\left[f\left(c - \frac{2\sqrt{3 - 0{,}4\sqrt{30}}}{\sqrt{7}}h\right) + f\left(c + \frac{2\sqrt{3 - 0{,}4\sqrt{30}}}{\sqrt{7}}h\right)\right]$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{18}\sqrt{30}\right)h\left[f\left(c - \frac{2\sqrt{3 + 0{,}4\sqrt{30}}}{\sqrt{7}}h\right) + f\left(c + \frac{2\sqrt{3 + 0{,}4\sqrt{30}}}{\sqrt{7}}h\right)\right].$$

Der Koeffizient von $\frac{h^9}{8!}$ in der Entwickelung von F wird dabei

$$2(c_1\alpha^8 + c_2\beta^8) = 2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^4 \left[\left(1 + \frac{1}{18}\sqrt{30}\right)\left(3 - 0{,}4\sqrt{30}\right)^4 + \left(1 - \frac{1}{18}\sqrt{30}\right)\left(3 + 0{,}4\sqrt{30}\right)^4\right] = \frac{1024 \,.\, 5{,}16}{49}.$$

Deshalb wird

$$(34.) \quad \int\limits_{c-2h}^{c+2h} f(x)dx - F_2 = \left(\frac{1024h^9}{9!} - \frac{1024 \,.\, 5{,}16h^9}{8!\,49}\right) f^{(8)}(c) + \cdots = \frac{20{,}48h^9}{138\,915} f^{(8)}(c) + \cdots.$$

Bezeichnet man

$$\begin{aligned} &f[a + (4m - 2 - \alpha)h] \text{ mit } y_{m,\,1},\\ &f[a + (4m - 2 + \alpha)h] \text{ mit } y_{m,\,2},\\ &f[a + (4m - 2 - \beta)h] \text{ mit } y_{m,\,3},\\ &f[a + (4m - 2 + \beta)h] \text{ mit } y_{m,\,4}, \end{aligned}$$

so erhält man für das gesuchte Integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ den Näherungswert

$$(35.) \quad F = hc_1[(y_{1,\,1} + y_{1,\,2}) + (y_{2,\,1} + y_{2,\,2}) + \cdots + (y_{n,\,1} + y_{n,\,2})] + hc_2[(y_{1,\,3} + y_{1,\,4}) + (y_{2,\,3} + y_{2,\,4}) + \cdots + (y_{n,\,3} + y_{n,\,4})].$$

Da hierbei $4nh = b - a$ ist, so wird, wenn man mit Θ eine Größe zwischen 0 und 1 bezeichnet, der Fehler

$$(36.) \quad \int\limits_a^b f(x)dx - F = \frac{5{,}12(b - a)h^8}{138\,915} f^{(8)}[a + \Theta(b - a)];$$

er wird also mit h zugleich unendlich klein von der *achten* Ordnung.

Die folgende Aufgabe möge zeigen, wie bei den Anwendungen häufig die in α, β, c_1, c_2 enthaltenen Irrationalitäten vermieden werden können, weil in dem Endresultat nur die symmetrischen Funktionen von α^2 und β^2 auftreten. Nach Gleichung (28.) wird aber

$$(37.)\qquad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{120}{35}, \quad \alpha^2\beta^2 = \frac{48}{35}.$$

Aufgabe. Man soll wieder $\ln 2 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ unter Benutzung von 12 Ordinaten berechnen.

Auflösung. Hier ist

$$h = \frac{1}{12}, \quad f(x) = \frac{1}{x},$$

also, wenn man der Kürze wegen $12c$ mit k bezeichnet,

$$f(c - \alpha h) + f(c + \alpha h) = \frac{12}{12c - \alpha} + \frac{12}{12c + \alpha} = \frac{24k}{k^2 - \alpha^2},$$

$$f(c - \beta h) + f(c + \beta h) = \frac{12}{12c - \beta} + \frac{12}{12c + \beta} = \frac{24k}{k^2 - \beta^2}.$$

Deshalb wird mit Rücksicht auf die Gleichungen (31.) und (32.)

$$(38.)\qquad c_1[f(c - \alpha h) + f(c + \alpha h)] + c_2[f(c - \beta h) + f(c + \beta h)]$$

$$= \frac{48k}{3(\alpha^2 - \beta^2)}\left(-\frac{3\beta^2 - 4}{k^2 - \alpha^2} + \frac{3\alpha^2 - 4}{k^2 - \beta^2}\right)$$

$$= \frac{16k[-3(\alpha^4 - \beta^4) + (3k^2 + 4)(\alpha^2 - \beta^2)]}{(\alpha^2 - \beta^2)[k^4 - (\alpha^2 + \beta^2)k^2 + \alpha^2\beta^2]}$$

$$= \frac{16k[-3(\alpha^2 + \beta^2) + 3k^2 + 4]}{k^4 - (\alpha^2 + \beta^2)k^2 + \alpha^2\beta^2} = \frac{16k(105k^2 - 220)}{35k^4 - 120k^2 + 48}.$$

Wenn man in diesem Ausdruck für $k = 12c$ die drei Werte

$$12(1 + 2h) = 14, \quad 12(1 + 6h) = 18, \quad 12(1 + 10h) = 22$$

einsetzt, so erhält man bezw.

$$(39.)\qquad \begin{cases} c_1(y_{1,1} + y_{1,2}) + c_2(y_{1,3} + y_{1,4}) = \dfrac{35\,630}{10\,321}, \\[2ex] c_1(y_{2,1} + y_{2,2}) + c_2(y_{2,3} + y_{2,4}) = \dfrac{25\,350}{9\,467}, \\[2ex] c_1(y_{3,1} + y_{3,2}) + c_2(y_{3,3} + y_{3,4}) = \dfrac{139\,150}{63\,601}. \end{cases}$$

Indem man diese Werte in Gleichung (35.) einsetzt, findet man

$$(40.)\qquad F = \frac{1}{12}\left(\frac{35\,630}{10\,321} + \frac{25\,350}{9\,467} + \frac{139\,150}{63\,601}\right).$$

Nun ist

$$35\,630 : 10\,321 = 3{,}452\,184\,865\,808$$
$$25\,350 : 9\,467 = 2{,}677\,722\,615\,401$$
$$139\,150 : 63\,601 = 2{,}187\,858\,681\,467,$$

folglich wird

$$(41.)\qquad \begin{aligned} F &= 8{,}317\,766\,162\,676 : 12 \\ &= 0{,}693\,147\,180\,223 \\ &= \ln 2 - 0{,}000\,000\,000\,337. \end{aligned}$$

Man erhält also durch dieses Verfahren eine außerordentlich starke Annäherung.

Noch stärker wird die Annäherung, wenn man in den Gleichungen

$$(42.)\qquad \int\limits_{c-3h}^{c+3h} f(x)dx = \int\limits_{c-3h}^{c+3h} F'(x)dx = F(c+3h) - F(c-3h)$$

und

$$(43.)\qquad \begin{aligned} F_3 = hc_1[f(c-\alpha h) + f(c+\alpha h)] + hc_2[f(c-\beta h) \\ + f(c+\beta h)] + hc_3[f(c-\gamma h) + f(c+\gamma h)] \end{aligned}$$

die rechten Seiten nach steigenden Potenzen von h entwickelt und die 6 Größen c_1, c_2, c_3, α, β, γ so bestimmt, daß in beiden Entwickelungen die Koeffizienten von h, h^3, h^5, h^7, h^9, h^{11} miteinander übereinstimmen. Der Fehler wird dann mit h zugleich unendlich klein von der 13ten Ordnung.

In dieser Weise kann man das Verfahren noch beliebig weiter fortsetzen.

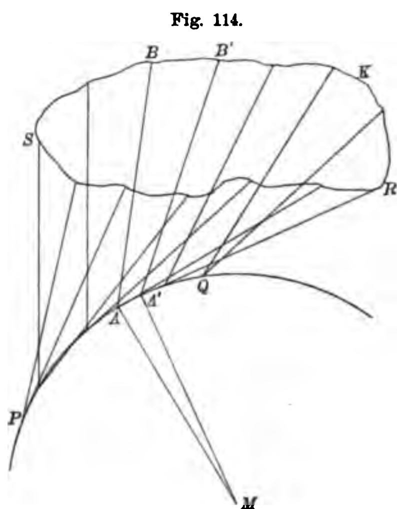
§ 70.
*Amsler*s Polarplanimeter.

Man kann den Flächeninhalt einer allseitig umschlossenen ebenen Figur auch durch rein mechanische Hilfsmittel bestimmen und auf diese Weise die rechnerische Ausführung der Integration vermeiden. Die meiste Anwendung auf diesem Gebiete hat wohl das *Amsler*sche Polarplanimeter gefunden, das es möglich macht, die Größe des Flächeninhaltes der Figur auf einer in gleiche Teile eingeteilten Rolle, „der *Integrierrolle*", abzulesen, nachdem man die Umgrenzung der Figur mit dem sogenannten *Fahrstifte* umfahren hat.

Diese sinnreiche Vorrichtung beruht auf der folgenden Überlegung.

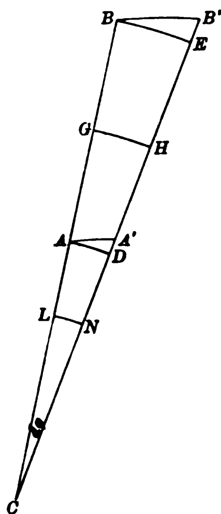
Die Gerade AB von der Länge l bewege sich in einer Ebene so, daß der eine Endpunkt auf dem Kreise mit dem Mittelpunkte M und dem Halbmesser r bleibt (Fig. 114), während der andere Endpunkt B die geschlossene Kurve K mit dem Flächeninhalt F durchläuft. Man könnte statt des Kreises auch eine andere geschlossene Kurve nehmen; der Kreis hat jedoch schon deshalb den Vorzug, weil man die zwangläufige Bewegung des Punktes A auf dem Kreise dadurch erreichen kann, daß man zum Halbmesser MA des Kreises eine Schiene macht, die in M eine feine Spitze und in A eine zur Ebene der Figur senkrecht stehende Achse hat, um die sich eine zweite, der Geraden AB entsprechende Schiene drehen kann. Sticht man die Spitze M in einem passend gewählten Punkte der Ebene, welcher der Pol ge-

Fig. 114.



nnt wird, ein und bewegt den in B befestigten *Fahrstift* f der Kurve K, so tritt die oben beschriebene Bewegung ı. Man betrachte dann ein unendlich kleines Flächen- ment dF gleich $AA'B'B$, das die Gerade AB bei ein- tender Bewegung durchstreicht, und bezeichne den Winkel, ter dem sich die Geraden AB und $A'B'$ im Punkte C ıneiden, mit $d\varphi$. (Vergl. Fig. 115.) Bezeichnet man die tte von AB mit G und beschreibt ı C die Kreisbogen AD, GH und BE, unterscheiden sich die Kreissektoren D und BCE von den Kurvensektoren A' und BCB' bezw. nur um die eiecke ADA' und BEB', die unend- h klein werden von der zweiten Ord- ng und deshalb neben den unendlich einen Größen erster Ordnung ver- chlässigt werden dürfen. Dadurch ıdet man für den Flächeninhalt der gur $AA'B'B$

Fig. 115.



$$) \quad dF = BCB' - ACA' = BCE - ACD$$
$$= \frac{1}{2}(\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2)d\varphi$$
$$= \frac{1}{2}(CB + CA)(CB - CA)d\varphi.$$

Nun ist aber

$$CB + CA = 2CG \quad \text{und} \quad CB - CA = AB = l,$$

lglich wird

$$) \qquad dF = CG \,.\, l \,.\, d\varphi.$$

Dabei ist $CG \,.\, d\varphi$ gleich dem Kreisbogen GH, so daß ın erhält

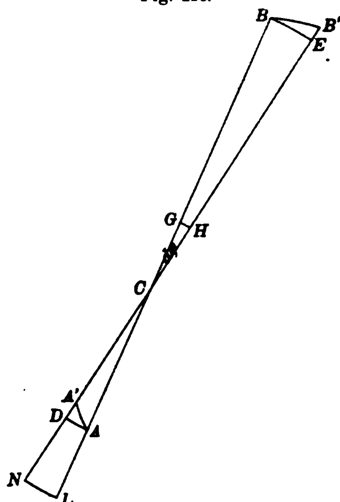
$$) \qquad dF = l \,.\, GH = l \,.\, d\sigma,$$

ınn man den Kreisbogen GH mit $d\sigma$ bezeichnet.

Bisher wurde stillschweigend angenommen, daß der ınkt C, in dem sich die Geraden AB und $A'B'$ schneiden, f der Verlängerung von AB über A hinaus liegt. Die

vorstehenden Schlüsse bleiben aber auch dann noch richtig, wenn das nicht der Fall ist, wenn z. B. C zwischen A und B liegt, wie in Fig. 116. Nur muß man auf das Vorzeichen von dF und $d\sigma$ achten. Man kann z. B. festsetzen, daß alle Flächenstücke, die ein von A nach B sehender Beobachter zur Rechten hat, *positiv* zu nehmen sind, und daß die zu seiner Linken mit *negativem* Vorzeichen zu berücksichtigen sind. Dann wird das in Figur 116 von AB durchstrichene Flächenstück

Fig. 116.



$$dF = BCB' - ACA' = BCE - ACD$$
$$= \frac{1}{2}(\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2)d\varphi = \frac{1}{2}(CB + CA)(CB - CA)d\varphi$$
$$= l\,.\,CG\,.\,d\varphi = l\,.\,d\sigma,$$

wobei der Kreisbogen GH wieder mit $d\sigma$ bezeichnet worden ist.

Ist nun im Punkte G eine kleine Rolle befestigt, deren Achse in der Geraden AB liegt, so wird der Umfang der Rolle, wenn die Gerade AB das Flächenstück $AA'B'B$ durchstreicht, um den Kreisbogen $d\sigma$ fortrollen, denn man kann die eintretende Bewegung zerlegen in eine Drehung um den Punkt C, so daß die Gerade AB in die Lage DE kommt, und in eine Verschiebung der Geraden in ihrer eigenen Richtung von DE nach $A'B'$. Bei dem ersten Teile dieser Bewegung dreht sich die Rolle um den Bogen GH gleich $d\sigma$, bei der zweiten aber kann sich die Rolle nicht drehen, weil die Verschiebung zu ihrer Achse parallel ist. Dabei wird das Vorzeichen von $d\sigma$ mit dem von dF übereinstimmen.

Wenn jetzt der Fahrstift B die ganze geschlossene Kurve K durchläuft, möge zunächst der in Figur 114 dargestellte Fall eintreten, daß der Pol M, d. h. der Mittelpunkt des Kreises, außerhalb der geschlossenen Kurve K liegt und infolge dessen der Punkt A nur einen Teil PQ des Kreisumfanges durchläuft. Er wird dann im allgemeinen jeden Punkt des Kreisbogens PQ *zweimal* passieren, und zwar das eine Mal in der einen, das andere Mal in der entgegengesetzten Richtung. Dann wird die Gerade AB die von der Kurve K eingeschlossene Fläche F nur *einmal* durchstreichen, während die zwischen K und dem Kreisbogen liegende Fläche *zweimal* durchstrichen wird, und zwar das eine Mal im *positiven* und das andere Mal im *negativen* Sinne. Summiert man also alle die kleinen Flächenteile

$$dF = l\,.\,d\sigma,$$

so erhält man

$$F = \int l\,.\,d\sigma = l\int d\sigma, \tag{4.}$$

wobei $\int d\sigma$ dem Bogen gleich ist, der auf der Rolle in G abgerollt ist. Man braucht also nur an der Rolle mit Hilfe eines Nonius den Stand am Anfange und am Schlusse der Bewegung abzulesen; dabei kann durch eine Schraube ohne Ende an der Achse der Rolle noch eine Vorrichtung angebracht werden, welche die ganzen Umdrehungen der Rolle zählt.

Das in Gleichung (4.) ausgesprochene Gesetz bleibt auch noch richtig, wenn die Gerade AB Teile der Fläche F mehr als einmal und Teile der Fläche $PQRS$ mehr als zweimal durchstreicht; denn die Flächenteile von F werden stets nur einmal oder 3, 5, 7, ... mal durchstrichen und zwar einmal mehr im positiven Sinne als im negativen Sinne, und die Teile außerhalb der Fläche F werden entweder garnicht oder 2, 4, 6, ... mal durchstrichen, und zwar ebenso oft im positiven wie im negativen Sinne, so daß Gleichung (4.) auch dann noch richtig bleibt. Dies gibt:

Satz 1. *Liegt der Pol M außerhalb der geschlossenen Kurve K, so ist der Flächeninhalt der Figur F proportional*

zu dem auf dem Umfange der Rolle abgerollten Bogen, dessen Länge man durch die oben angedeuteten Vorrichtungen sehr genau ablesen kann.

Etwas anders verhält sich die Sache, wenn der Punkt A bei eintretender Bewegung der Geraden AB den ganzen Kreis einmal durchläuft, ehe die Gerade AB in ihre Anfangslage zurückkehrt. Das wird geschehen, wenn der Pol M im Innern der geschlossenen Kurve liegt (vergl. Fig. 117 und 118).

Fig. 117.

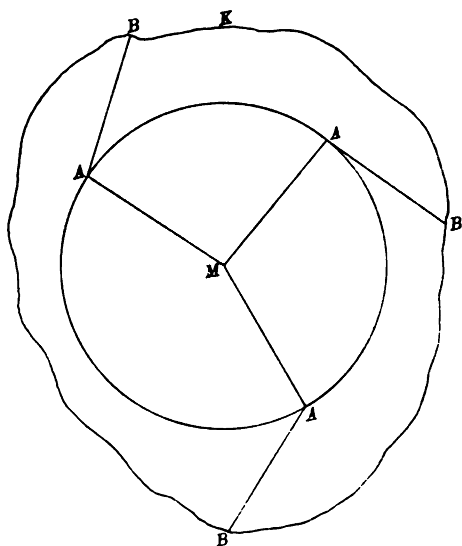
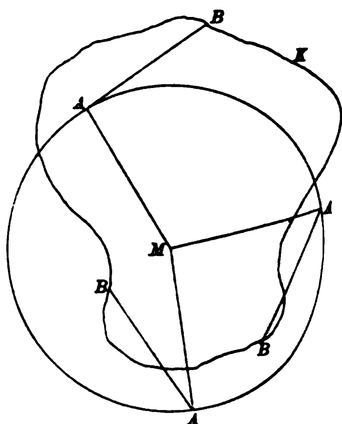


Fig. 118.



Bei Fig. 117 durchstreicht die Gerade AB bis zur Rückkehr in ihre Anfangslage nur die Fläche, welche zwischen der Kurve K und dem Kreise mit dem Halbmesser MA gleich a liegt, so daß der Flächeninhalt der ganzen Figur

$$F = l\int d\sigma + a^2\pi \tag{5.}$$

wird. Diese Formel bleibt aber auch noch für Figur 118 richtig, bei welcher ein Teil der Kurve K innerhalb des Kreises liegt, denn die im Innern des Kreises liegenden

Flächenteile, welche von der Geraden AB (einmal, oder 3, 5, 7 ... mal) durchstrichen werden, ohne daß sie dem Flächeninhalt F angehören, kommen mit negativem Vorzeichen in Rechnung. Dies gibt

Satz 2. *Liegt der Pol M im Innern der geschlossenen Kurve K, so ist der Flächeninhalt der Figur F gleich der Summe von einer konstanten Größe* ($a^2\pi$) *und von einer Größe $l\int d\sigma$, welche zu dem auf dem Umfange der Rolle abgerollten Bogen proportional ist.*

Schließlich ist noch hervorzuheben, daß die beiden gefundenen Sätze noch richtig bleiben, auch wenn die Rolle nicht genau in der Mitte G der Geraden AB, sondern in irgend einem andern Punkte L der Geraden AB angebracht ist. Dabei darf der Punkt L sogar auf der Verlängerung von AB, z. B. über A hinaus liegen. (Vergl. Fig. 115 und 116.) Die Rolle wird dann allerdings bei eintretender Bewegung nicht mehr den Bogen

$$GH = d\sigma,$$

sondern den Bogen

$$LN = d\tau$$

abwickeln. Dabei ist aber

$$LN = d\tau = CL \,.\, d\varphi, \tag{6.}$$

$$\begin{aligned} GH = d\sigma = CG \,.\, d\varphi &= CL \,.\, d\varphi + LG \,.\, d\varphi \\ &= d\tau + LG \,.\, d\varphi, \end{aligned} \tag{7.}$$

und zwar gilt das für Figur 115 *und* 116, wenn man auf die Richtung der Strecken Rücksicht nimmt, d. h. wenn man beachtet, daß

$$CL = -LC$$

ist. Kehrt die Gerade AB in ihre ursprüngliche Lage zurück, so findet man durch Integration aus Gleichung (7.)

$$\int d\sigma = \int d\tau + LG \,.\int d\varphi. \tag{8.}$$

In dem durch Figur 114 dargestellten Falle, wo der Pol M *außerhalb* der Kurve K liegt, ist $\int d\varphi$ gleich Null, so daß

$$\int d\sigma = \int d\tau$$

wird, und Satz 1 ohne weiteres in Kraft bleibt. In dem zweiten Falle aber, wo der Pol *M* ***innerhalb*** der Kurve *K* liegt, macht die Gerade *AB* eine ganze Umdrehung, ehe sie in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt. Es wird also

$$\int d\varphi = 2\pi$$

und Gleichung (8.) geht über in

$$(9.)\qquad \int d\sigma = \int d\tau + LG\,.\,2\pi.$$

Also auch Satz 2 bleibt in Kraft; nur die konstante Größe $a^2\pi$ ist durch die konstante Größe $a^2\pi + l\,.\,LG\,.\,2\pi$ zu ersetzen. Den Proportionalitätsfaktor l und die konstanten Größen $a^2\pi$ bezw. $a^2\pi + l\,.\,LG\,.\,2\pi$ ermittelt man für jedes einzelne Instrument am besten dadurch, daß man mit dem Polarplanimeter zunächst Figuren ausmißt, deren Flächeninhalt bereits bekannt ist.

XIII. Abschnitt.

Kubatur der Körper und Komplanation der krummen Oberflächen. Mehrfache Integrale.

§ 71.

Kubatur der Körper durch Anwendung einfacher Integrale.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 197.)

Es war bereits in Abschnitt VI gezeigt worden, wie man das Volumen eines Rotationskörpers berechnen kann. Es wurde damals der Körper durch Schnitte, senkrecht zur Rotations-Achse in unendlich viele, unendlich dünne Schichten zerlegt, die man unter Vernachlässigung unendlich kleiner Größen höherer Ordnung als Kreiszylinder betrachten darf. Ist z. B. die den Körper begrenzende Fläche durch Rotation der Kurve

(1.) $$y = f(x)$$

um die X-Achse entstanden, so ist die Grundfläche eines solchen Zylinders ein Kreis mit dem Halbmesser y und dem Flächeninhalte $y^2\pi$. Da der Zylinder die Höhe dx hat, so wird das Volumen einer solchen unendlich dünnen Schicht

(2.) $$dV = y^2\pi dx,$$

also das Volumen des ganzen Rotationskörpers

(3.) $$V = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx,$$

wie bereits in Formel Nr. 136 der Tabelle angegeben ist.

Ein ähnliches Verfahren kann man auch für die Berechnung des Volumens bei anderen Körpern anwenden.

Man teilt dieselben durch Schnitte, welche zur X-Achse senkrecht stehen, in unendlich viele, unendlich dünne Schichten und summiert die Volumina dieser einzelnen Schichten.

Zur Berechnung des Volumens der einzelnen Schichten muß zunächst der Flächeninhalt der einzelnen Schnitte als stetige Funktion von x bekannt sein, wobei $x = OQ$ der Abstand des betreffenden Schnittes von der YZ-Ebene ist (Fig. 119). Es sei also $F(x)$ der Flächeninhalt eines solchen Schnittes, welcher in $F(x + \varDelta x)$ übergeht, wenn x um $\varDelta x = QQ_1$ wächst, d. h. wenn der Schnitt durch den Punkt Q_1 der X-Achse gelegt wird.

Fig. 119

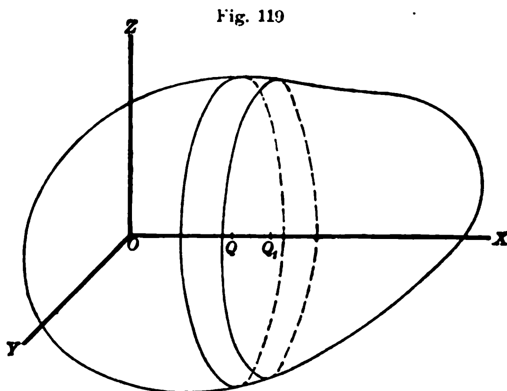
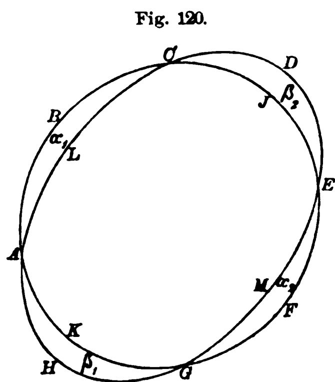


Fig. 120.



Legt man durch die Umgrenzungen der beiden Schnitte $F(x)$ und $F(x + \varDelta x)$ Parallele zur X-Achse, so werden die beiden Umgrenzungskurven der Schnitte in die YZ-Ebene projiziert. In Figur 120 sei z. B. die Kurve $ABCJEFGK$ die Projektion von $F(x)$, und die Kurve $ALCDEMGH$ die Projektion von $F(x + \varDelta x)$. Die beiden Figuren haben das Stück $ALCJEMGK$ gemeinschaftlich; dieses Stück muß man um

(4.) $\alpha_1 = ALCB$ und $\alpha_2 = GFEM$

vermehren, damit man $F(x)$ erhält, während man

(4a.) $\beta_1 = AHGK$ und $\beta_2 = CJED$

hinzufügen muß, damit man $F(x + \varDelta x)$ erhält.

Denselben Schluß wird man auch allgemein ausführen können. Die Projektionen der beiden Schnitte werden ein Flächenstück

$$F(x) - \alpha = F(x + \Delta x) - \beta \tag{5.}$$

gemeinschaftlich haben, wenn man mit α und β die Summe der kleinen Flächenstücke bezeichnet, welche das gemeinsame Stück bezw. zu $F(x)$ und $F(x + \Delta x)$ ergänzen. In Figur 120 ist z. B.

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{und} \quad \beta = \beta_1 + \beta_2.$$

Dabei sind α und β kleine Größen, welche mit Δx zugleich verschwindend klein werden, weil $F(x)$ als eine stetige Funktion von x vorausgesetzt worden ist.

Bezeichnet man das Volumen der dünnen Schicht mit ΔV, so wird ΔV *im allgemeinen größer* sein als ein Zylinder, welcher $F(x) - \alpha = F(x + \Delta x) - \beta$ zur Grundfläche und Δx zur Höhe hat. Dagegen wird ΔV *im allgemeinen kleiner* sein als ein Zylinder, welcher $F(x) + \beta = F(x + \Delta x) + \alpha$ zur Grundfläche und Δx zur Höhe hat, d. h. es wird im allgemeinen

$$[F(x) - \alpha]\Delta x \leqq \Delta V \leqq [F(x) + \beta]\Delta x \tag{6.}$$

sein. Dies gibt

$$F(x) - \alpha \leqq \frac{\Delta V}{\Delta x} \leqq F(x) + \beta, \tag{7.}$$

oder, wenn man Δx verschwindend klein werden läßt,

$$F(x) \leqq \frac{dV}{dx} \leqq F(x), \tag{8.}$$

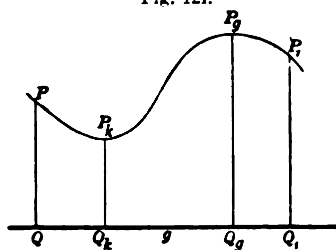
also

$$\frac{dV}{dx} = F(x), \quad V = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx. \tag{9.}$$

Wie bereits hervorgehoben wurde, gelten die Schlüsse *nur im allgemeinen.* Die krumme Fläche, welche die betrachtete Schicht begrenzt, kann möglicher Weise zwischen den beiden Schnitten $F(x)$ und $F(x + \Delta x)$ solche Einbiegungen oder Ausbiegungen haben, daß der Zylinder mit der Grundfläche $F(x) - \alpha$ und der Höhe Δx nicht ganz *innerhalb* der Schicht ΔV liegt, oder daß der Zylinder mit

der Grundfläche $F(x) + \beta$ und der Höhe Δx die Schicht ΔV nicht vollständig *einschließt.* In diesem Falle lege man durch eine Gerade g, welche zur X-Achse parallel ist und die Schicht durchbohrt, eine beliebige Ebene QQ_1P_1P (Fig. 121). Diese Ebene sei auf der einen Seite durch die Gerade g begrenzt und schneide die Figuren $F(x)$ und $F(x + \Delta x)$ bezw. in den Geraden QP und Q_1P_1. Die begrenzende Fläche schneide sie in dem Kurvenbogen PP_1, welcher in den Punkten P_k und P_g bezw. den kleinsten und den größten Abstand von der Geraden g haben möge. Dreht sich nun die Ebene QQ_1P_1P um die Gerade g, so beschreiben die Punkte P_k und P_g auf der begrenzenden krummen Fläche zwei Kurven, deren Projektionen in die YZ-Ebene jetzt mit $F(x) - \alpha$ und $F(x) + \beta$ bezeichnet werden mögen. Dann wird wieder

Fig. 121.



$$[F(x) - \alpha]\Delta x \leqq \Delta V \leqq [F(x) + \beta]\Delta x,$$

$$F(x) - \alpha \leqq \frac{\Delta V}{\Delta x} \leqq F(x) + \beta,$$

also, weil für verschwindend kleine Werte von Δx die Punkte P_k und P_g mit P zusammenfallen, so daß α und verschwindend klein werden,

$$F(x) \leqq \frac{dV}{dx} \leqq F(x);$$

dies gibt wieder

$$\frac{dV}{dx} = F(x), \qquad V = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx.$$

In dieser strengeren Herleitung ist der zuerst behandelte, am häufigsten vorkommende Fall eingeschlossen.

Die Berechnung des Volumens der Körper nennt man „*Kubatur der Körper*“.

§ 72.

Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher von dem *elliptischen Paraboloid* mit der Gleichung

(1.) $$y^2 + a^2z^2 = 2px$$

und von der Ebene mit der Gleichung $x = c$ eingeschlossen ist (Fig. 122).

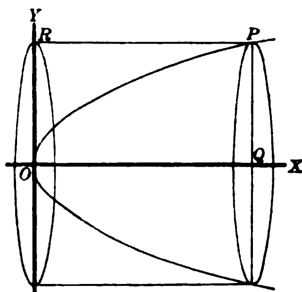


Fig. 122.

Auflösung. Jeder Schnitt senkrecht zur X-Achse schneidet aus der Fläche eine Ellipse mit der Gleichung

(2.) $$\frac{y^2}{2px} + \frac{a^2z^2}{2px} = 1$$

und mit den Halbachsen

$$a_1 = \sqrt{2px}, \quad b_1 = \frac{1}{a}\sqrt{2px}$$

aus. Der Flächeninhalt dieser Ellipse ist bekanntlich

(3.) $$F(x) = a_1b_1\pi = \frac{2px}{a}\pi,$$

folglich findet man für das Volumen des Körpers

(4.) $$V = \int_0^c F(x)dx = \frac{2p\pi}{a}\int_0^c xdx = \frac{p\pi}{a}\left[x^2\right]_0^c = \frac{c^2p\pi}{a}.$$

Aufgabe 2. Man soll das Volumen des dreiachsigen Ellipsoids

(5.) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

berechnen.

Auflösung. Auch hier ist jeder Schnitt, senkrecht zur X-Achse, eine Ellipse mit der Gleichung

(6.) $$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{a^2y^2}{b^2(a^2-x^2)} + \frac{a^2z^2}{c^2(a^2 - x^2)} = 1$$

und mit den Halbachsen

(7.) $$a_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad b_1 = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

folglich ist der Flächeninhalt dieser Ellipse

(8.) $$F(x) = a_1 b_1 \pi = \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2)\pi.$$

Das Volumen des Ellipsoids wird daher

(9.) $$V = \int_{-a}^{+a} F(x)dx = \frac{bc\pi}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)dx$$

$$= \frac{bc\pi}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a} = \frac{bc\pi}{a^2}\left(\frac{2a^3}{3} + \frac{2a^3}{3}\right) = \frac{4abc\pi}{3}.$$

Aufgabe 3. Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher von der Fläche 4ten Grades

(10.) $$a^2 y^2 + x^2 z^2 = b^2 x^2$$

und den beiden Ebenen

(11.) $$x = 0 \quad \text{und} \quad x = a$$

eingeschlossen wird. Die durch Gleichung (10.) dargestellte Fläche heißt: „*Conocuneus* von *Wallis*“.

Auflösung. Die Schnitte, senkrecht zur X-Achse, sind wieder Ellipsen mit der Gleichung

(12.) $$\frac{a^2 y^2}{b^2 x^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

und mit den Halbachsen

(13.) $$a_1 = \frac{bx}{a}, \quad b_1 = b,$$

folglich wird der Flächeninhalt eines solchen Schnittes

(14.) $$F(x) = a_1 b_1 \pi = \frac{b^2 x\pi}{a}.$$

Das Volumen des oben beschriebenen Körpers wird daher

(15.) $$V = \int_0^a F(x)dx = \frac{b^2\pi}{a}\int_0^a x dx = \frac{b^2\pi}{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{ab^2\pi}{2}.$$

Gleichzeitig gewinnt man aus dieser Untersuchung Auskunft über die Gestalt der Fläche.

Aus Gleichung (10.) ergibt sich zunächst, daß die Koordinaten-Ebenen Symmetrie-Ebenen der Fläche sind, und aus Gleichung (12.) erkennt man, daß die Schnitte, senkrecht zur X-Achse, Ellipsen sind, welche alle dieselbe Halbachse $b_1 = b$ haben, während die andere Halbachse $a_1 = \frac{bx}{a}$ mit x proportional zunimmt. Die XY-Ebene (mit der Gleichung $z = 0$) schneidet die Fläche in zwei geraden Linien mit den Gleichungen

$$ay = \pm bx, \tag{16.}$$

und die ZX-Ebene (mit der Gleichung $y = 0$) schneidet die Fläche in der Doppel-Geraden

$$x = 0, \tag{17.}$$

welche mit der Z-Achse zusammenfällt, und in den beiden Geraden

$$z = +b, \quad z = -b. \tag{18.}$$

§ 73.

Einführung mehrfacher Integrale.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 198).

In den soeben behandelten Aufgaben war

$$V = \int F(x)dx,$$

wobei der Flächeninhalt der ebenen Figur $F(x)$ nach den Ausführungen in Abschnitt V selbst wieder durch Integration ermittelt wird, und zwar war in allen drei Aufgaben

$$F(x) = a_1 b_1 \pi \tag{1.}$$

der Flächeninhalt einer Ellipse

$$b_1^2 y^2 + a_1^2 z^2 = a_1^2 b_1^2, \quad \text{oder} \quad z = \pm \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - y^2}. \tag{2.}$$

Nach Formel Nr. 133 der Tabelle findet man daher $F(x)$ aus der Gleichung

$$(3.)\quad F(x) = \int_{-a_1}^{+a_1}(z' - z'')dy = \frac{2b_1}{a_1}\int_{-a_1}^{+a_1}dy\sqrt{a_1^2 - y^2}$$

$$= \frac{2b_1}{a_1}\left[\frac{y}{2}\sqrt{a_1^2 - y^2} + \frac{a_1^2}{2}\arcsin\left(\frac{y}{a_1}\right)\right]_{-a_1}^{+a_1} = a_1 b_1 \pi.$$

Dabei war in den Aufgaben 1, 2 und 3 bezw.

$$(4.)\quad \begin{cases} a_1 = \sqrt{2px}, & b_1 = \frac{1}{a}\sqrt{2px}; \\ a_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, & b_1 = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}; \\ a_1 = \frac{bx}{a}, & b_1 = b. \end{cases}$$

Daraus erkennt man auch, daß in der Gleichung (3.) die Integrationsgrenzen $-a_1$ und $+a_1$ noch Funktionen von x sind.

In ähnlicher Weise wird auch die Aufgabe, das Volumen eines Körpers zu berechnen, *ganz allgemein* zu behandeln sein. Den Schnitt, welcher senkrecht auf der X-Achse steht, und dessen Flächeninhalt mit $F(x)$ bezeichnet worden ist, erhält man, indem man in den Gleichungen der den Körper oben und unten begrenzenden Flächen

$$(5.)\quad z' = g(x, y) \quad \text{und} \quad z'' = h(x, y)$$

die Größe x als *Konstante* betrachtet. Setzt man

$$(6.)\quad z' - z'' = g(x, y) - h(x, y) = f(x, y),$$

so ist der Flächeninhalt dieses Schnittes

$$(7.)\quad F(x) = \int_{y_1}^{y_2}(z' - z'')dy = \int_{y_1}^{y_2}f(x, y)dy,$$

wobei im allgemeinen, je nach den Bedingungen der Aufgabe,

$$(8.)\quad y_1 = \varphi(x), \quad y_2 = \psi(x)$$

noch Funktionen von x sein werden. Da nun nach Formel Nr. 197 der Tabelle das Volumen des Körpers

(9.) $$V = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

ist, so erhält man mit Rücksicht auf Gleichung (7.)

(10.) $$V = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} (z' - z'')dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy.$$

Besondere Aufmerksamkeit ist dabei auf die richtige Bestimmung der Grenzen $y_1 = \varphi(x)$ und $y_2 = \psi(x)$ zu verwenden. Den Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (10.) nennt man „*ein Doppelintegral*“.

Am besten wird man das angedeutete Verfahren durch die Behandlung einiger Aufgaben verstehen.

Aufgabe 1. Die Gleichung

(11.) $$p(z - z_0) = xy$$

stellt ein *gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid* dar; man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher oben von dieser Fläche, unten von der XY-Ebene, vorn und rückwärts von den Ebenen $y = c$ und $y = d$, links und rechts von den Ebenen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. Dabei ist z_0 so groß gewählt, daß das durch die angegebenen Grenzen eingeschlossene Stück der Fläche oberhalb der XY-Ebene liegt.

Auflösung. In diesem Falle ist

(12.) $$z' = z_0 + \frac{xy}{p}, \quad z'' = 0;$$

die Grenzen der Integrations-Veränderlichen y sind konstant, denn es ist

(13.) $$y_1 = c, \quad y_2 = d.$$

Man erhält daher

$$(14.)\quad V = \int_a^b dx \int_c^d (z' - z'')dy = \frac{1}{p}\int_a^b dx \int_c^d (pz_0 + xy)dy$$

$$= \frac{1}{p}\int_a^b dx \left[pz_0 y + \frac{xy^2}{2}\right]_c^d$$

$$= \frac{1}{2p}\int_a^b dx [2pz_0(d-c) + (d^2 - c^2)x]$$

$$= \frac{d-c}{2p}\left[2pz_0 x + (d+c)\frac{x^2}{2}\right]_a^b,$$

also

$$(15.)\quad V = \frac{(b-a)(d-c)}{4p}[4pz_0 + (a+b)(c+d)].$$

Aufgabe 2. Die Gleichung

$$(16.)\quad 2p(z - z_0) = y^2 - m^2x^2$$

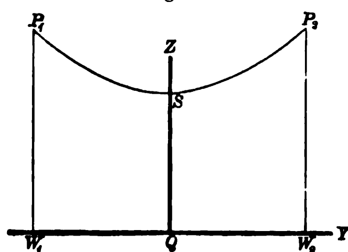
stellt ein *hyperbolisches Paraboloid* dar; man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher oben durch diese Fläche, unten durch die XY-Ebene und seitlich durch den *Zylinder*

$$(17.)\quad x^2 + y^2 = a^2$$

begrenzt wird. Dabei sei z_0 wieder so groß gewählt, daß das von dem Zylinder eingeschlossene Stück des Paraboloids oberhalb der XY-Ebene liegt.

Auflösung. Eine Ebene, welche man durch den Punkt Q der X-Achse parallel zur YZ-Ebene legt, schneidet aus dem Körper eine Figur $F(x)$ aus, welche oben durch die Parabel

Fig. 128.



$$(18.)\quad z' = \frac{1}{2p}(2pz_0 + y^2 - m^2x^2),$$

unten durch die Gerade

$$(19.)\quad z'' = 0$$

und seitlich durch zwei Gerade

P_1 und W_2P_2 begrenzt wird, in denen der Zylinder von ser Ebene geschnitten wird (Fig. 123). Dies gibt

$$) \quad V = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} z dy = \frac{1}{2p} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} (2pz_0 + y^2 - m^2x^2) dy$$

$$= \frac{1}{2p} \int_{x_1}^{x_2} dx \left[2pz_0 y + \frac{y^3}{3} - m^2x^2y\right]_{y_1}^{y_2}.$$

In diesem Falle sind aber y_1 und y_2 Funktionen von denn der Schnitt, welchen man durch den Punkt Q der Achse parallel zur YZ-ene legt, schneidet den benzenden Zylinder in zwei aden, welche auf der -Ebene in den Punkten und W_2 senkrecht stehen g. 124). Deshalb wird

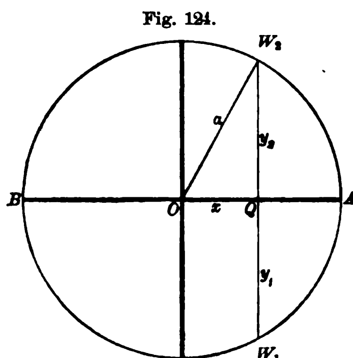


Fig. 124.

$$) \left\{ \begin{array}{l} y_2 = + \sqrt{a^2 - x^2}, \\ y_1 = - \sqrt{a^2 - x^2} \end{array} \right.$$

l

$$) \quad V = \frac{1}{2p} \int_{x_1}^{x_2} 2dx \sqrt{a^2 - x^2} \left[2pz_0 - m^2x^2 + \tfrac{1}{3}(a^2 - x^2)\right]$$

$$= \frac{6pz_0 + a^2}{3p} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{3m^2 + 1}{3p} \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Nun ist nach den Formeln Nr. 122, 120 und 123 der elle

$$) \int x^2 dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x^3}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{4} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \frac{1}{8} \left[x(2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + a^4 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right],$$

$$) \quad \int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Dabei muß der Punkt Q den ganzen Kreisdurchmesser BA durchlaufen, d. h. x_1 ist gleich $-a$ und x_2 gleich $+a$. Dies gibt

$$(23a.)\qquad \int_{-a}^{+a} x^2 dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^4}{4} \operatorname{arc\,sin} 1 = \frac{a^4\pi}{8},$$

$$(24a.)\qquad \int_{-a}^{+a} dx \sqrt{a^2 - x^2} = a^2 \operatorname{arc\,sin} 1 = \frac{a^2\pi}{2},$$

also

$$(25.)\qquad V = \frac{(6pz_0 + a^2)a^2\pi}{6p} - \frac{(3m^2 + 1)a^4\pi}{24p}$$

$$= \frac{a^2\pi}{8p}[8pz_0 + (1 - m^2)a^2].$$

Aufgabe 3. Die Gleichung

$$(26.)\qquad 2pz = y^2 - m^2x^2$$

stellt wieder ein *hyperbolisches Paraboloid* dar, welches die XY-Ebene in den beiden Geraden AC und BD mit den Gleichungen

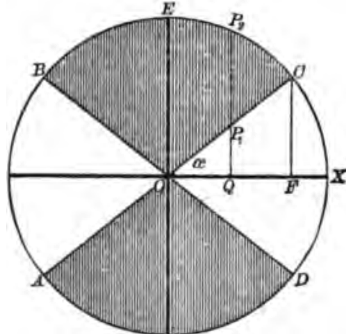
$$(27.)\qquad y = +mx \quad \text{und} \quad y = -mx$$

schneidet (Fig. 125); man soll das Volumen des Körpers berechnen, der oben von der Fläche, unten von der XY-Ebene und seitlich von dem Zylinder

$$(28.)\qquad x^2 + y^2 = a^2$$

begrenzt wird.

Fig. 125.



Auflösung. Wenn die Konstante p positiv ist, so liegt nur derjenige Teil der Fläche *über* der XY-Ebene, für welchen $y^2 > m^2x^2$ ist; das Körperstück, welches berechnet werden soll, liegt also ausschließlich über dem schraffierten Teile der Figur. Da die XZ-Ebene und die YZ-Ebene Symmetrie-Ebenen sind, so genügt es, das Volumen des

Körpers zu berechnen, welcher über dem Kreissektor COE liegt, wenn man das gefundene Resultat noch mit 4 multipliziert. Es wird also

$$V = 4\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} z dy = \frac{2}{p}\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} (y^2 - m^2x^2) dy, \tag{29.}$$

wobei

$$y_1 = QP_1 = mx, \quad y_2 = QP_2 = \sqrt{a^2 - x^2}, \tag{30.}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = OF = a\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+m^2}} \tag{31.}$$

ist, wenn man den Winkel XOC mit α bezeichnet. Es ist nämlich x_2 die Abszisse des Punktes C, für den die beiden Gleichungen

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{und} \quad y = mx$$

gemeinschaftlich gelten, für den also

$$a^2 - x^2 = m^2x^2, \quad \text{oder} \quad x^2(1 + m^2) = a^2$$

wird. Deshalb findet man aus Gleichung (29.)

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{p}\int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{y^3}{3} - m^2x^2y\right]_{mx}^{\sqrt{a^2-x^2}} \\ &= \frac{2}{3p}\int_{x_1}^{x_2} dx\left[\sqrt{a^2-x^2}(a^2 - x^2 - 3m^2x^2) + 2m^3x^3\right] \\ &= \frac{2}{3p}\left[a^2\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{a^2-x^2} - (1+3m^2)\int_{x_1}^{x_2} x^2dx\sqrt{a^2-x^2}\right. \\ &\qquad \left. + 2m^3\int_{x_1}^{x_2} x^3dx\right]. \end{aligned} \tag{32.}$$

Nun ist nach Gleichung (24.) und (31.)

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{a^2-x^2} &= \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^{a\cos\alpha} \\ &= \frac{a^2}{2}[\sin\alpha\cos\alpha + \arcsin(\cos\alpha)] \\ &= \frac{a^2}{2}\left[\frac{m}{1+m^2} + \frac{\pi}{2} - \alpha\right]; \end{aligned} \tag{33.}$$

nach Gleichung (23.) ist ferner

$$(34.)\quad \int\limits_{x_1}^{x_2} x^2 dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{8}\left[x(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+a^4\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^{a\cos\alpha}$$

$$= \frac{a^4}{8}[\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)+\arcsin(\cos\alpha)]$$

$$= \frac{a^4}{8}\left[\frac{m(1-m^2)}{(1+m^2)^2}+\frac{\pi}{2}-\alpha\right];$$

und endlich ist

$$(35.)\quad \int\limits_{x_1}^{x_2} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{a\cos\alpha} = \frac{a^4}{4}\cos^4\alpha = \frac{a^4}{4(1+m^2)^2},$$

folglich wird nach Gleichung (32.)

$$V = \frac{2a^4}{3p}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m}{1+m^2}+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\frac{1+3m^2}{8}\left(\frac{m(1-m^2)}{(1+m^2)^2}+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right.$$
$$\left.+\frac{m^3}{2(1+m^2)^2}\right],$$

oder

$$(36.)\quad V = \frac{a^4}{8p}[2m+(1-m^2)(\pi-2\alpha)].$$

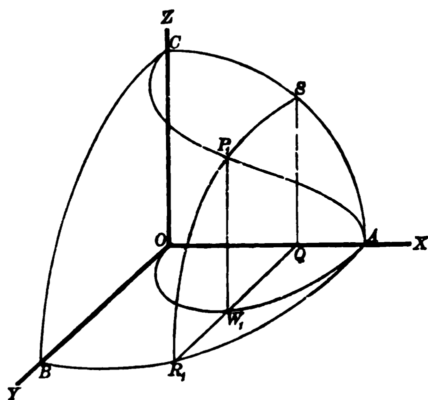


Fig. 126.

Aufgabe 4. Aus einer Kugel mit der Gleichung

$$(37.)\quad x^2+y^2+z^2-a^2=0$$

bohren die beiden Kreiszylinder mit den Gleichungen

$$(38.)\quad x^2+y^2-ax=0$$

und

$$x^2+y^2+ax=0$$

Öffnungen heraus; wie groß ist das Volumen des übrig gebliebenen Teiles der Kugel (Fig. 126 und 127).

Auflösung. Die XY-Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise mit dem Halbmesser a und die beiden Kreiszylinder in Kreisen mit den Halbmessern $\frac{a}{2}$ (Fig. 126 und

127). Legt man durch den Punkt Q der X-Achse einen Schnitt senkrecht zur X-Achse, so schneidet derselbe aus der Kugel einen Kreis mit dem Halbmesser

(39.) $$QR_1 = \sqrt{a^2 - x^2}$$

und aus dem einen Zylinder die beiden Geraden $P_1'P_1$ und $P_2'P_2$ (Fig. 128), deren Abstand

$$QW_1 = \sqrt{ax - x^2}$$

vom Mittelpunkt Q des Kreises sich aus der Gleichung

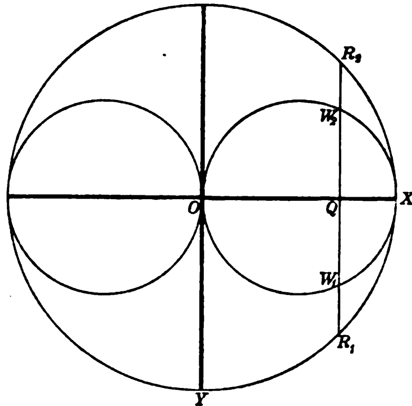
(40.) $x^2 + y^2 - ax = 0$,

oder

(40a.) $y = \sqrt{ax - x^2}$

ergibt. Der Durchschnitt des Zylinders über OW_1A mit der Kugelfläche ist in Figur 126 durch die Kurve CP_1A dargestellt. Da der Kreis um Q auf der Kugelfläche liegt, so genügen die Koordinaten der Punkte P_1 und P_1' der Gleichung (37.), die man auf die Form

Fig. 127.

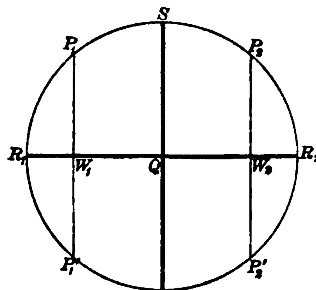


$OQ = x, \quad QR_1 = \sqrt{a^2 - x^2},$
$QW_1 = \sqrt{ax - x^2}.$

(41.) $$\begin{cases} z' = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ z'' = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

bringen kann. Man erhält daher für den Flächeninhalt des Schnittes $F(x)$, welcher aus den beiden Kreissegmenten $P_2R_2P_2'$ und $P_1R_1P_1'$ besteht,

Fig. 128.



(42.) $$F(x) = 2\int_{y_1}^{y_2}(z' - z'')dy$$

$$= 4\int_{y_1}^{y_2} dy \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

wobei

(43.) $y_1 = QW_1 = \sqrt{ax - x^2}, \quad y_2 = QR_1 = \sqrt{a^2 - x^2} = c$

ist. Nun wird nach Formel Nr. 123 der Tabelle

(44.) $$\int dy\sqrt{c^2 - y^2} = \frac{y}{2}\sqrt{c^2 - y^2} + \frac{c^2}{2}\arcsin\left(\frac{y}{c}\right),$$

folglich ist, wenn man $c^2 = a^2 - x^2$ setzt,

(45.) $$F(x) = 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{a^2 - x^2}{2}\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)\right]_{y_1}^{y_2},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (43.)

$$F(x) = 2(a^2 - x^2)\left(\arcsin 1 - \arcsin\sqrt{\frac{ax - x^2}{a^2 - x^2}}\right)$$
$$- 2\sqrt{ax - x^2}\sqrt{a^2 - ax},$$

also

(46.) $$F(x) = 2(a^2 - x^2)\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{x}{a + x}}\right) - 2(a - x)\sqrt{ax}.$$

Setzt man in Formel Nr. 98 der Tabelle, nämlich in

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

(47.) $$u = \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{x}{a + x}}, \quad dv = (a^2 - x^2)dx,$$

also

(48.) $$du = -\frac{adx}{2(a + x)\sqrt{ax}}, \quad v = a^2x - \frac{x^3}{3},$$

so wird

(49.) $$\int_0^a (a^2 - x^2)\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{x}{a + x}}\right)dx$$
$$= \left[\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{x}{a + x}}\right)\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_0^a + \frac{1}{6}\int_0^a \frac{a(3a^2x - x^3)}{(a + x)\sqrt{ax}}d$$
$$= \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\frac{2a^3}{3} + \frac{1}{6}\int_0^a \frac{(3a^2 - x^2)\sqrt{ax}}{a + x}dx.$$

Setzt man noch

(50.) $$x = at^2, \quad \text{also} \quad dx = 2at\,dt, \quad \sqrt{ax} = at,$$

so wird

$$(51.)\quad \int_0^a \frac{(3a^2-x^2)\sqrt{ax}}{a+x}dx = \int_0^1 \frac{a^2(3-t^4)at}{a(1+t^2)}\cdot 2atdt = 2a^3\int_0^1 \frac{-t^6+3t^2}{t^2+1}dt$$

$$= 2a^3\int_0^1\left(-t^4+t^2+2-\frac{2}{1+t^2}\right)dt$$

$$= 2a^3\left[-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}+2t-2\operatorname{arctg}t\right]_0^1 = 2a^3\left(\frac{32}{15}-\frac{\pi}{2}\right),$$

also, da $\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}}$ gleich $\frac{\pi}{4}$ ist,

$$(52.)\quad \int_0^a (a^2-x^2)\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right)dx$$

$$= \frac{2a^3}{3}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{a^3}{3}\left(\frac{32}{15}-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{32a^3}{45}.$$

Außerdem ist mit Rücksicht auf die Gleichungen (50.)

$$(53.)\quad \int_0^a (a-x)\sqrt{ax}\,.\,dx = a^3\int_0^1(1-t^2)t\,.\,2tdt = 2a^3\int_0^1(t^2-t^4)dt$$

$$= 2a^3\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = 2a^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{4a^3}{15}.$$

Deshalb wird

$$(54.)\quad V = 2\int_0^a F(x)dx$$

$$= 4\int_0^a (a^2-x^2)\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right)dx - 4\int_0^a (a-x)\sqrt{ax}\,dx$$

$$= \frac{128a^3}{45}-\frac{16a^3}{15} = \frac{16a^3}{9}.$$

Man hätte auch das Volumen V_1 der beiden Zylinder berechnen können, soweit sie in der Kugel liegen. Zieht man dann das gefundene Resultat von dem Volumen der

ganzen Kugel, nämlich von $\frac{4a^3\pi}{3}$, ab, so ist die Aufgabe gelöst. Nach Figur 126, 127 und 128 wird bei dieser Behandlung

$$(55.)\qquad F_1(x) = 4\int_0^{y_1} dy\sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

wobei wieder

$$(56.)\qquad y_1 = QW_1 = \sqrt{ax - x^2}$$

ist. Dies gibt nach Formel Nr. 123 der Tabelle

$$(57.)\quad F_1(x) = 2\left[y\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + (a^2 - x^2)\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)\right]_0^{y_1}$$

$$= 2(a - x)\sqrt{ax} + 2(a^2 - x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a + x}},$$

folglich findet man

$$(58.)\quad V_1 = 2\int_0^a F_1(x)dx = 4\int_0^a (a - x)\sqrt{ax}\,.\,dx$$

$$+ 4\int_0^a (a^2 - x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a + x}}\,dx.$$

Nach Gleichung (53.) ist

$$(59.)\qquad \int_0^a (a - x)\sqrt{ax}\,.\,dx = \frac{4a^3}{15}.$$

Setzt man hier

$$u = \arcsin\sqrt{\frac{x}{a + x}},\quad dv = (a^2 - x^2)dx,$$

also

$$du = \frac{adx}{2(a + x)\sqrt{ax}},\quad v = a^2x - \frac{x^3}{3},$$

so ergibt sich durch partielle Integration

$$(60.)\quad \int_0^a (a^2 - x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx = \left[\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right]_0^a$$

$$- \frac{1}{6}\int_0^a \frac{(3a^2 - x^2)\sqrt{ax}}{a + x}\,dx.$$

Nun ist nach Gleichung (51.)

$$\int_0^a \frac{(3a^2 - x^2)\sqrt{ax}}{a+x}dx = 2a^3\left(\frac{32}{15} - \frac{\pi}{2}\right),$$

folglich wird

$$(61.)\quad \int_0^a (a^2 - x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx = \frac{2a^3}{3}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{a^3}{3}\left(\frac{32}{15} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{a^3\pi}{3} - \frac{32a^3}{45},$$

also

$$(62.)\quad V_1 = \frac{16a^3}{15} + \frac{4a^3\pi}{3} - \frac{128a^3}{45} = \frac{4a^3\pi}{3} - \frac{16a^3}{9}.$$

Deshalb findet man wieder

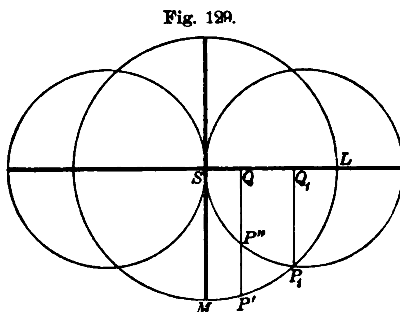
$$(63.)\quad V = \frac{4a^3\pi}{3} - V_1 = \frac{16a^3}{9}.$$

Mit demselben Rechte, mit welchem man bisher die Schnitte senkrecht zur X-Achse legte, darf man natürlich auch zunächst Schnitte senkrecht zur Y-Achse oder senkrecht zur Z-Achse legen. Wenn man z. B. in der letzten Aufgabe den Körper, dessen Volumen berechnet werden soll, durch Schnitte, senkrecht zur Z-Achse, in Schichten zerlegt, so stellt Figur 129 einen solchen Schnitt dar, wobei $OS = z$ der Abstand dieses Schnittes von der XY-Ebene ist. Die Kugel wird in einem Kreise mit dem Halbmesser

$$(64.)\quad SL = \sqrt{a^2 - z^2},$$

und die beiden Zylinder werden in Kreisen mit dem Halbmesser $\frac{a}{2}$ geschnitten.

Fig. 129.



Da die Achsen SL und SM die Figur in 4 symmetrische Teile zerlegen, so ist der Flächeninhalt dieses Schnittes

(65.) $$F(z) = 4SP_1M = 4\int_0^{x_1}(y' - y'')dx,$$

wobei P' ein Punkt der Kugel und P'' ein Punkt de Zylinders ist, so daß

(66.) $$y' = \sqrt{a^2 - z^2 - x^2}, \quad y'' = \sqrt{ax - x^2}$$

wird, folglich erhält man

(67.) $$F(z) = 4\int_0^{x_1}(\sqrt{a^2 - z^2 - x^2} - \sqrt{ax - x^2})dx.$$

Im Punkte P_1 werden y' und y'' einander gleich; m findet daher den Wert von x_1, indem man

(68.) $$y' = y'', \quad \text{oder} \quad a^2 - z^2 - x^2 = ax - x^2$$

setzt; dies gibt

(69.) $$x_1 = \frac{a^2 - z^2}{a}.$$

Nun wird nach Formel Nr. 123 der Tabelle

(70.) $$\int_0^{x_1}\sqrt{a^2 - z^2 - x^2}\,.\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - z^2 - x^2} + \frac{a^2 - z^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - z^2}}\right)\right]$$

oder, wenn man

(71.) $$z = a\cos\varphi,$$

also

(72.) $$a^2 - z^2 = a^2\sin^2\varphi, \quad x_1 = \frac{a^2 - z^2}{a} = a\sin^2\varphi$$

setzt,

(73.) $$\int_0^{x_1}\sqrt{a^2 - z^2 - x^2}dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2\sin^2\varphi - x^2}\right.$$

$$\left. + \frac{a^2\sin^2\varphi}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a\sin\varphi}\right)\right]_0^{a\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^2\varphi(\sin\varphi\cos\varphi + \varphi).$$

Ferner ist, wenn man

(74.) $$x = a\sin^2 t,$$

also

(75.) $a - x = a\cos^2 t,\quad \sqrt{ax - x^2} = a\sin t\cos t,\quad dx = 2a\sin t\cos t\,dt$
setzt,

$$(76.)\quad \int_0^{x_1} dx\sqrt{ax - x^2} = 2a^2\int_0^{\varphi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = 2a^2\int_0^{\varphi}(\cos^2 t - \cos^4 t)dt$$

$$= 2a^2\left[-\frac{1}{4}\cos^3 t\sin t + \frac{1}{8}\cos t\sin t + \frac{1}{8}t\right]_0^{\varphi}$$

$$= \frac{a^2}{4}[\sin\varphi\cos\varphi(1 - 2\cos^2\varphi) + \varphi].$$

Aus den Gleichungen (67.), (73.) und (76.) folgt daher

$$(77.)\quad F(z) = 4\int_0^{x_1} dx\sqrt{a^2 - z^2 - x^2} - 4\int_0^{x_1} dx\sqrt{ax - x^2}$$

$$= 2a^2\sin^2\varphi(\sin\varphi\cos\varphi + \varphi) - a^2[\sin\varphi\cos\varphi(1 - 2\cos^2\varphi) + \varphi]$$

$$= a^2[\sin\varphi\cos\varphi + \varphi(2\sin^2\varphi - 1)].$$

Dies gibt nach Gleichung (71.)

$$(78.)\quad V = 2\int_0^a F(z)dz = 2a^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin^2\varphi\cos\varphi - 2\varphi\sin^3\varphi + \varphi\sin\varphi)d\varphi$$

$$= 2a^3\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\sin\varphi - 2\sin^3\varphi)\,d\varphi\right].$$

Dabei ist

$$(79.)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{1}{3}\left[\sin^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3};$$

sodann findet man durch partielle Integration

$$\int\varphi(\sin\varphi - 2\sin^3\varphi)d\varphi = \int\varphi(2\cos^2\varphi - 1)\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= \varphi\left(\cos\varphi - \frac{2}{3}\cos^3\varphi\right) - \int\left(\cos\varphi - \frac{2}{3}\cos^3\varphi\right)d\varphi$$

$$= \varphi\left(\cos\varphi - \frac{2}{3}\cos^3\varphi\right) - \int\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sin^2\varphi\right)\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= \varphi\left(\cos\varphi - \frac{2}{3}\cos^3\varphi\right) - \frac{1}{3}\sin\varphi - \frac{2}{9}\sin^3\varphi,$$

also

(80.) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin\varphi - 2\sin^3\varphi)d\varphi = -\frac{5}{9}.$$

Deshalb wird nach den Gleichungen (78.) und (79.) wieder

(81.) $$V = 2a^3\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{9}\right) = \frac{16a^3}{9}.$$

§ 74.
Theorie der mehrfachen Integrale.
(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 199.)

Wie aus dem vorhergehenden Paragraphen zu ersehen ist, wird man durch die Kubatur der Körper auf *Doppelintegrale* geführt, und zwar in folgender Weise. Es war

(1.) $$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy,$$

wobei

(2.) $$f(x, y) = z' - z'' = g(x, y) - h(x, y)$$

und

(3.) $$z' = g(x, y), \quad z'' = h(x, y)$$

die Gleichungen der beiden, den Körper oben und unten begrenzenden Flächen sind. Bei dem in Gleichung (1.) aufgestellten Integrale ist y die *Integrations-Veränderliche*, während x als *Konstante* betrachtet werden muß. Deshalb dürfen auch die Grenzen

(4.) $$y_1 = \varphi(x), \quad y_2 = \psi(x)$$

dieses Integrals noch Funktionen von x sein, wobei die Gleichungen (4.) auf der XY-Ebene senkrecht stehende Zylinder darstellen, welche den Körper vorn und rückwärts begrenzen. Das Volumen des Körpers wird dann

(5.) $$V = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy.$$

Dabei kann der Fall eintreten, daß der Körper, dessen Volumen berechnet werden soll, allseitig von krummen Flächen begrenzt wird, die weder Zylinderflächen noch Ebenen sind. Man denke z. B. an das Volumen des dreiachsigen Ellipsoids. Die vorstehende Untersuchung bleibt aber auch dann noch richtig; es schrumpfen aber die Zylinder

$$y_1 = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y_2 = \psi(x)$$

zu Kurven und die begrenzenden ebenen Figuren in den Ebenen

$$x = a \quad \text{und} \quad x = b$$

zu Punkten zusammen.

Aus dem Vorstehenden folgt gleichzeitig, daß auch umgekehrt ein solches Doppelintegral stets als das Volumen eines Körpers betrachtet werden kann, der oben von der Fläche

$$(6.) \qquad z = f(x, y),$$

unten von der XY-Ebene, vorn und rückwärts durch die Zylinder

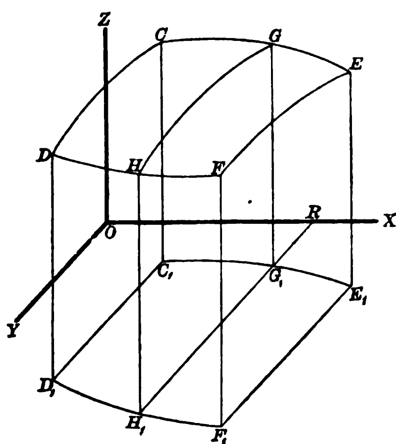
$$(7.) \quad y_1 = \varphi(x), \quad y_2 = \psi(x),$$

links und rechts von den Ebenen

$$(8.) \quad x_1 = a, \quad x_2 = b$$

begrenzt wird. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus Figur 130; dabei entspricht der Gleichung (6.) die Fläche $CDFE$, den Gleichungen (7.) entsprechen die Zylinder CC_1E_1E und DD_1F_1F, und den Gleichungen (8.) entsprechen die Ebenen CC_1D_1D und EE_1F_1F.

Fig. 130.



Für einen konstanten Wert von x, z. B. für $x = OR$ erhält man eine Ebene, senkrecht zur X-Achse, welche aus dem Körper die ebene Figur

$$(9.)\qquad GG_1H_1H = F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy$$

ausschneidet.

Aus dieser geometrischen Deutung des Doppelintegrals folgt auch, daß es als eine Summe von *zweifach* unendlich vielen, unendlich kleinen Größen aufgefaßt werden kann. Der betrachtete Körper wird nämlich durch die Schnitte, senkrecht zur X-Achse, in unendlich viele, unendlich dünne Schichten zerlegt, und jede solche Schicht wird wieder durch Schnitte, senkrecht zur Y-Achse, in unendlich viele, unendlich dünne Säulchen (Fig. 131) zerlegt, deren Höhe

Fig. 131.

$$(10.)\qquad QP = z = f(x, y),$$

und deren Grundfläche ein unendlich kleines Rechteck $QQ_1Q_3Q_2$ mit den Seiten dx, dy und dem Flächeninhalte $dxdy$ ist.

Da bei der Integration in bezug auf y die Größen x und dx konstant bleiben, so kann man natürlich die Gleichung (5.) auch in der Form

$$(11.)\qquad V = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dxdy$$

schreiben, wobei

$$(12.)\qquad f(x, y)dxdy = zdxdy$$

das Volumen eines solchen unendlich dünnen Säulchens $QQ_1Q_3Q_2PP_1P_3P_2$ ist.

Auch die Reihenfolge der Integrationen darf man ändern, denn man kann die unendlich dünnen Säulchen, welche zu demselben Werte von y gehören, durch Summation zu einer unendlich dünnen Schicht vereinigen, welche zur XZ-Ebene parallel ist, und dann durch Summation aller dieser Schichten

den ganzen Körper erhalten. Zu beachten ist aber, daß hierbei im allgemeinen auch eine *Änderung der Integrationsgrenzen* stattfindet.

Nur in dem Falle, wo die Integrationsgrenzen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ von x unabhängig sind, werden die Zylinder

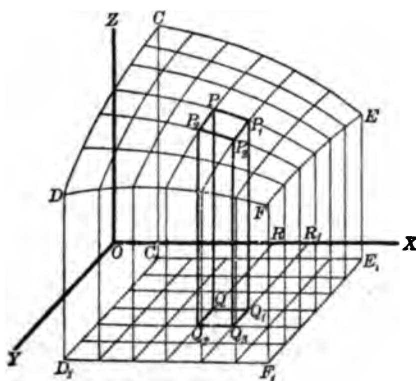
$$y = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = \psi(x) \tag{13.}$$

in Ebenen

$$y = c \quad \text{und} \quad y = d \tag{14.}$$

übergehen (Fig. 132). Dann folgt aus der geometrischen Deutung des Doppelintegrals ohne weiteres

Fig. 132.



$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx, \tag{15.}$$

denn in diesem Falle ist der Körper begrenzt von der krummen Fläche $z = f(x, y)$, von der XY-Ebene und den 4 Ebenen

C_1CDD_1, E_1EFF_1,
C_1CEE_1, D_1DFF_1

mit den Gleichungen

$$x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d. \tag{16.}$$

Dies gibt den Satz:

Sind die Grenzen eines Doppelintegrals in bezug auf x und y konstante Größen, so wird der Wert des Doppelintegrals nicht geändert, wenn man die Reihenfolge der Integrationen in bezug auf die beiden Veränderlichen x und y umkehrt und die Integrationsgrenzen unverändert läßt.

Jetzt ergibt sich von selbst, was man unter einem *dreifachen Integrale*

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} f(x, y, z) dz$$

zu verstehen hat. In ähnlicher Weise kann man auch ein *n-faches Integral* erklären und als eine Summe von n-fach unendlich vielen, unendlich kleinen Größen deuten.

Es ist möglich, das Volumen eines Körpers auch als ein dreifaches Integral darzustellen, denn es ist

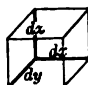
$$z' - z'' = \int_{z''}^{z'} dz = \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} dz,$$

also

$$(17.)\qquad V = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} dz = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} dx\,dy\,dz.$$

Hierbei ist $dx\,dy\,dz$ ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepipedon (Fig. 133), welches das *Volumenelement* genannt wird. Die angegebenen Integrationsgrenzen deuten darauf hin, daß man zuerst in bezug auf z, dann in bezug auf y und zuletzt in bezug auf x integrieren soll. Man darf aber auch die Reihenfolge der Integrationen ändern, nur muß man dabei beachten, daß sich dann im allgemeinen auch die Integrationsgrenzen ändern. Wenn man z. B. zuerst in bezug auf x integriert, so sind die Grenzen x_1 und x_2 im allgemeinen noch Funktionen von y und z, welche durch die Gleichungen der begrenzenden Flächen bestimmt sind.

Fig. 133.



§ 75.

Einführung von neuen Integrations-Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 200 bis 202.)

Wie man bei den einfachen Integralen durch Substitution eine neue Integrations-Veränderliche zur leichtern Ermittelung des gesuchten Integrals einführte, so kann man auch bei den n-fachen Integralen durch Substitution n neue Veränderliche einführen und dadurch möglicherweise die Berechnung des mehrfachen Integrals wesentlich erleichtern. Bei einem Doppelintegrale

$$V = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dx dy \tag{1.}$$

setze man z. B.

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v) \tag{2.}$$

und mache u und v zu *Integrations-Veränderlichen.* Während aber bei der Darstellung von V durch Gleichung (1.) konstante Werte von x Schnitte, senkrecht zur X-Achse, lieferten, erhält man für $u = c$ aus den Gleichungen (2.) die Gleichungen

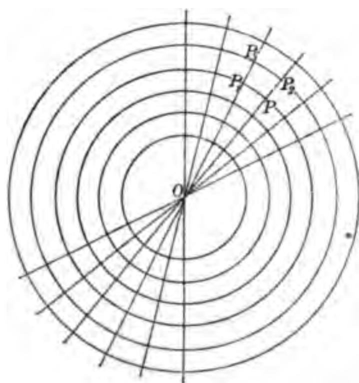
$$x = f_1(c, v), \quad y = f_2(c, v), \tag{3.}$$

welche für jeden Wert von c einer Kurve in der XY-Ebene oder einer Zylinderfläche im Raume entsprechen. Ebenso erhält man für konstante Werte von v aus den Gleichungen (2.) wieder Zylinderflächen, welche auf der XY-Ebene senkrecht stehen. Setzt man z. B.

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{4.}$$

indem man die beiden neuen Integrations-Veränderlichen mit r und φ bezeichnet, so erhält man für konstante Werte von r konzentrische Kreise (Fig. 134), bezw. koaxiale Kreiszylinder, und für konstante Werte von φ gerade Linien durch den Nullpunkt, bezw. Ebenen durch die Z-Achse.

Fig. 134.

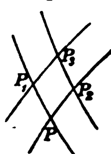


So lange x und y die Integrations-Veränderlichen waren, mußte man sich den Körper in zweifach unendlich viele, unendlich dünne Säulchen zerlegt denken, deren Höhe $z = f(x, y)$, und deren Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten dx, dy und dem Flächeninhalte $dxdy$ ist. Jetzt wird der Körper auch in zweifach unendlich viele, unendlich dünne Säulchen mit der Höhe

$$(5.)\qquad z = f(x, y) = f[f_1(u, v),\ f_2(u, v)]$$

zerlegt, aber die Grundflächen $PP_1P_3P_2$ (Fig. 135) sind nicht mehr Rechtecke mit dem Flächeninhalte $dxdy$, sondern kleine Vierecke mit den Ecken P, P_1, P_3, P_2. Die Koordinaten dieser Punkte entsprechen nach den vorhergehenden Ausführungen bezw. den Werten (u, v), $(u + du, v)$, $(u + du, v + dv)$, $(u, v + dv)$, d. h. es wird

Fig. 135.



$$(6.)\qquad x_1 = x + \frac{\partial x}{\partial u}du, \qquad y_1 = y + \frac{\partial y}{\partial u}du,$$

$$(7.)\qquad x_2 = x + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \qquad y_2 = y + \frac{\partial y}{\partial v}dv,$$

$$(8.)\qquad x_3 = x + \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \qquad y_3 = y + \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Nun ist der Flächeninhalt des Vierecks $PP_1P_3P_2$, da man die Seiten als gerade Linien betrachten kann,

$$(9.)\qquad G = \tfrac{1}{2}[x(y_1 - y_2) + x_1(y_3 - y) + x_3(y_2 - y_1) + x_2(y - y_3)]$$
$$= \tfrac{1}{2}[(x_3 - x)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y)],$$

oder

$$(9a.)\qquad 2G = \begin{vmatrix} x_3 - x, & x_2 - x_1 \\ y_3 - y, & y_2 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Dies gibt mit Rücksicht auf die Gleichungen (6.) bis (8.)

$$2G = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, & \frac{\partial x}{\partial v}dv - \frac{\partial x}{\partial u}du \\ \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv, & \frac{\partial y}{\partial v}dv - \frac{\partial y}{\partial u}du \end{vmatrix},$$

oder, wenn man die Elemente der zweiten Kolonne von denen der ersten Kolonne subtrahiert,

$$(10.)\qquad 2G = 2du \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v}dv - \frac{\partial x}{\partial u}du \\ \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v}dv - \frac{\partial y}{\partial u}du \end{vmatrix} = 2dudv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

also

$$(10\text{a.})\qquad G = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv\,*).$$

Vertauscht man in dieser Gleichung u mit v, so ändert sich das Vorzeichen von G. Da nun bei dieser Darstellung die Veränderlichen u und v gleich berechtigt sind, so ist

$$(10\text{b.})\qquad G = \pm\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv,$$

und zwar ist das Vorzeichen immer so zu wählen, daß G positiv wird. Auch müssen die Grenzen von

u und v

so gewählt werden, daß der Ausdruck $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$ innerhalb dieser Grenzen das Vorzeichen nicht wechselt.

Deshalb ist das Volumen eines solchen Säulchens

$$(11.)\qquad \pm f(x, y)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv,$$

und das Volumen des ganzen Körpers

$$(12.)\qquad V = \pm\int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{g(u)}^{h(u)} f(x, y)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv,$$

wobei man für x und y noch die in Gleichung (2.) angegebenen Werte einsetzen und die Integrationsgrenzen passend bestimmen muß.

Den Ausdruck

$$(13.)\qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

nennt man „*die Funktionaldeterminante*".

Aus den Gleichungen (1.) und (12.) folgt ganz allgemein für die Doppelintegrale die Formel

$$(14.)\qquad \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dx\,dy = \pm\int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{g(u)}^{h(u)} f(x, y)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv.$$

---

*) Die Rechnung ist auch sehr leicht ohne Anwendung der Determinanten auszuführen, indem man in Gleichung (9.) die Werte von $x_3 - x$, $y_2 - y_1$, $x_2 - x_1$, $y_3 - y$ einsetzt.

Für den Fall, daß man durch die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \tag{15.}$$

ebene Polarkoordinaten einführt, wird z. B.

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi, \tag{16.}$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = +r\cos\varphi; \tag{17.}$$

die Funktionaldeterminante ist daher

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r, \tag{18.}$$

folglich geht, da r immer positiv ist, Gleichung (14.) über in

$$\int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(r\cos\varphi, \quad r\sin\varphi) . rd\varphi dr. \tag{19.}$$

Hier ist vorausgesetzt, daß man zuerst in bezug auf r und dann in bezug auf φ integriert; man kann aber auch zuerst in bezug auf φ und dann in bezug auf r integrieren, nur muß man dann die Grenzen anders bestimmen.

Das in Gleichung (19.) enthaltene Resultat findet man noch leichter, wenn man beachtet, daß die Grundflächen $PP_1P_3P_2$ in diesem Falle kleine Rechtecke mit den Seiten $rd\varphi$ und dr sind (Fig. 134).

Wie nützlich die Einführung von neuen Integrations-Veränderlichen mitunter bei der Ermittelung von Doppelintegralen ist, kann man z. B. aus den in § 73 behandelten Aufgaben ersehen. So war in Aufgabe 2

$$V = \frac{1}{2p}\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}(2pz_0 + y^2 - m^2x^2)dx\,dy. \tag{20.}$$

Führt man in diesem Falle für die rechtwinkligen Koordinaten x und y ebene Polarkoordinaten durch die Gleichungen (15.) ein, so erhält man nach Gleichung (19.)

(21.) $$V = \frac{1}{2p}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a [2pz_0 + r^2(\sin^2\varphi - m^2\cos^2\varphi)]rdr$$

$$= \frac{1}{2p}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \Big[pz_0 r^2 + \frac{r^4}{4}(\sin^2\varphi - m^2\cos^2\varphi)\Big]_0^a$$

$$= \frac{a^2}{8p}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi [4pz_0 + a^2(\sin^2\varphi - m^2\cos^2\varphi)],$$

und dies gibt nach Formel Nr. 99 und 100 der Tabelle in Übereinstimmung mit dem früher gefundenen Resultate

(22.) $$V = \frac{a^2}{8p}\Big[4pz_0\varphi - \frac{1+m^2}{2}a^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1-m^2}{2}a^2\varphi\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{a^2\pi}{8p}[8pz_0 + (1-m^2)a^2].$$

In Aufgabe 3 (vergl. Fig. 125) sollte

(23.) $$V = \frac{2}{p}\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}(y^2 - m^2x^2)dxdy$$

berechnet werden, wobei

$$m = \operatorname{tg}\alpha, \quad y_1 = mx, \quad y_2 = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = a\cos\alpha$$

war. Durch Einführung von Polarkoordinaten wird nach Gleichung (19.)

(24.) $$V = \frac{2}{p}\int\limits_\alpha^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a r^2(\sin^2\varphi - m^2\cos^2\varphi)rdr$$

$$= \frac{a^4}{2p}\int\limits_\alpha^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\varphi - m^2\cos^2\varphi)d\varphi,$$

also nach Formel Nr. 99 und 100 der Tabelle

(25.) $$V = \frac{a^4}{4p}[-(1+m^2)\sin\varphi\cos\varphi + (1-m^2)\varphi]_\alpha^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a^4}{4p}\Big[(1-m^2)\frac{\pi}{2} + (1+m^2)\sin\alpha\cos\alpha - (1-m^2)\alpha\Big],$$

oder, da $1 + m^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ ist,

(26.) $$V = \frac{a^4}{8p}[2m + (1 - m^2)(\pi - 2\alpha)].$$

Bei Aufgabe 4 war nach den Gleichungen (42.), (43.) und (54.) in § 73

(27.) $$V = 8\int_0^a \int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \,.\, dxdy.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten wird nach Gleichung (19.)

(28.) $$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{a} rdr\sqrt{a^2 - r^2},$$

also nach Formel Nr. 124 der Tabelle

(29.) $$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \Big[-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)\sqrt{a^2 - r^2}\Big]_{a\cos\varphi}^{a}$$

$$= \frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi = -\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos^2\varphi)d(\cos\varphi).$$

Dies gibt wieder

(30.) $$V = -\frac{8a^3}{3}\Big[\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16a^3}{9}.$$

Mitunter wird man sogar bei Anwendung derartiger Substitutionen *einfache* Integrale dadurch ermitteln, daß man sie auf *Doppelintegrale* zurückführt. Es sei z. B.

(31.) $$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

zu berechnen; dann ist auch, wenn man x mit y vertauscht,

(32.) $$J = \int_0^\infty e^{-y^2} dy.$$

Indem man die Gleichungen (31.) und (32.) miteinander multipliziert, erhält man

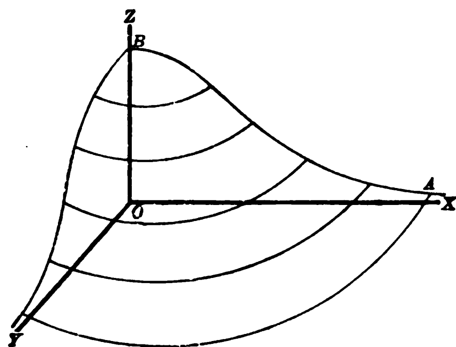
(33.) $$J^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Dieses Integral stellt das Volumen eines Körpers dar, welcher oben durch die Rotationsfläche

(34.) $$z = e^{-(x^2+y^2)},$$

unten durch die XY-Ebene und seitlich durch die XZ-Ebene und durch die YZ-Ebene begrenzt wird (Fig. 136).

Fig. 136.



Durch Einführung von Polarkoordinaten findet man daher nach Gleichung (19.)

(35.) $$J^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r \, d\varphi dr.$$

Dies gibt, indem man

(36.) $$r^2 = -t, \quad \text{also} \quad 2rdr = -dt$$

setzt,

(37.) $$J^2 = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{-\infty} e^t dt = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[e^t\right]_0^{-\infty} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{4},$$

folglich wird

(38.) $$J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Dieses Integral spielt eine wichtige Rolle in der höheren Vermessungskunde.

§ 76.
Komplanation der Flächen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 203.)

Wie man sich den Bogen einer Kurve zusammengesetzt denken kann aus unendlich vielen, unendlich kleinen Sehnen ds, d. h. wie man den Bogen einer Kurve als ein *Polygon* mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten betrachten kann, so kann man sich eine gekrümmte Fläche

(1.) $$F(x, y, z) = 0, \quad \text{oder} \quad z = f(x, y)$$

aus zweifach unendlich vielen, unendlich kleinen ebenen Stücken zusammengesetzt denken, man kann also die gekrümmte Fläche als ein *Polyeder* mit zweifach unendlich vielen, unendlich kleinen Seitenflächen betrachten.

Verbindet man nämlich einen beliebigen Punkt P der Fläche mit allen unendlich nahen Punkten durch gerade Linien, so sind diese geraden Linien Tangenten der Fläche im Punkte P und liegen im allgemeinen sämtlich in einer Ebene, welche die Tangentialebene der Fläche im Punkte P genannt wird und die Gleichung

(2.) $$F_1(x' - x) + F_2(y' - y) + F_3(z' - z) = 0,$$

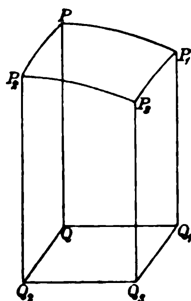
oder

(2a.) $$z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y)$$

hat. (Vergl. D.-R., Formel Nr. 242 der Tabelle.)

Legt man also wieder unendlich viele Schnitte, senkrecht zur X-Achse und senkrecht zur Y-Achse, so zerteilen diese die Fläche in unendlich viele, unendlich kleine Vierecke $PP_1P_3P_2$, deren Eckpunkte sämtlich in der Tangentialebene des Punktes P liegen (Fig. 137). Man kann also das Viereck $PP_1P_3P_2$ als *eben* betrachten und findet den Flächeninhalt dO desselben aus der Gleichung

Fig. 137.



(3.) $$PP_1P_3P_2 \,.\, \cos\gamma = dO \,.\, \cos\gamma = QQ_1Q_3Q_2 = dxdy,$$

wobei $QQ_1Q_3Q_2$ die Projektion von

$PP_1P_3P_2$ auf die XY-Ebene und γ der Winkel ist, welchen lie Tangentialebene des Punktes P mit der XY-Ebene ildet*).

*) Der hierbei angewendete Satz ergibt sich unmittelbar aus 'igur 138.

Wird nämlich das beliebige Viereck $PP_1P_3P_2$ in der Ebene ε auf ie Ebene ε_1 projiziert, so liegen die Lote QP, Q_1P_1, Q_3P_3, Q_2P_2, relche man bezw. von den Punkten P, P_1, P_3, P_2 auf die Ebene ε_1 ällt, in den Ebenen PSQ, $P_1S_1Q_1$, $P_3S_3Q_3$, $P_2S_2Q_2$, welche durch die ckpunkte des Vierecks $PP_1P_3P_2$ hindurchgehen und auf der Schnittinie AB der Ebenen ε und ε_1 senkrecht stehen. Die Winkel PSQ, $P_1S_1Q_1$, $P_3S_3Q_3$, $P_2S_2Q_2$ sind alle dem Neigungswinkel γ gleich, so daß

$$4.)\quad \begin{cases} SQ = SP \,.\, \cos\gamma \\ S_1Q_1 = S_1P_1 \,.\, \cos\gamma, \\ S_3Q_3 = S_3P_3 \,.\, \cos\gamma, \\ S_2Q_2 = S_2P_2 \,.\, \cos\gamma \end{cases}$$

st. Da nun das Paalleltrapez

$SQQ_1S_1 = \frac{1}{2}(SQ + S_1Q_1) \,.\, SS_1$,

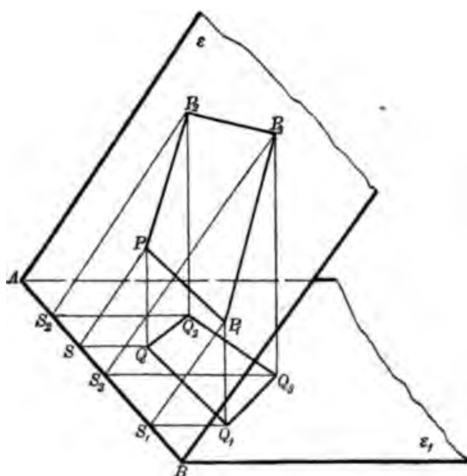
ınd das Paralleltrapez

$SPP_1S_1 = \frac{1}{2}(SP + S_1P_1) \,.\, SS_1$,

o folgt mit Rücksicht uf die Gleichungen (4.), aß

$$5.)\quad SQQ_1S_1 = SPP_1S_1 \,.\, \cos\gamma.$$

Fig. 138.



Ebenso findet man

$$6.)\quad S_1Q_1Q_3S_3 = S_1P_1P_3S_3 \,.\, \cos\gamma,$$

$$7.)\quad S_3Q_3Q_2S_2 = S_3P_3P_2S_2 \,.\, \cos\gamma,$$

$$8.)\quad S_2Q_2QS \;\; = S_2P_2PS \;\; .\, \cos\gamma.$$

Dies gibt

$$9.)\quad \begin{aligned} QQ_1Q_3Q_2 &= S_1Q_1Q_3S_3 + S_3Q_3Q_2S_2 - S_2Q_2QS - SQQ_1S_1 \\ &= (S_1P_1P_3S_3 + S_3P_3P_2S_2 - S_2P_2PS - SPP_1S_1)\cos\gamma \\ &= PP_1P_3P_2 \,.\, \cos\gamma. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise kann man zeigen, daß die Projektion F_1 ines beliebigen Polygons F in der Ebene ε auf eine andere Ebene ε_1 leich $F \,.\, \cos\gamma$ wird, wenn γ der Neigungswinkel zwischen den beiden benen ist. Da man eine krummlinig begrenzte Figur als ein Polygon nit unendlich vielen Seiten betrachten kann, so gilt die Formel

$$10.)\quad F_1 = F \,.\, \cos\gamma$$

uch für jede beliebige ebene Figur F und deren Projektion F_1.

Dabei ist nach Gleichung (2.) und (2a.) in diesem Falle

$$(11.)\quad \cos\gamma = \frac{F_3}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

folglich wird

$$(12.)\quad dO = \frac{dxdy}{\cos\gamma} = \frac{dxdy}{F_3}\sqrt{F_1^2+F_2^2+F_3^2},$$

oder

$$(12a.)\quad dO = dxdy\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Die Integration dieses Ausdruckes in bezug auf y bedeutet, daß man alle diese unendlich kleinen Vierecke summiert, welche zu demselben Werte von x gehören. Die erste Integration gibt also einen unendlich dünnen Flächenstreifen.

Integriert man dann noch in bezug auf x, so erhält man die ganze Oberfläche

$$(13.)\quad O = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{dy}{F_3}\sqrt{F_1^2+F_2^2+F_3^2} = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Die Berechnung des Inhalts krummer Oberflächen nennt man: „*Komplanation der Flächen*“.

§ 77.

Übungs-Beispiele.

Aufgabe 1. Die Gleichung

$$(1.)\quad pz = xy$$

stellt ein *gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid* dar; man soll den Inhalt der Oberfläche zwischen den Ebenen

$$(2.)\quad x = 0 \quad\text{und}\quad x = a, \quad y = 0 \quad\text{und}\quad y = b$$

berechnen.

Auflösung. Das hyperbolische Paraboloid wird von den begrenzenden Ebenen in geraden Linien geschnitten, so daß die gesuchte Fläche die Seiten eines räumlichen Vierecks miteinander verbindet. Aus Gleichung (1.) folgt dabei

$$(3.)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{p},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{p},$$

$$(4.)\qquad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{p}\sqrt{p^2 + x^2 + y^2};$$

deshalb wird

$$(5.)\qquad O = \frac{1}{p}\int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy \sqrt{p^2 + x^2 + y^2}.$$

Dies gibt nach Formel Nr. 129 der Tabelle

$$(6.)\ O = \frac{1}{2p}\int\limits_0^a dx\left[y\sqrt{p^2+x^2+y^2} + (p^2+x^2)\ln\left(\frac{y+\sqrt{p^2+x^2+y^2}}{\sqrt{p^2+x^2}}\right)\right]_0^b$$

$$= \frac{1}{2p}\int\limits_0^a dx\left[b\sqrt{p^2+b^2+x^2} + (p^2+x^2)\ln\left(\frac{b+\sqrt{p^2+b^2+x^2}}{\sqrt{p^2+x^2}}\right)\right].$$

Setzt man

$$(7.)\qquad u = \ln\left(\frac{b + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + x^2}}\right),\quad dv = (p^2 + x^2)dx,$$

so wird

$$(8.)\qquad v = p^2x + \frac{x^3}{3} = \frac{x}{3}(3p^2 + x^2),$$

$$(9.)\qquad du = \frac{xdx}{(b + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2})\sqrt{p^2 + b^2 + x^2}} - \frac{xdx}{p^2 + x^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{p^2 + b^2 + x^2} - b)xdx}{(p^2 + x^2)\sqrt{p^2 + b^2 + x^2}} - \frac{xdx}{p^2 + x^2}$$

$$= -\frac{bxdx}{(p^2 + x^2)\sqrt{p^2 + b^2 + x^2}},$$

folglich erhält man nach der Formel

$$\int udv = uv - \int vdu$$

durch partielle Integration

$$(10.)\ \int (p^2 + x^2)\ln\left(\frac{b + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + x^2}}\right)dx$$

$$= \frac{x}{3}(3p^2 + x^2)\ln\left(\frac{b + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + x^2}}\right) + \frac{b}{3}\int \frac{(3p^2x^2 + x^4)dx}{(p^2 + x^2)\sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 127 und 35 der Tabelle

$$(11.)\quad \int\frac{(x^4+3p^2x^2)dx}{(x^2+p^2)\sqrt{p^2+b^2+x^2}}$$
$$=\int\frac{(x^2+2p^2)dx}{\sqrt{p^2+b^2+x^2}}-2p^4\int\frac{dx}{(p^2+x^2)\sqrt{p^2+b^2+x^2}}$$
$$=\frac{x}{2}\sqrt{p^2+b^2+x^2}+\frac{3p^2-b^2}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{p^2+b^2+x^2}}{\sqrt{p^2+b^2}}\right)$$
$$-2p^4\int\frac{dx}{(p^2+x^2)\sqrt{p^2+b^2+x^2}}.$$

Setzt man noch

$$(12.)\qquad \sqrt{p^2+b^2}=c \quad\text{und}\quad x=c\,.\,\mathrm{tg}t,$$

so wird

$$(13.)\quad dx=\frac{c\,.\,dt}{\cos^2 t},\quad \sqrt{p^2+b^2+x^2}=\frac{c}{\cos t},\quad \frac{x}{\sqrt{p^2+b^2+x^2}}=\sin t,$$

also

$$(14.)\quad \int\frac{dx}{(p^2+x^2)\sqrt{p^2+b^2+x^2}}=\int\frac{c\,.\,dt\,.\cos t}{(p^2\cos^2 t+c^2\sin^2 t)\,.\,c}=\int\frac{\cos t\,.\,dt}{p^2+b^2\sin^2 t}.$$

Wenn man ferner

$$(15.)\qquad b\sin t=pw,\quad\text{also}\quad b\cos t\,.\,dt=pdw$$

einführt, so findet man aus Gleichung (14.)

$$(16.)\quad \int\frac{dx}{(p^2+x^2)\sqrt{p^2+b^2+x^2}}=\frac{1}{pb}\int\frac{dw}{1+w^2}=\frac{1}{pb}\mathrm{arctg}\left(\frac{b\sin t}{p}\right)$$
$$=\frac{1}{pb}\mathrm{arctg}\left(\frac{bx}{p\sqrt{p^2+b^2+x^2}}\right),$$

folglich geht Gleichung (11.) über in

$$(17.)\quad \int\frac{(x^4+3p^2x^2)dx}{(p^2+x^2)\sqrt{p^2+b^2+x^2}}$$
$$=\frac{x}{2}\sqrt{p^2+b^2+x^2}+\frac{3p^2-b^2}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{p^2+b^2+x^2}}{\sqrt{p^2+b^2}}\right)$$
$$-\frac{2p^3}{b}\mathrm{arctg}\left(\frac{bx}{p\sqrt{p^2+b^2+x^2}}\right),$$

und Gleichung (10.) ergibt

$$(18.)\quad \int (p^2 + x^2)\ln\left(\frac{b + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + x^2}}\right)dx$$

$$= \frac{x}{3}(3p^2 + x^2)\ln\left(\frac{b + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + x^2}}\right) + \frac{bx}{6}\sqrt{p^2 + b^2 + x^2}$$

$$+ \frac{(3p^2 - b^2)b}{6}\ln\left(\frac{x + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + b^2}}\right) - \frac{2}{3}p^3 \operatorname{arctg}\left(\frac{bx}{p\sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}\right).$$

Da nun noch nach Formel Nr. 129 der Tabelle

$$(19.)\quad \int b dx \sqrt{p^2 + b^2 + x^2} = \frac{bx}{2}\sqrt{p^2 + b^2 + x^2}$$

$$+ \frac{(p^2 + b^2)b}{2}\ln\left(\frac{x + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + b^2}}\right)$$

ist, so folgt aus Gleichung (6.)

$$(20.)\quad O = \frac{1}{2p}\left[\frac{2bx}{3}\sqrt{p^2 + b^2 + x^2} + \frac{(3p^2 + b^2)b}{3}\ln\left(\frac{x + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + b^2}}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{(3p^2 + x^2)x}{3}\ln\left(\frac{b + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + x^2}}\right) - \frac{2p^3}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{bx}{p\sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}\right)\right]_0^a,$$

also

$$(21.)\quad O = \frac{ab}{3p}\sqrt{p^2 + a^2 + b^2} + \frac{(3p^2 + a^2)a}{6p}\ln\left(\frac{b + \sqrt{p^2 + a^2 + b^2}}{\sqrt{p^2 + a^2}}\right)$$

$$+ \frac{(3p^2 + b^2)b}{6p}\ln\left(\frac{a + \sqrt{p^2 + a^2 + b^2}}{\sqrt{p^2 + b^2}}\right) - \frac{p^2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{ab}{p\sqrt{p^2 + a^2 + b^2}}\right).$$

Da bei dieser Aufgabe die Integrationsgrenzen konstant sind, so hätte man auch die Reihenfolge der Integrationen umkehren können, ohne die Grenzen zu ändern.

Aufgabe 2. Die Gleichung

$$(22.)\quad 2pz = x^2 - y^2$$

stellt wieder ein *gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid* dar; man soll den Inhalt der Oberfläche innerhalb des Zylinders

$$(23.)\quad x^2 + y^2 = a^2$$

berechnen.

Auflösung. Aus Gleichung (22.) folgt

$$(24.)\quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{p}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{p},$$

$$(25.)\qquad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{1}{p}\sqrt{p^2+x^2+y^2};$$

deshalb wird

$$(26.)\qquad O=\frac{4}{p}\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\sqrt{p^2+x^2+y^2}.$$

Durch Einführung von ebenen Polarkoordinaten erhält man nach Formel Nr. 201 der Tabelle

$$(27.)\qquad O=\frac{4}{p}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^a rdr\sqrt{p^2+r^2}$$

und daraus nach Formel Nr. 130 der Tabelle

$$(28.)\qquad O=\frac{4}{3p}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\Big[(p^2+r^2)\sqrt{p^2+r^2}\Big]_0^a$$

$$=\frac{4}{3p}\Big[(p^2+a^2)\sqrt{p^2+a^2}-p^3\Big]\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi$$

$$=\frac{2\pi}{3p}\big[(p^2+a^2)\sqrt{p^2+a^2}-p^3\big].$$

Auch hier hätte man die Reihenfolge bei den Integrationen ändern und die Gleichung (27.) auf die Form

$$(29.)\qquad O=\frac{4}{p}\int_0^a rdr\sqrt{p^2+r^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi=\frac{2\pi}{p}\int_0^a rdr\sqrt{p^2+r^2}$$

$$=\frac{2\pi}{3p}\Big[(p^2+r^2)\sqrt{p^2+r^2}\Big]_0^a=\frac{2\pi}{3p}\Big[(p^2+a^2)\sqrt{p^2+a^2}-p^3\Big]$$

bringen können.

Aufgabe 3. Man soll denjenigen Teil der Kugeloberfläche mit der Gleichung

$$(30.)\qquad x^2+y^2+z^2-a^2=0,\quad \text{oder}\quad z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

berechnen, der von den beiden Zylindern

(31.) $x^2 + y^2 = ax$ und $x^2 + y^2 = -ax$

herausgebohrt wird*). (Vergl. die Figuren 126 bis 129.)

Auflösung. Aus den Gleichungen (30.) folgt

(32.) $F_1 = 2x, \quad F_2 = 2y, \quad F_3 = 2z,$

(33.) $\frac{1}{F_3}\sqrt{F_1^2+F_2^2+F_3^2} = \frac{1}{z}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{a}{z} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$

Da die gesuchte Oberfläche durch die Koordinaten-Ebenen in 8 symmetrische Teile zerlegt wird, so braucht man nur einen solchen Teil zu berechnen und mit 8 zu multiplizieren. Dadurch erhält man nach den Formeln Nr. 203 und 34 der Tabelle

(34.) $$O = 8a\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$= 8a\int_0^a dx\left[\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\right]_0^{\sqrt{ax-x^2}},$$

also

(35.) $$O = 8a\int_0^a dx \,.\, \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}.$$

Setzt man

(36.) $$u = \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}, \quad dv = dx,$$

also

(37.) $$du = \frac{adx}{2(a+x)\sqrt{ax}}, \quad v = x,$$

so findet man durch partielle Integration

(38.) $$\int_0^a dx \,.\, \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} = \left[x \,.\, \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right]_0^a - \frac{1}{2}\int_0^a\frac{\sqrt{ax}\,.\,dx}{a+x},$$

oder, wenn man wieder

*) Diese Aufgabe ist schon von *Viviani* (Acta Eruditorum 1692) etwa in folgender Einkleidung gestellt worden: „Ein halbkugelförmiges Tempelgewölbe hat zwei gleiche Fenster von der Beschaffenheit, daß der Rest des Gewölbes eine quadrierbare Oberfläche hat. Welches ist die Gestalt der Fenster?“ (Vergl. *Joh. Bernoulli*, Opera, t. III, p. 212.)

(39.) $x = at^2$, also $\sqrt{ax} = at$, $dx = 2at\,dt$

setzt,

(40.) $$\int_0^a dx\,.\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} = \frac{a\pi}{4} - a\int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{a\pi}{4} - a\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= \frac{a\pi}{4} - a\left[t - \operatorname{arctg} t\right]_0^1 = \frac{a\pi}{4} - a\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a\pi}{2} - a;$$

folglich wird nach Gleichung (35.)

(41.) $$O = 8a\int_0^a dx\,.\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} = 4a^2\pi - 8a^2.$$

Da die ganze Kugel die Oberfläche

(42.) $$K = 4a^2\pi$$

hat, so bleibt für den außerhalb der beiden Zylinder liegenden Teil der Kugeloberfläche

(43.) $$O_1 = 8a^2$$

übrig.

Die Lösung der Aufgabe wird bedeutend einfacher, wenn man ebene Polarkoordinaten einführt; dadurch geht nach Formel Nr. 201 der Tabelle Gleichung (34.) über in

(44.) $$O = 8a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 8a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[-\sqrt{a^2 - r^2}\right]_0^{a\cos\varphi}$$

$$= 8a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,[a - a\sin\varphi] = 8a^2[\varphi + \cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}},$$

folglich erhält man wieder

(45.) $$O = 4a^2\pi - 8a^2.$$

Aufgabe 4. Man soll die Oberfläche der beiden Kreiszylinder

(46.) $$x^2 + y^2 - ax = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 + ax = 0$$

berechnen, soweit dieselbe innerhalb der Kugel

(47.) $$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

liegt. (Vergl. die Figuren 126 bis 129.)

Auflösung. Die gesuchte Oberfläche wird durch die Koordinaten-Ebenen in 8 symmetrische Teile zerlegt; man braucht daher wieder nur einen dieser Teile zu berechnen und das gefundene Resultat mit 8 zu multiplizieren. Die Gleichung der Fläche ist

(46a.) $$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - ax = 0$$

und enthält die Veränderliche z gar nicht. Damit die gegebene Methode anwendbar wird, muß man die Koordinaten in Formel Nr. 203 der Tabelle miteinander vertauschen. Indem man z. B. y als Funktion von x und z ansieht, geht diese Formel für die Berechnung der krummen Oberfläche über in

(48.) $$O = 8\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{dz}{F_2} \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}.$$

Aus Gleichung (46a.) findet man

(49.) $$F_1 = 2x - a, \quad F_2 = 2y, \quad F_3 = 0,$$

(50.) $$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 4x^2 - 4ax + a^2 + 4y^2,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (46a.)

(51.) $$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = a^2, \quad \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = a,$$

folglich wird

(52.) $$O = 8a\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{z_1} \frac{dz}{2y} = 4a\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} \int\limits_0^{z_1} dz.$$

Da z_1, der Grenzwert von z, zu einem Punkte gehört, welcher auf der Kugel *und* auf dem Kreiszylinder liegt, so wird

$$z_1 = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

wobei aber noch nach Gleichung (46a.)

$$x^2 + y^2 = ax$$

ist, folglich erhält man

$$z_1 = \sqrt{a^2 - ax}. \tag{53.}$$

Dies gibt

$$O = 4a\int_0^a dx\sqrt{\frac{a^2 - ax}{ax - x^2}} = 4a\sqrt{a}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = 8a\sqrt{a}[\sqrt{x}]_0^a, \tag{54.}$$

also

$$O = 8a^2. \tag{55.}$$

Die Fläche der beiden Kreiszylinder, soweit sie von der Kugel eingeschlossen wird, ist also gerade so groß wie derjenige Teil der Kugeloberfläche, welcher außerhalb der beiden Zylinder liegt.

Aufgabe 5. Aus der Schraubenfläche

$$F(x, y, z) = y - x\operatorname{tg}\left(\frac{z}{c}\right) = 0, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{z}{c}\right) = \frac{y}{x} \tag{56.}$$

schneiden die beiden koaxialen Kreiszylinder

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = b^2 \tag{57.}$$

und die beiden Ebenen

$$z = -\frac{c\pi}{2}, \quad z = +\frac{c\pi}{2} \tag{58.}$$

einen Teil der Oberfläche heraus; man soll den Flächeninhalt dieses Teiles berechnen.

Auflösung. Aus Gleichung (56.) folgt

$$F_1 = -\operatorname{tg}\left(\frac{z}{c}\right) = -\frac{y}{x}, \ F_2 = 1, \ F_3 = -\frac{x}{c}\left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{z}{c}\right)\right] = -\frac{x^2 + y^2}{cx}, \tag{59.}$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = \frac{c^2(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2}{c^2x^2} = \frac{x^2 + y^2}{c^2x^2}(c^2 + x^2 + y^2), \tag{60.}$$

$$\frac{1}{F_3}\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = \pm\sqrt{\frac{c^2 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}}, \tag{61.}$$

also, da hier nur das obere Zeichen in Betracht kommt,

$$O = \int dx \int dy \sqrt{\frac{c^2 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}}. \tag{62.}$$

Die Bestimmung der Integrationsgrenzen ist unterblieben, weil durch die Gleichungen

(63.) $$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

neue Integrations-Veränderliche eingeführt werden sollen. Dadurch erhält man nach Formel Nr. 201 der Tabelle

(64.) $$O = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_a^b r dr \sqrt{\frac{c^2+r^2}{r^2}} = \int\limits_a^b dr \sqrt{c^2+r^2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi \int\limits_a^b dr \sqrt{c^2+r^2}.$$

Die Grenzen $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ und $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ bestimmen sich daraus, daß nach Gleichung (56.)

(65.) $$z = c\varphi$$

wird. Nach Formel Nr. 129 der Tabelle erhält man daher

(66.) $$O = \pi \int\limits_a^b dr \sqrt{c^2+r^2} = \frac{\pi}{2}\left[r\sqrt{c^2+r^2} + c^2 \ln\left(\frac{r+\sqrt{c^2+r^2}}{c}\right)\right]_a^b$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[b\sqrt{b^2+c^2} - a\sqrt{a^2+c^2} + c^2 \ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{a^2+c^2}}\right)\right].$$

§ 78.

Einführung zweier variablen Parameter.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 204.)

Ist die Gleichung einer Fläche in der Form

(1.) $$z = f(x, y)$$

gegeben, so kann man, wie es auch bereits in § 75 bei der Einführung von neuen Integrations-Veränderlichen geschehen war, x und y als Funktionen von zwei neuen, von einander unabhängigen Veränderlichen u und v darstellen, indem man

(2.) $$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v)$$

setzt, wo $f_1(u, v)$ und $f_2(u, v)$ für den jedesmaligen Zweck passend gewählte Funktionen sind. Trägt man diese Werte von x und y in die Gleichung (1.) ein, so erhält man

(3.) $$z = f[f_1(u, v), \quad f_2(u, v)] = f_3(u, v).$$

Man kann also eine Fläche durch die drei Gleichungen

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v) \tag{4.}$$

darstellen; und umgekehrt: Sind die drei Gleichungen (4.) beliebig gegeben, so stellen sie eine Fläche dar, deren Gleichung man durch Elimination von u und v aus den Gleichungen (4.) erhält.

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) folgt sodann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}, \end{cases} \tag{5.}$$

also

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}, \tag{6.}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}. \tag{7.}$$

Setzt man also

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} - \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial u} = A, \quad \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u} = B, \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u} = C, \end{cases} \tag{8.}$$

so wird

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{A}{C}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{B}{C}, \tag{9.}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \pm\frac{1}{C}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \tag{10.}$$

Deshalb erhält man nach Formel Nr. 200 der Tabelle, da die Funktional-Determinante gleich $\pm C$ ist,

$$O = \iint dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \pm\iint du dv \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \tag{11.}$$

wobei nur das obere Vorzeichen einen Sinn hat.

Wie diese Formel verwendet werden kann, möge das folgende Beispiel zeigen.

Aufgabe. Durch die Gleichungen

$$x = u^3 - 3uv^2 - 3u,\quad y = 3u^2 - 3v^2,\quad z = v^3 - 3u^2v - 3v \tag{12.}$$

wird eine Fläche dargestellt, welche die „*Enneper*sche Minimalfläche" genannt wird, und auf welcher man für konstante Werte von u und v zwei Scharen von ebenen Kurven dritten Grades erhält, die einander rechtwinklig schneiden*). Man soll auf der Fläche den Inhalt eines Vierecks berechnen, welches durch die Kurven

$$u = a,\quad u = b,\quad v = c,\quad v = d \tag{13.}$$

begrenzt wird.

Auflösung. Aus den Gleichungen (12.) folgt

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial x}{\partial u} = 3(u^2 - v^2 - 1), & \dfrac{\partial y}{\partial u} = 6u, & \dfrac{\partial z}{\partial u} = -6uv, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -6uv, & \dfrac{\partial y}{\partial v} = -6v, & \dfrac{\partial z}{\partial v} = 3(v^2 - u^2 - 1), \end{array}\right. \tag{14.}$$

deshalb wird

$$\left\{\begin{array}{l} A = -18u(u^2 + v^2 + 1), \\ B = 9(u^2 + v^2 + 1)(u^2 + v^2 - 1), \\ C = 18v(u^2 + v^2 + 1), \end{array}\right. \tag{15.}$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = 81(u^2 + v^2 + 1)^4. \tag{16.}$$

Dies gibt nach Gleichung (11.)

$$\begin{aligned} O &= 9\int_a^b du \int_c^d (u^2 + v^2 + 1)^2 dv \\ &= 9\int_a^b du \int_c^d (u^4 + 2u^2v^2 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 1)dv \\ &= 9\int_a^b du\big[(u^4 + 2u^2 + 1)(d - c) + \tfrac{2}{3}(u^2 + 1)(d^3 - c^3) + \tfrac{1}{5}(d^5 - c^5)\big], \end{aligned} \tag{17.}$$

also

$$\begin{aligned} O = 9\big[&\tfrac{1}{5}(b^5 - a^5)(d - c) + \tfrac{1}{5}(d^5 - c^5)(b - a) + \tfrac{2}{9}(b^3 - a^3)(d^3 - c^3) \\ &+ \tfrac{2}{3}(b^3 - a^3)(d - c) + \tfrac{2}{3}(d^3 - c^3)(b - a) + (b - a)(d - c)\big]. \end{aligned} \tag{18.}$$

---

*) Diese Linien sind die *Krümmungslinien* der *Enneper*schen Minimalfläche. Davon soll aber bei dieser Aufgabe kein Gebrauch gemacht werden, weil in diesem Lehrbuche wegen der Beschränkung des Stoffes eine Erklärung der Krümmungslinien nicht gegeben werden konnte.

§ 79.

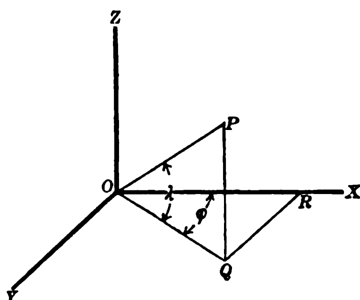
Einführung räumlicher Polarkoordinaten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 205.)

Führt man räumliche Polarkoordinaten ein, indem man

(1.) $$x = r\cos\lambda\cos\varphi, \quad y = r\cos\lambda\sin\varphi, \quad z = r\sin\lambda$$

Fig. 139.



setzt, so ist (Fig. 139) OP gleich r der *Radius vector*, λ der Neigungswinkel QOP von OP gegen die XY-Ebene, und φ der Winkel XOQ, welchen die Projektion OQ des Radius vectors OP auf die XY-Ebene mit der positiven Richtung der X-Achse bildet. Wenn man dabei λ und φ als die beiden unabhängigen Veränderlichen betrachtet, so wird r eine Funktion von λ und φ, also

$$r = F(\lambda, \varphi),$$

und man erhält

(2.) $$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial\lambda} = \dfrac{\partial r}{\partial\lambda}\cos\lambda\cos\varphi - r\sin\lambda\cos\varphi, \\ \dfrac{\partial y}{\partial\lambda} = \dfrac{\partial r}{\partial\lambda}\cos\lambda\sin\varphi - r\sin\lambda\sin\varphi, \\ \dfrac{\partial z}{\partial\lambda} = \dfrac{\partial r}{\partial\lambda}\sin\lambda + r\cos\lambda, \\ \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\lambda\cos\varphi - r\cos\lambda\sin\varphi, \\ \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\lambda\sin\varphi + r\cos\lambda\cos\varphi, \\ \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\lambda; \end{cases}$$

folglich wird, wenn man u mit λ und v mit φ vertauscht,

$$(3.)\quad \begin{cases} A = -r\dfrac{\partial r}{\partial\lambda}\sin\lambda\cos\lambda\cos\varphi - r\dfrac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\varphi - r^2\cos^2\lambda\cos\varphi, \\ B = -r\dfrac{\partial r}{\partial\lambda}\sin\lambda\cos\lambda\sin\varphi + r\dfrac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\varphi - r^2\cos^2\lambda\sin\varphi, \\ C = +r\dfrac{\partial r}{\partial\lambda}\cos^2\lambda - r^2\sin\lambda\cos\lambda, \end{cases}$$

$$(4.)\quad A^2 + B^2 + C^2 = r^2\left(\frac{\partial r}{\partial\lambda}\right)^2\cos^2\lambda + r^2\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2 + r^4\cos^2\lambda$$

$$= r^2\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\lambda}\right)^2\right]\cos^2\lambda + r^2\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2,$$

also, da auch hier nur das positive Zeichen bei der Wurzelausziehung in Betracht kommt,

$$(5.)\quad O = \iint\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,du\,dv$$

$$= \iint r\sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\lambda}\right)^2\right]\cos^2\lambda + \left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2}\,d\lambda\,d\varphi.$$

Konstanten Werten von φ entsprechen Ebenen durch die Z-Achse, und konstanten Werten von λ Kegelflächen, welche die Z-Achse zur Achse haben. Durch diese Ebenen und Kegel wird die Fläche in unendlich viele, unendlich kleine Vierecke zerlegt. Indem man in bezug auf φ integriert, erhält man die Summe von diesen Vierecken auf einem ringförmigen, unendlich schmalen Streifen zwischen zwei benachbarten Kegelflächen. Alle diese unendlich schmalen Streifen werden sodann durch Integration in bezug auf λ summiert. Daraus ergibt sich für jeden einzelnen Fall die Bestimmung der Grenzen.

Wie dies geschieht, möge die folgende Aufgabe zeigen.

Aufgabe. Die gegebene Fläche habe die Gleichung

$$(6.)\quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

oder bei Einführung räumlicher Polarkoordinaten durch die Gleichungen (1.)

$$(7.)\quad r^2 = a^2\cos^2\lambda\cos(2\varphi);$$

man soll die gesamte Oberfläche berechnen.

Auflösung. Um sich eine Vorstellung von der Fläche zu machen, beachte man, daß $r \leqq a$ sein muß, daß die Fläche also ganz innerhalb einer Kugel mit dem Halbmesser a liegt. Die XY-Ebene, in der λ gleich 0 ist, schneidet die Fläche in einer *Lemniskate* mit der Gleichung

$$(8.)\quad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad \text{oder} \quad r^2 = a^2\cos(2\varphi).$$

Gibt man φ einen konstanten Wert und setzt

$$(9.)\quad a\sqrt{\cos(2\varphi)} = a_1,$$

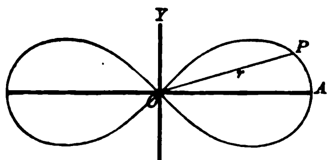
so erhält man den Durchschnitt der Fläche mit einer Ebene, welche durch die Z-Achse hindurchgeht. Die Schnittkurve zerfällt in zwei Kreise mit den Gleichungen

$$(10.)\quad r = +\,a_1\cos\lambda \quad \text{und} \quad r = -\,a_1\cos\lambda,$$

oder

$$(10\text{a.})\quad x^2 + y^2 = +\,a_1x \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = -\,a_1x.$$

Fig. 140.



Die Fläche entsteht also aus der Lemniskate in der XY-Ebene (Fig. 140), indem man sämtliche Radii vectores OP zu Durchmessern von Kreisen macht, deren Ebenen auf der XY-Ebene senkrecht stehen.

Da die Koordinaten-Ebenen die Fläche in 8 symmetrische Teile zerlegen, so braucht man nur die Oberfläche eines solchen Teiles zu berechnen und das gefundene Resultat mit 8 zu multiplizieren. Die Grenzen von φ sind dabei 0 und $\frac{\pi}{4}$, die von λ sind 0 und $\frac{\pi}{2}$.

Aus Gleichung (7.) folgt dann

$$(11.)\quad r\frac{\partial r}{\partial \lambda} = -\,a^2\cos\lambda\sin\lambda\cos(2\varphi),$$

$$(12.)\quad r\frac{\partial r}{\partial \varphi} = -\,a^2\cos^2\lambda\sin(2\varphi);$$

deshalb wird

$$(13.)\quad r^2\left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2 = a^4\cos^2\lambda\sin^2\lambda\cos^2(2\varphi) = a^2r^2\sin^2\lambda\cos(2\varphi),$$

$$(14.)\quad r^2\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2 = a^4\cos^4\lambda\sin^2(2\varphi) = a^2r^2\cos^2\lambda\cdot\frac{\sin^2(2\varphi)}{\cos(2\varphi)},$$

$$(15.)\quad \left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\lambda}\right)^2\right]\cos^2\lambda+\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2 = a^2\cos(2\varphi)\cos^2\lambda + a^2\cos^2\lambda\,\frac{\sin^2(2\varphi)}{\cos(2\varphi)} = \frac{a^2\cos^2\lambda}{\cos(2\varphi)} = \frac{r^2}{\cos^2(2\varphi)}.$$

Dies gibt nach Gleichung (5.)

$$(16.)\quad O = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\lambda\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{r^2d\varphi}{\cos(2\varphi)} = 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\lambda\,d\lambda\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi$$

$$= 2a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\lambda\,d\lambda = a^2\pi\Big[\sin\lambda\cos\lambda+\lambda\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2\pi^2}{2}.$$

XIV. Abschnitt.

Integration der Differentiale der Funktionen von mehreren Veränderlichen.

§ 80.

Vollständige Differentiale der Funktionen von zwei Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 206.)

Ist

$$u = f(x, y) \tag{1.}$$

eine Funktion von zwei voneinander unabhängigen Veränderlichen, so ist nach D.-R., Formel Nr. 221 der Tabelle das *vollständige* oder *totale* Differential von u

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \tag{2.}$$

wobei

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \tag{3.}$$

noch Funktionen von x und y sind, so daß Gleichung (2.) übergeht in

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy. \tag{2a.}$$

Wie in dem Vorstehenden die Gleichung (2a.) aus Gleichung (1.) abgeleitet ist, so könnte man sich jetzt auch die Aufgabe stellen: „Man soll u als Funktion der beiden Veränderlichen x und y bestimmen, wenn du durch die Gleichungen (2a.) gegeben ist, oder, was auf dasselbe hin-

auskommt, wenn $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ durch die Gleichungen (3.) gegeben sind."

Dabei erkennt man aber sogleich, daß die Funktionen $M(x, y)$ und $N(x, y)$ nicht willkürlich gegeben sein dürfen; es müssen vielmehr M und N die partiellen Ableitungen ein und derselben Funktion $u = f(x, y)$ sein. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, muß nach D.-R., Formel Nr. 224 der Tabelle

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}, \tag{4.}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (3.)

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{4a.}$$

sein. Diese Bedingung ist *notwendig*, wenn

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy \tag{5.}$$

ein *vollständiges Differential* sein soll; sie ist aber auch, wie sogleich gezeigt werden soll, *hinreichend* dafür, daß es eine Funktion

$$u = f(x, y) \tag{6.}$$

gibt, deren vollständiges Differential mit $Mdx + Ndy$ übereinstimmt.

Beweis. Wie die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \tag{7.}$$

aus Gleichung (6.) hervorgeht, indem man y als eine Konstante betrachtet und die Funktion u nach x *differentiiert*, so wird Gleichung (6.) aus Gleichung (7.) hervorgehen, indem man y wieder als konstant ansieht und die Funktion $M(x, y)$ in bezug auf x *integriert*. Dies gibt

$$u = \int M(x, y)dx + Y. \tag{8.}$$

Hierbei ist die Integrations-Konstante mit Y bezeichnet worden, um anzudeuten, daß sie noch eine Funktion von y sein darf, weil bei der in Gleichung (8.) angedeuteten

Operation x als die einzige Veränderliche angesehen wurde. Setzt man

(9.) $$\int M(x, y)dx = v,$$

so geht Gleichung (8.) über in

(10.) $$u = v + Y.$$

Aus dieser Gleichung folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (3.)

(11.) $$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{dY}{dy},$$

also

(12.) $$\frac{dY}{dy} = N(x, y) - \frac{\partial v}{\partial y}.$$

In dieser Gleichung ist die linke Seite eine Funktion der einzigen Veränderlichen y. Damit die Aufgabe lösbar ist, muß auch die *rechte* Seite der Gleichung von x unabhängig sein. Das ist auch nach der in Gleichung (4a.) festgestellten Voraussetzung der Fall, denn es ist mit Rücksicht auf Gleichung (9.)

(13.) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial y}$$
$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Dieser Ausdruck ist aber nach Gleichung (4a.) gleich 0, folglich muß $N - \frac{\partial v}{\partial y}$ von x unabhängig sein. Die Gleichung (12.) enthält also keinen Widerspruch, so daß man daraus ohne weiteres durch Integration

(14.) $$Y = \int\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + C$$

ermitteln kann. Setzt man diesen Wert von Y in die Gleichung (10.) ein, so findet man

(15.) $$u = v + \int\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + C,$$

wobei

(16.) $$v = \int M(x, y)dx$$

ist. Damit ist die Aufgabe gelöst, denn nach den Gleichungen (15.) und (16.) ist in der Tat

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = M(x, y), \tag{17.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + \left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = N(x, y) \tag{18.}$$

Man nennt den Ausdruck

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

„ein vollständiges oder totales Differential“, wenn die Bedingung

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{19.}$$

erfüllt ist. Man muß daher, wenn man sicher gehen will, ehe man integriert, untersuchen, ob Gleichung (19.) befriedigt wird. Man kann aber auch mit der Berechnung von

$$v = \int M(x, y)dx \tag{20.}$$

beginnen und dann untersuchen, ob $N - \frac{\partial v}{\partial y}$ unabhängig von x ist. Wenn dies zutrifft, so wird ja, wie schon in Gleichung (13.) gezeigt wurde,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0, \tag{21.}$$

d. h. die in Gleichung (19.) angegebene Bedingung wird befriedigt.

§ 81.

Übungs-Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll u als Funktion von x und y bestimmen, wenn

$$du = (3x^2 + 8xy)dx + (4x^2 + 3y^2)dy \tag{1.}$$

gegeben ist.

Auflösung. Um zunächst zu untersuchen, ob die rechte Seite von Gleichung (1.) ein *vollständiges Differential* ist, bilde man

(2.) $$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2 + 8xy)}{\partial y} = 8x,$$

(3.) $$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(4x^2 + 3y^2)}{\partial x} = 8x.$$

Aus den Gleichungen (2.) und (3.) folgt, daß

(4.) $$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

ist, daß also in diesem Falle $Mdx + Ndy$ ein *vollständiges Differential* ist. Man darf daher ohne weiteres das in § 80 angegebene Integrations-Verfahren anwenden und erhält

(5.) $$v = \int M(x, y)dx = \int (3x^2 + 8xy)dx = x^3 + 4x^2y.$$

Ferner wird

(6.) $$N - \frac{\partial v}{\partial y} = 4x^2 + 3y^2 - 4x^2 = 3y^2$$

und deshalb

(7.) $$Y = \int\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = \int 3y^2 dy = y^3 + C.$$

Dies gibt

(8.) $$u = v + Y = x^3 + 4x^2y + y^3 + C.$$

Die Richtigkeit dieses Resultates kann man sehr leicht durch Differentiation prüfen.

Man kann selbstverständlich die Aufgabe auch so lösen, daß man zunächst

(9.) $$u = \int Ndy + X = w + X$$

bildet, wobei X eine Funktion der einzigen Veränderlichen x ist, und daß man dann X aus der Gleichung

(10.) $$X = \int\left(M - \frac{\partial w}{\partial x}\right)dx$$

berechnet.

Aufgabe 2. Man soll u als Funktion von x und y bestimmen, wenn

(11.) $du = (20x^3 - 21x^2y + 2y)dx + (-7x^3 + 2x + 3)dy$
gegeben ist.

Auflösung. Man kann zunächst durch Bildung von $\frac{\partial M}{\partial y}$ und $\frac{\partial N}{\partial x}$ zeigen, daß

(12.) $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -21x^2 + 2$$

wird, und daß deshalb die rechte Seite in Gleichung (11.) ein *vollständiges Differential* ist. Dann erhält man

(13.) $$v = \int M dx = \int (20x^3 - 21x^2y + 2y)dx = 5x^4 - 7x^3y + 2xy,$$

(14.) $$N - \frac{\partial v}{\partial y} = (-7x^3 + 2x + 3) - (-7x^3 + 2x) = 3,$$

(15.) $$Y = \int\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = \int 3dy = 3y + C.$$

Dies gibt

(16.) $$u = v + Y = 5x^4 - 7x^3y + 2xy + 3y + C.$$

Aufgabe 3. Man soll u als Funktion von x und y bestimmen, wenn

(17.) $$du = (2ax + by + c)dx + (bx + 2my + n)dy$$

gegeben ist.

Auflösung. Hier wird

(18.) $$\frac{\partial M}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = b, \quad \text{also} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

folglich ist die rechte Seite von Gleichung (17.) ein *vollständiges Differential*; man erhält daher

(19.) $$v = \int M dx = \int (2ax + by + c)dx = ax^2 + bxy + cx,$$

(20.) $$N - \frac{\partial v}{\partial y} = (bx + 2my + n) - bx = 2my + n,$$

(21.) $$Y = \int\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = \int (2my + n)dy = my^2 + ny + C.$$

Dies gibt

(22.) $$u = v + Y = ax^2 + bxy + cx + my^2 + ny + C.$$

Aufgabe 4. Man soll u als Funktion von x und y bestimmen, wenn

$$du = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \tag{23.}$$

gegeben ist.

Auflösung. Die Gleichung (23.) kann man auch in der Form

$$du = -\frac{ydx}{x^2 + y^2} + \frac{xdy}{x^2 + y^2} \tag{23a.}$$

schreiben, aus der man leichter erkennt, daß

$$M = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad N = \frac{x}{x^2 + y^2} \tag{24.}$$

ist. Daraus folgt

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \tag{25.}$$

Da diese beiden Ausdrücke einander gleich sind, so ist die rechte Seite von Gleichung (23.) ein *vollständiges Differential*; man erhält daher nach Formel Nr. 28 der Tabelle

$$v = \int M dx = -y\int\frac{dx}{y^2 + x^2} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right), \tag{26.}$$

$$N - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} = 0, \tag{27.}$$

$$Y = \int\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = C. \tag{28.}$$

Dies gibt

$$u = v + Y = C - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right). \tag{29.}$$

Aufgabe 5. Man soll u als Funktion von x und y bestimmen, wenn

$$du = \left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x - y)^2}\right)dx + \left(\frac{x^2}{(x - y)^2} - \frac{1}{y}\right)dy \tag{30.}$$

gegeben ist.

Auflösung. Den Nachweis, daß die rechte Seite von Gleichung (30.) ein *vollständiges Differential* ist, kann man führen, indem man

$$(31.)\qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x-y)^3}$$

bildet. Man darf aber auch ohne weiteres

$$(32.)\qquad v = \int M dx = \int\Big(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\Big)dx$$

$$= \ln x + \frac{y^2}{x-y}$$

berechnen und erhält daraus, daß

$$(33.)\qquad N - \frac{\partial v}{\partial y} = \Big(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\Big) - \frac{2xy - y^2}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{y}$$

eine Funktion der einzigen Veränderlichen y ist, diesen Nachweis. Da nun noch

$$(34.)\qquad Y = \int\Big(N - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dy = \int\Big(1 - \frac{1}{y}\Big)dy = y - \ln y + C$$

ist, so ergibt sich

$$(35.)\qquad u = v + Y = \ln x + \frac{y^2}{x-y} + y - \ln y + C,$$

oder

$$(35\text{a.})\qquad u = \ln\Big(\frac{x}{y}\Big) + \frac{xy}{x-y} + C.$$

Aufgabe 6. Man soll u als Funktion von x und y bestimmen, wenn

$$(36.)\quad du = \Big(\frac{2y^3}{x^4 - y^4} + y - 5\Big)dx + \Big(-\frac{2xy^2}{x^4 - y^4} + x - 2y - 7\Big)dy$$

gegeben ist.

Auflösung. Den Nachweis, daß die rechte Seite von Gleichung (36.) ein *vollständiges Differential* ist, kann man auch hier führen, indem man zeigt, daß

$$(37.)\qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{6x^4y^2 + 2y^6}{(x^4 - y^4)^2} + 1$$

ist. Man kann sich aber diese etwas umständliche Differentiation auch ersparen und ohne weiteres

$$v = \int M dx = \int\left(\frac{2y^3}{x^4 - y^4} + y - 5\right)dx$$

berechnen. Dadurch erhält man

$$v = \int\frac{y dx}{x^2 - y^2} - \int\frac{y dx}{x^2 + y^2} + xy - 5x,$$

oder nach den Formeln Nr. 29a und 28 der Tabelle

$$(38.)\qquad v = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x - y}{x + y}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + xy - 5x.$$

Daraus folgt

$$(39.)\quad N - \frac{\partial v}{\partial y} = \left(-\frac{2xy^2}{x^4 - y^4} + x - 2y - 7\right) - \left(-\frac{2xy^2}{x^4 - y^4} + x\right)$$
$$= -2y - 7.$$

Da dieser Ausdruck von x unabhängig ist, so ist die rechte Seite von Gleichung (36.) ein *vollständiges Differential*, und man erhält

$$(40.)\quad Y = \int\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = -\int(2y + 7)dy = -y^2 - 7y + C,$$

$$(41.)\quad u = v + Y$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x - y}{x + y}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + xy - 5x - y^2 - 7y + C.$$

§ 82.

Vollständige Differentiale der Funktionen von drei Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 207.)

Ist

$$(1.)\qquad u = f(x, y, z)$$

eine Funktion von drei voneinander unabhängigen Veränderlichen, so wird nach D.-R., Formel Nr. 223 der Tabelle das *vollständige* oder *totale Differential* von u

$$(2.)\qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

wobei

$$(3.)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = F(x, y, z),\quad \frac{\partial u}{\partial y} = G(x, y, z),\quad \frac{\partial u}{\partial z} = H(x, y, z)$$

noch Funktionen von x, y, z sind, so daß Gleichung (2.) übergeht in

$$du = Fdx + Gdy + Hdz, \tag{2a.}$$

wenn man bezw. F, G, H statt $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$, $H(x, y, z)$ schreibt. Wie in dem Vorstehenden die Gleichung (2a.) aus Gleichung (1.) abgeleitet ist, so könnte man sich jetzt auch die Aufgabe stellen: „Man soll u als Funktion der drei Veränderlichen x, y, z bestimmen, wenn du durch die Gleichung (2a.) gegeben ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial z}$ durch die Gleichungen (3.) gegeben sind."

Dabei erkennt man aber wieder sogleich, daß die drei Funktionen F, G, H nicht willkürlich gegeben sein dürfen; sie müssen vielmehr die partiellen Ableitungen ein und derselben Funktion $u = f(x, y, z)$ sein. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so ergibt sich aus D.-R., Formel Nr. 224 der Tabelle

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial x}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial y}, \tag{4.}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (3.)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y}. \tag{4a.}$$

Diese Bedingungen sind *notwendig*, wenn die rechte Seite von Gleichung (2a.) ein *vollständiges Differential* sein soll; sie sind aber auch, wie sogleich gezeigt werden soll, *hinreichend* dafür, daß es eine Funktion

$$u = f(x, y, z) \tag{5.}$$

gibt, deren vollständiges Differential mit

$$Fdx + Gdy + Hdz$$

übereinstimmt.

Beweis. Wie die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F(x, y, z) \tag{6.}$$

aus Gleichung (5.) hervorgeht, indem man y und z als Konstanten betrachtet und die Funktion u nach x *diffe-*

rentiiert, so wird Gleichung (5.) aus Gleichung (6.) hervorgehen, indem man y und z wieder als konstant ansieht und die Funktion $F(x, y, z)$ in bezug auf x *integriert*. Dies gibt

$$u = \int F(x, y, z)dx + \varphi(y, z). \tag{7.}$$

Hierbei ist die Integrations-Konstante mit $\varphi(y, z)$ bezeichnet worden, um anzudeuten, daß sie noch eine Funktion von y und z sein darf, weil bei der in Gleichung (7.) ausgeführten Integration x als die einzige Veränderliche angesehen wurde. Setzt man

$$\int F(x, y, z)dx = v, \tag{8.}$$

so geht Gleichung (7.) über in

$$u = v + \varphi(y, z). \tag{9.}$$

Aus dieser Gleichung folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (3.)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = G(x, y, z) = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}, \tag{10.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = H(x, y, z) = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z}, \tag{11.}$$

oder

$$\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} = G - \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} = H - \frac{\partial v}{\partial z}. \tag{12.}$$

Hierbei sollen $\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}$ und $\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z}$ von der Veränderlichen x unabhängig sein, folglich muß auch die rechte Seite dieser Gleichungen (12.) von x unabhängig sein, wenn die Aufgabe lösbar sein soll. Das ist auch nach den in den Gleichungen (4a.) aufgestellten Voraussetzungen der Fall, denn es ist mit Rücksicht auf die Gleichungen (8.) und (4a.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{13.}$$

$$(14.)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(H - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$= \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Die Gleichungen (12.) enthalten daher keinen Widerspruch, so daß man die Funktion $\varphi(y, z)$ aus der Gleichung

$$(15.)\qquad d\varphi = \left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \left(H - \frac{\partial v}{\partial z}\right)dz$$

bestimmen kann. Auch die Bedingung, daß hierbei der Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (15.) ein *vollständiges Differential* ist, wird erfüllt, denn man erhält nach den Gleichungen (4a.)

$$(16.)\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(H - \frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

Man kann daher die Gleichung (15.) nach dem in § 80 angegebenen Verfahren integrieren, wie folgt. Es sei

$$(17.)\qquad w = \int\left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy,$$

dann ist mit Rücksicht auf Gleichung (15.)

$$(18.)\qquad \varphi(y, z) = w + \psi(z),$$

$$(19.)\qquad \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} = H - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{d\psi(z)}{dz},$$

oder

$$(20.)\qquad \frac{d\psi(z)}{dz} = H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Daß auf der rechten Seite dieser Gleichung eine Funktion der einzigen Veränderlichen z steht, folgt schon aus den Erläuterungen in § 80, läßt sich aber auch zeigen, indem man den Ausdruck nach y differentiiert. Dann erhält man nämlich mit Rücksicht auf die Gleichungen (17.) und (4a.)

$$(21.)\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}$$
$$= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} = 0.$$

Aus Gleichung (20.) folgt daher

$$(22.)\quad \psi(z) = \int\left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz + C,$$

also nach den Gleichungen (9.) und (18.)

$$(23.)\quad u = v + w + \psi(z),$$

wobei sich die Werte von v, w und $\psi(z)$ aus den Gleichungen (8.), (17.) und (22.) ergeben.

Man ist natürlich nicht an eine bestimmte Reihenfolge der Integrationen gebunden, d. h. man ist nicht gezwungen, zuerst $\int F(x, y, z)dx$, sodann $\int\left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$ und endlich $\int\left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz$ zu bilden, sondern man kann auch mit $\int G(x, y, z)dy$ oder $\int H(x, y, z)dz$ beginnen und dann die Rechnung in ähnlicher Weise fortsetzen wie bei dem angegebenen Verfahren.

Man erkennt auch, wie sich die angegebene Methode auf Funktionen von n Veränderlichen übertragen läßt. Dabei kann die rechte Seite von der Gleichung

$$(24.)\quad du = M_1 dx_1 + M_2 dx_2 + \cdots + M_n dx_n$$

nur dann ein *vollständiges Differential* einer Funktion

$$(25.)\quad u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

sein, wenn die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen

$$(26.)\quad \frac{\partial M_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial M_\beta}{\partial x_\alpha} \quad \text{für} \quad \begin{array}{l}\alpha = 1, 2, 3, \ldots n, \\ \beta = 1, 2, 3, \ldots n\end{array}$$

befriedigt sind. Indem man

$$7.)\qquad v = \int M_1 dx_1 \quad \text{und} \quad u = v + \varphi(x_2, x_3, \ldots x_n)$$

tzt, hat man den vorliegenden Fall einer Funktion von Veränderlichen auf den einfacheren Fall einer Funktion n $n - 1$ Veränderlichen zurückgeführt, da dann noch die unktion $\varphi(x_2, x_3, \ldots x_n)$ aus der Gleichung

$$8.)\qquad d\varphi = \left(M_2 - \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)dx_2 + \left(M_3 - \frac{\partial v}{\partial x_3}\right)dx_3 + \cdots + \left(M_n - \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)dx_n$$

ι berechnen ist.

§ 83.

Übungs-Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll u als Funktion von x, y, z be-immen, wenn

$$.)\qquad du = \frac{adx}{y} - \frac{ax + bz}{y^2}dy + \frac{bdz}{y}$$

ıgeben ist.

Auflösung. In diesem Falle ist

$$.)\qquad F = \frac{a}{y}, \quad G = -\frac{ax + bz}{y^2}, \quad H = \frac{b}{y},$$

so

$$.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial G}{\partial x} = -\dfrac{a}{y^2}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial G}{\partial z} = \dfrac{\partial H}{\partial y} = -\dfrac{b}{y^2}. \end{cases}$$

Die rechte Seite von Gleichung (1.) ist daher ein *voll-ändiges Differential*, und man erhält

$$.)\qquad v = \int F dx = \int \frac{adx}{y} = \frac{ax}{y},$$

$$.)\qquad G - \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{ax + bz}{y^2} + \frac{ax}{y^2} = -\frac{bz}{y^2},$$

$$w = \int\left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = -\int\frac{bz}{y^2}dy = \frac{bz}{y}, \tag{6.}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{b}{y}, \quad H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{7.}$$

$$\psi(z) = \int\left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz = C, \tag{8.}$$

folglich wird

$$u = \frac{ax + bz}{y} + C. \tag{9.}$$

Aufgabe 2. Man soll u als Funktion von x, y, z bestimmen, wenn

(10.) $du =$

$(y^3 + yz^2)dx + (3xy^2 + xz^2 + 3y^2z)dy + (4z^3 + 2xyz + y^3)dz$

gegeben ist.

Auflösung. Hier ist

(11.) $F = y^3 + yz^2, \quad G = 3xy^2 + xz^2 + 3y^2z, \quad H = 4z^3 + 2xyz + y^3,$

also

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x} = 3y^2 + z^2, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x} = 2yz, \\ \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y} = 2xz + 3y^2. \end{array}\right. \tag{12.}$$

Die rechte Seite von Gleichung (10.) ist daher ein *vollständiges Differential*, und man erhält

$$v = \int F dx = \int(y^3 + yz^2)dx = xy^3 + xyz^2, \tag{13.}$$

$$G - \frac{\partial v}{\partial y} = (3xy^2 + xz^2 + 3y^2z) - (3xy^2 + xz^2) = 3y^2z, \tag{14.}$$

$$w = \int\left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = \int 3y^2z\,dy = y^3z, \tag{15.}$$

$$H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} = (4z^3 + 2xyz + y^3) - 2xyz - y^3 = 4z^3, \tag{16.}$$

$$(17.)\qquad \psi(z) = \int\Big(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\Big)dz = \int 4z^3dz = z^4 + C,$$

folglich, wird

$$(18.)\qquad u = xy^3 + xyz^2 + y^3z + z^4 + C.$$

Aufgabe 3. Man soll u als Funktion von x, y und z bestimmen wenn

$$\begin{aligned}(19.)\qquad du = &\left[\frac{x}{r(z+r)} - \frac{y}{\sqrt{z^2 - x^2y^2}} + \frac{1}{z}\cdot e^{\frac{x}{z}}\right]dx\\ &+ \left[\frac{y}{r(z+r)} - \frac{x}{\sqrt{z^2 - x^2y^2}} - \sin y\right]dy\\ &+ \left[\frac{1}{r} + \frac{xy}{z\sqrt{z^2 - x^2y^2}} - \frac{x}{z^2}e^{\frac{x}{z}} - \cos z\right]dz\end{aligned}$$

gegeben ist, wobei

$$(20.)\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

sein soll.

Auflösung. Die Untersuchung, ob die rechte Seite von Gleichung (19.) ein vollständiges Differential ist, kann übergangen werden, da sich ergeben wird, daß $G - \frac{\partial v}{\partial y}$ von x unabhändig ist, und daß $H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}$ nur noch die einzige Veränderliche z enthält. Es wird nämlich, da $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ ist,

$$\begin{aligned}(21.)\qquad v = \int Fdx &= \int\left[\frac{x}{r(z+r)} - \frac{y}{\sqrt{z^2 - x^2y^2}} + \frac{1}{z}\cdot e^{\frac{x}{z}}\right]dx\\ &= \ln(z+r) - \arcsin\Big(\frac{xy}{z}\Big) + e^{\frac{x}{z}},\end{aligned}$$

$$(22.)\qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{r(z+r)} - \frac{x}{\sqrt{z^2 - x^2y^2}},$$

$$(23.)\qquad G - \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin y,$$

$$(24.)\qquad w = \int\Big(G - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dy = -\int \sin y\,dy = \cos y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{z+r}{r(z+r)} + \frac{xy}{z\sqrt{z^2 - x^2y^2}} - \frac{x}{z^2}e^{\frac{x}{z}}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{25.}$$

$$\psi(z) = \int\left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz = -\int\cos z\,dz = -\sin z + C, \tag{26.}$$

folglich wird

$$u = \ln(z+r) - \arcsin\left(\frac{xy}{z}\right) + e^{\frac{x}{z}} + \cos y - \sin z + C. \tag{27.}$$

XV. Abschnitt.

Theorie der gewöhnlichen Differential-Gleichungen erster Ordnung.

§ 84.

Begriff und Einteilung der Differential-Gleichungen.

Jede Gleichung, in der mehrere Veränderliche und außerdem noch *Differentiale* oder *Differential-Quotienten* beliebig hoher Ordnung enthalten sind, heißt eine *Differential-Gleichung.*

Man unterscheidet *gewöhnliche* und *partielle* Differential-Gleichungen, je nachdem dieselben Funktionen von *einer einzigen* oder Funktionen von *mehreren unabhängigen* Veränderlichen enthalten. Hier soll zunächst nur von den *gewöhnlichen* Differential-Gleichungen die Rede sein.

Da die veränderlichen Größen x, y, z... selbst *endliche,* die Differentiale aber *unendlich kleine* Größen gleicher Ordnung sind, die neben den endlichen Größen vernachlässigt werden dürfen, so müssen beide Seiten einer Differential-Gleichung *homogene* Funktionen der Differentiale sein, d. h. sie dürfen sich gar nicht ändern, wenn man

$$dx,\ dy,\ dz\ \ldots \text{ mit } t,$$
$$d^2x,\ d^2y,\ d^2z, \ldots \text{ mit } t^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d^nx,\ d^ny,\ d^nz, \ldots \text{ mit } t^n$$

multipliziert und dann beide Seiten der Gleichung durch eine passend gewählte Potenz von t dividiert.

Dies gilt auch noch, wenn in der Differential-Gleichung *partielle* Differentiale und Differential-Quotienten auftreten.

Man teilt die gewöhnlichen Differential-Gleichungen in *verschiedene* Ordnungen ein nach der Ordnung des höchsten darin enthaltenen Differentials, bezw. des höchsten Differential-Quotienten. Es gibt also Differential-Gleichungen *erster Ordnung, zweiter Ordnung* usw., allgemein *n^{ter} Ordnung.* Beschränkt man sich zunächst auf den Fall, wo nur zwei Veränderliche x und y mit ihren Differentialen vorkommen, so sind z. B. die Gleichungen

$$(3y^2 + 7x^2)dy + (12xy - 8x^2)dx = 0, \tag{1.}$$

oder

$$(3y^2 + 7x^2)\frac{dy}{dx} + 12xy - 8x^2 = 0, \tag{1a.}$$

$$y^2 - ax\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \tag{2.}$$

$$y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a, \tag{3.}$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = \varphi(x) \tag{4.}$$

Differential-Gleichungen erster Ordnung; die Gleichungen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{x}{a^2}, \tag{5.}$$

$$F(x, y)\frac{d^2y}{dx^2} = G(x, y)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \tag{6.}$$

$$\frac{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = cy\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{7.}$$

sind *Differential-Gleichungen zweiter Ordnung*, und die Gleichung

$$F_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + F_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + F_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + F_n(x) \cdot y = \Phi(x) \tag{8.}$$

ist eine *Differential-Gleichung n^{ter} Ordnung*, und zwar heißt diese Gleichung eine Differential-Gleichung n^{ter} Ordnung und *ersten Grades* oder eine *lineare* Differential-Gleichung n^{ter} Ordnung, weil sie in bezug auf die Größen

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$$

vom ersten Grade ist.

§ 85.

Auflösbarkeit der Differential-Gleichungen erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen. Integrations-Konstante.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 208.)

Die einfachste Form einer gewöhnlichen Differential-Gleichung zwischen zwei Veränderlichen x und y tritt bei der Ermittelung eines jeden Integrals auf, wo die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{1.}$$

gegeben und die Gleichung

$$y = f(x) + C \tag{2.}$$

so zu bestimmen ist, daß Gleichung (1.) daraus durch Differentiation abgeleitet werden kann. Man nennt dann

$$y = \int f'(x)dx = f(x) + C \tag{2a.}$$

das *allgemeine Integral* der vorgelegten Differential-Gleichung. Dabei tritt noch eine beliebige *Integrations-Konstante* C auf, welche man so bestimmen kann, daß y den Wert b annimmt, wenn x gleich a wird. Setzt man nämlich

$$C = b - f(a),$$

so wird

$$y = b + f(x) - f(a) = F(x, a, b). \tag{2b.}$$

Will man das angegebene Verfahren auf eine beliebige Differential-Gleichung erster Ordnung

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{3.}$$

übertragen, so heißt auch dabei die gesuchte Funktion

$$y = F(x, a, b), \tag{4.}$$

welche für $x = a$ den Wert b annimmt, das *allgemeine Integral* der vorgelegten Differential-Gleichung, wenn Gleichung (3.) durch Einsetzen dieses Wertes von y befriedigt wird, wenn also

(5.) $$G[x, F(x, a, b), F'(x, a, b)] = 0$$

wird, was auch x, a und b sein mögen.

Man kann sich zunächst durch ein ***graphisches*** Verfahren davon überzeugen, daß ein solches allgemeines Integral immer existiert, bei welchem man den Anfangswert b von y noch beliebig annehmen darf.

Bringt man nämlich die Gleichung (3.) auf die Form

(6.) $$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y),$$

und beachtet man, daß der gesuchten Gleichung

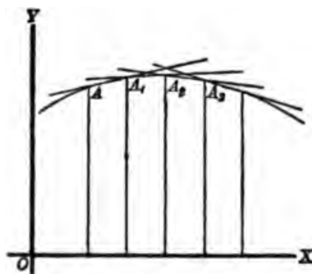
(7.) $$y = F(x, a, b)$$

eine Kurve in der XY-Ebene entspricht, so erkennt man aus der geometrischen Deutung des Differential-Quotienten (vergl. D.-R., Formel Nr. 17 der Tabelle), nämlich aus der Gleichung

(8.) $$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha,$$

daß Gleichung (6.) für jeden Wert von x die Richtung der Kurventangente angibt; denn α ist in Gleichung (8.) der Winkel, welchen die Tangente mit der positiven Richtung der X-Achse bildet. Bewegt sich also ein Punkt P, von einem beliebigen Anfangspunkte A ausgehend, so, daß er in jedem Punkte der durchlaufenen Kurve die durch Gleichung (6.) gegebene Richtung hat, so nennt man diese Kurve „eine *Integral-Kurve*" und die Gleichung zwischen x und y, der eine solche Integral-Kurve genügt, „eine *Integral-Gleichung*" der vorgelegten Differential-Gleichung. Näherungsweise kann man sogar solche Integral-Kurven konstruieren. Ist z. B. A der Anfangspunkt der Kurve (Fig. 141) mit den Koordinaten a und b, so kann man die Tangente im Punkte A konstruieren, weil man aus der Gleichung

Fig. 141.



(9.) $$\operatorname{tg}\alpha = \varphi(a, b)$$

den Winkel α berechnen kann.

Auf dieser Tangente liegt aber noch ein unendlich
her Kurvenpunkt A_1 mit den Koordinaten a_1, b_1. Auch
r diesen Punkt findet man aus der Gleichung

).) $$\operatorname{tg}\alpha_1 = \varphi(a_1, b_1)$$

e Richtung der nächsten Tangente A_1A_2, wobei der Punkt
dem Punkte A_1 unendlich nahe liegen möge, so daß auch
noch ein Punkt der Kurve ist. Jetzt findet man aus
r Gleichung

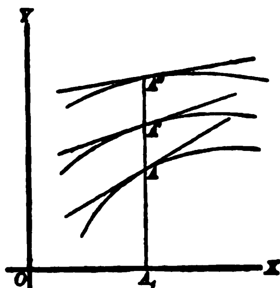
l.) $$\operatorname{tg}\alpha_2 = \varphi(a_2, b_2)$$

e Richtung der Tangente im Punkte A_2. Indem man so
iter fortfährt, findet man beliebig viele Punkte und Tan-
nten der gesuchten Kurve, welche der vorgelegten Diffe-
ntial-Gleichung genügt.

Da man in Wirklichkeit die Punkte A, A_1, A_2,...
iander nicht unendlich nahe legen kann, so liefert dieses
rfahren bei der praktischen Ausführung zwar nur eine
obe Annäherung; in der Vorstellung ist man aber dieser
schränkung nicht unterworfen, so daß man damit be-
esen hat, daß *die vorgelegte Differential-Gleichung immer
ie Integral-Kurve besitzt, bei welcher der Anfangspunkt A
ch beliebig ist.*

Gleichzeitig erkennt man aus
esem *graphischen* Verfahren,
ß die Differential-Gleichung
cht *ein* Integral, sondern *un-
dlich viele* Integrale besitzt.
eil nämlich Gleichung (6.) für
len beliebigen Punkt P mit
n Koordinaten x und y nur
e *Richtung* der Tangente an-
bt, so kann man für die Ab-
isse $x = a$ die Ordinate $y = b$ noch beliebig wählen, d. h.
wird nicht *eine* Kurve geben, welche der vorgelegten
ifferential-Gleichung genügt, sondern *unendlich viele.*

Fig. 142.



Dieses graphische Verfahren kann man auch benutzen,
n die aufeinander folgenden Werte b, b_1, b_2,... von y
ı berechnen, denn aus Gleichung (6.) findet man zunächst

(12.) $$\frac{b_1 - b}{a_1 - a} = \varphi(a, b), \quad \text{oder} \quad b_1 = b + (a_1 - a)\varphi(a, b)$$

und ebenso

(13.) $$b_2 = b_1 + (a_2 - a_1)\varphi(a_1, b_1),$$

usw. Dabei sind allerdings b_1, $b_2, \ldots$ nur *Näherungswerte*, die um so weniger von den wahren Werten abweichen, je kleiner man die Differenzen $a_1 - a$, $a_2 - a_1, \ldots$ nimmt.

Wesentlich ist dabei die Erkenntnis, daß, so lange die Funktion $\varphi(x, y)$ für die betrachteten Werte von x und y eindeutig und stetig bleibt, einer stetigen Aufeinanderfolge der Werte von x auch eine stetige Aufeinanderfolge der zugehörigen Werte von y entspricht. Macht man daher die Voraussetzung, daß die Differential-Gleichung (6.) ein Integral von der Form

(14.) $$y = F(x, a, b)$$

besitzt, so kann man diese *Integral-Funktion*, welche der Kürze wegen mit $f(x)$ bezeichnet werden möge, mit Hilfe des *Taylor*schen Lehrsatzes nach steigenden Potenzen von $x - a$ entwickeln, wobei noch der Anfangswert a ganz beliebig ist. Dies gibt (vergl. D.-R., Formel Nr. 88 der Tabelle)

(15.) $$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R.$$

Bezeichnet man den willkürlichen Wert von y, welcher dem Anfangswerte $x = a$ zugeordnet ist, mit b, so wird

(16.) $$b = f(a).$$

Nur diejenigen Werte von a und b sollen ausgeschlossen werden, für welche die Funktion $\varphi(x, y)$ ***unstetig wird.***

Aus Gleichung (6.), nämlich aus der vorgelegten Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y),$$

folgt dann zunächst

(17.) $$f'(a) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \varphi(a, b).$$

Hierbei ist mit $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$ der Wert von $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet, welchen man erhält, wenn man $x = a$ und $y = b$ setzt. Ebenso möge

$$f^{(n)}(a) = \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_{x=a} \tag{18.}$$

aus $\frac{d^n y}{dx^n}$ hervorgehen, indem man $x = a$, $y = b$ setzt. Aus Gleichung (6.) folgt dann weiter (vergl. D.-R., Formel Nr. 130 der Tabelle)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \varphi_1 + \varphi_2 \cdot \frac{dy}{dx}, \tag{19.}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}, \tag{20.}$$

. . . .

Bezeichnet man der Kürze wegen

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\varphi(x, y)}{dx} \quad \text{mit} \quad \varphi'(x, y),$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d\varphi'(x, y)}{dx} \quad \text{mit} \quad \varphi''(x, y),$$

. . . .

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d\varphi^{(n-2)}(x, y)}{dx} \quad \text{mit} \quad \varphi^{(n-1)}(x, y),$$

so gehen die Gleichungen (19.) und (20.) über in

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)\frac{dy}{dx} = \varphi'(x, y), \tag{19a.}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \varphi'_1(x, y) + \varphi'_2(x, y)\frac{dy}{dx} = \varphi''(x, y), \tag{20a.}$$

. . . .

Daraus findet man

$$f'(a) = \varphi(a, b), \quad f''(a) = \varphi'(a, b), \quad f'''(a) = \varphi''(a, b), \ldots, \tag{21.}$$

d. h. man kann sämtliche Koeffizienten auf der rechten Seite von Gleichung (15.) berechnen.

Die Bedingungen dafür, daß der Rest R für hinreichend große Werte von n beliebig klein wird, sollen erst an einer

späteren Stelle aufgesucht werden, erstens, damit die vorliegende Darstellung nicht unterbrochen wird, und zweitens, weil die Herleitung dieser Bedingungen für den Anfänger möglicherweise noch zu schwer ist. Deshalb möge die Untersuchung der Konvergenz in einem besonderen Paragraphen ausgeführt werden, den der Anfänger nötigenfalls übergehen kann, ohne das Verständnis für das Folgende zu verlieren.

Es möge hier also vorausgesetzt werden, daß die durch das beschriebene Verfahren aufgefundene unendliche Reihe

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \tag{22.}$$

für die betrachteten Werte von x *konvergent* sei; dann kann man auch beweisen, daß

$$y = f(x) \tag{23.}$$

das *allgemeine Integral* der vorgelegten Differential-Gleichung ist, wobei nach Gleichung (16.)

$$f(a) = b$$

sein soll. Setzt man nämlich den gefundenen Wert von y in die Funktion $\varphi(x, y)$ ein und entwickelt dieselbe nach steigenden Potenzen von $x - a$, so wird

$$\varphi(x, y) = \varphi(a, b) + \frac{\varphi'(a, b)}{1!}(x-a) + \frac{\varphi''(a, b)}{2!}(x-a)^2 + \cdots. \tag{24.}$$

Andererseits erhält man aus Gleichung (15.) unter der Voraussetzung, daß für hinreichend große Werte von n der Rest R und die Ableitung des Restes $\frac{dR}{dx}$ beliebig klein werden, indem man die einzelnen Glieder differentiiert,

$$\frac{dy}{dx} = f'(a) + f''(a)\frac{x-a}{1!} + f'''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots. \tag{25.}$$

Nun ist aber nach den Gleichungen (21.)

$$f'(a) = \varphi(a, b), \quad f''(a) = \varphi'(a, b), \quad f'''(a) = \varphi''(a, b), \ldots$$

d. h. die rechte Seite von Gleichung (25.) stimmt Glied für Glied mit der rechten Seite von Gleichung (24.) überein, folglich müssen auch die linken Seiten einander gleich sein; es ist also

(26.) $$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y),$$

was zu beweisen war.

Man kann demnach

$$y = f(x) = F(x, a, b)$$

so als Funktion von x bestimmen, daß einem gegebenen Anfangswerte $x = a$ ein beliebiger Anfangswert $y = b$ zugeordnet ist, und daß diese Funktion der vorgelegten Differential-Gleichung genügt.

Das angegebene Verfahren kann in allen Fällen, wo $\varphi(x, y)$ eine eindeutige, stetige Funktion ist, angewendet werden und wird meist sehr brauchbare Resultate liefern. In vielen Fällen wird es aber möglich sein, das *allgemeine Integral* in *geschlossener* Form, d. h. *ohne* Reihen-Entwickelung durch eine Gleichung

(27.) $$\Phi(x, y, C) = 0$$

darzustellen. Aus dieser *Integral-Gleichung* kann man im allgemeinen die Integrations-Konstante C so bestimmen, daß für $x = a$ die abhängige Veränderliche y gleich b wird; man braucht ja nur die Gleichung

(28.) $$\Phi(a, b, C) = 0$$

nach C aufzulösen. Setzt man einen der gefundenen Werte von C in die Gleichung (27.) ein und entwickelt wieder y nach steigenden Potenzen von $x - a$, so muß man genau dasselbe Resultat wie vorher erhalten, weil in beiden Entwickelungen das erste Glied gleich b wird, und weil sich die Koeffizienten der folgenden Glieder schon aus der vorgelegten Differential-Gleichung

(29.) $$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

ergeben, welche aus der Integral-Gleichung (27.) durch Differentiation hervorgeht. Löst man nämlich Gleichung (27.) nach y auf, berechnet sodann $\frac{dy}{dx}$ und setzt diese Größen in Gleichung (29.) ein, so muß die Gleichung *identisch* be-

friedigt werden, d. h. sie muß für *alle* Werte von x und C gelten. Deshalb kann man auch die Differential-Gleichung (29.) aus den Gleichungen

$$(30.)\qquad \Phi(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

durch Elimination von C herleiten.

Wie man also auch die Integral-Gleichung aufgefunden haben mag, man erhält in allen Fällen dasselbe allgemeine Integral, so lange $\varphi(x, y)$ für die betrachteten Werte von x und y eine eindeutige, stetige Funktion ist.

§ 86.
Auflösbarkeit simultaner Differential-Gleichungen erster Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 209 und 210.)

Durch *eine* Gleichung zwischen x, y, z wird die veränderliche Größe z als Funktion der *beiden* unabhängigen Veränderlichen x und y dargestellt. Will man die beiden Veränderlichen y und z als Funktionen der *einzigen* Veränderlichen x erklären, so braucht man dazu *zwei* Gleichungen zwischen x, y, z. (Vergl. D.-R., Seite 637—639.)

In gleicher Weise würde *eine* Gleichung zwischen x, y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ nicht ausreichen, um *zwei* veränderliche Größen y und z als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x zu erklären. Es müssen also mindestens *zwei* solche Gleichungen gegeben sein, die man *„ein System simultaner Differential-Gleichungen“* nennt, weil sie *gleichzeitig* gelten. Der Einfachheit wegen kann man sich diese Gleichungen auf die Form

$$(1.)\qquad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z)$$

gebracht denken.

Auch hier ergibt sich ohne weiteres die geometrische Deutung und damit die Auflösbarkeit dieser Differential-Gleichungen. Beachtet man nämlich, daß zwei Gleichungen

$F(x, y, z) = 0$ und $G(x, y, z) = 0$ zwischen x, y, z im allgemeinen einer *Raumkurve* entsprechen, und daß nach D.-R., Formel Nr. 230 der Tabelle die Tangente an die Raumkurve im Punkte P die Gleichungen

$$(2.)\qquad y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x), \quad z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x)$$

hat, so erkennt man, daß die Gleichungen (1.) für jeden beliebigen Punkt der Raumkurve die Richtung der Tangente angeben. Den Anfangspunkt A mit den Koordinaten a, b, c kann man noch beliebig annehmen und findet dann aus den Gleichungen (2.) die Gleichungen

$$(3.)\quad b_1 - b = (a_1 - a)\varphi(a, b, c), \quad c_1 - c = (a_1 - a)\psi(a, b, c)$$

die Koordinaten a_1, b_1, c_1 eines benachbarten Punktes A_1 auf dieser Tangente, wobei man noch den Wert von a_1 so nahe an a annehmen darf, wie man will, damit der Punkt A_1 auch noch auf der Raumkurve liegt. Ebenso findet man aus den Gleichungen

$$(4.)\quad b_2 - b_1 = (a_2 - a_1)\varphi(a_1, b_1, c_1), \quad c_2 - c_1 = (a_2 - a_1)\psi(a_1, b_1, c_1)$$

die Koordinaten eines dritten Kurvenpunktes A_2 und kann in dieser Weise beliebig fortfahren.

In Wirklichkeit kann man auch hier die Punkte A, A_1, $A_2, \ldots$ einander nicht unendlich nahe legen und erhält daher bei der praktischen Ausführung dieses Verfahrens nur ein *angenähertes Resultat*; in der Vorstellung ist man aber dieser Beschränkung nicht unterworfen.

Gleichzeitig erkennt man aus dieser Betrachtung, daß die Anfangswerte b und c von y und z, welche dem Anfangswerte $x = a$ entsprechen, noch ganz beliebig sind, so daß das System simultaner Differential-Gleichungen noch zweifach unendlich viele Lösungen besitzt.

Dieses Resultat ergibt sich auch aus der analytischen Behandlung der Aufgabe. Setzt man nämlich

$$(5.)\qquad y = f(x) \quad \text{und} \quad z = g(x),$$

$$(6.)\qquad f(a) = b \quad \text{und} \quad g(a) = c,$$

wobei die Anfangswerte b und c noch ganz beliebig gewählt werden dürfen, so wird nach dem *Taylor*schen Lehrsatze

$$(7.)\quad y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_1,$$

$$(8.)\quad z = g(x) = g(a) + \frac{g'(a)}{1!}(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_2,$$

und man erhält nach den Gleichungen (1.)

$$(9.)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = f'(a) = \varphi(a, b, c),$$

$$(10.)\quad \left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=a} = g'(a) = \psi(a, b, c).$$

Ferner wird

$$(11.)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \varphi'(x, y, z),$$

$$(12.)\quad \frac{d^2z}{dx^2} = g''(x) = \frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \psi'(x, y, z),$$

also

$$(13.)\quad f''(a) = \varphi'(a, b, c),$$

$$(14.)\quad g''(a) = \psi'(a, b, c).$$

In derselben Weise setze man

$$f'''(x) = \frac{d\varphi'(x, y, z)}{dx} = \frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi'}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \varphi''(x, y, z),$$

$$g'''(x) = \frac{d\psi'(x, y, z)}{dx} = \frac{\partial\psi'}{\partial x} + \frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\psi'}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \psi''(x, y, z)$$

und fahre mit der Bildung der höheren Ableitungen fort bis

$$f^{(n)}(x) = \frac{d\varphi^{(n-2)}(x, y, z)}{dx} = \varphi^{(n-1)}(x, y, z),$$

$$g^{(n)}(x) = \frac{d\psi^{(n-2)}(x, y, z)}{dx} = \psi^{(n-1)}(x, y, z);$$

dann findet man

$$(15.)\quad f^{(n)}(a) = \varphi^{(n-1)}(a, b, c),$$

$$(16.)\quad g^{(n)}(a) = \psi^{(n-1)}(a, b, c).$$

Wenn $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ und die partiellen Ableitungen dieser Funktionen für die betrachteten Werte von x, y, z stetig und eindeutig sind, so läßt sich wieder durch funktionen-theoretische Untersuchungen zeigen, daß die Restglieder R_1 und R_2 für hinreichend kleine Werte von $|x - a|$ mit unbegrenzt wachsendem n verschwindend klein werden. Dann sind die Gleichungen (7.) und (8.) die *allgemeinen Integral-Gleichungen* der gegebenen Differential-Gleichungen, denn man kann zeigen, daß die gefundenen Werte von y und z den Gleichungen (1.) genügen, wie man auch die Anfangswerte b und c wählen mag. Setzt man nämlich die gefundenen Werte von y und z in $\varphi(x, y, z)$ und $\psi(x, y, z)$ ein und entwickelt diese Funktionen nach steigenden Potenzen von $x - a$, so wird

$$(17.)\quad \varphi(x, y, z) = \varphi(a, b, c) + \frac{\varphi'(a, b, c)}{1!}(x - a) + \frac{\varphi''(a, b, c)}{2!}(x - a)^2 + \cdots,$$

$$(18.)\quad \psi(x, y, z) = \psi(a, b, c) + \frac{\psi'(a, b, c)}{1!}(x - a) + \frac{\psi''(a, b, c)}{2!}(x - a)^2 + \cdots.$$

Andererseits findet man unter der Voraussetzung, daß die Größen R_1 und R_2, $\frac{dR_1}{dx}$ und $\frac{dR_2}{dx}$ für hinreichend große Werte von n beliebig klein werden, aus den Gleichungen (7.) und (8.) durch Differentiation

$$(19.)\quad \frac{dy}{dx} = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x - a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots,$$

$$(20.)\quad \frac{dz}{dx} = g'(a) + \frac{g''(a)}{1!}(x - a) + \frac{g'''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots.$$

Aus den Gleichungen (13.) bis (16.) erkennt man aber, daß die rechten Seiten von Gleichung (17.) und (19.), desgleichen auch von Gleichung (18.) und (20.) Glied für Glied miteinander übereinstimmen, folglich sind auch die linken Seiten einander gleich, d. h. es wird

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z), \tag{21.}$$

$$\frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z). \tag{22.}$$

Besonders zu beachten ist dabei der Umstand, daß man über *zwei* willkürliche Integrations-Konstante verfügt, indem man die Anfangswerte b und c von y und z noch beliebig wählen darf.

Man kann dieses Verfahren ohne weiteres auf ein System von m simultanen Differential-Gleichungen erster Ordnung mit m Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ der einzigen unabhängigen Veränderlichen x übertragen.

Denkt man sich nämlich die Gleichungen auf die Form

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = \varphi_1(x;\ y_1,\ y_2, \ldots y_m), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \varphi_2(x;\ y_1,\ y_2, \ldots y_m), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_m}{dx} = \varphi_m(x;\ y_1,\ y_2, \ldots y_m) \end{array}\right. \tag{23.}$$

gebracht, so kann man noch die dem Anfangswerte $x = a$ zugeordneten Anfangswerte $b_1, b_2, \ldots b_m$ von $y_1, y_2, \ldots y_m$ beliebig annehmen und dann diese Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ nach steigenden Potenzen von $x - a$ entwickeln. Dies gibt

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = f_1(x) = f_1(a) + \dfrac{f_1'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{f_1''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots, \\ y_2 = f_2(x) = f_2(a) + \dfrac{f_2'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{f_2''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = f_m(x) = f_m(a) + \dfrac{f_m'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{f_m''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots, \end{array}\right. \tag{24.}$$

wobei für $\alpha = 1, 2, \ldots m$

$$f_\alpha(a) = b_\alpha, \quad f_\alpha'(a) = \left(\frac{dy_\alpha}{dx}\right)_{x=a} = \varphi_\alpha(a;\ b_1,\ b_2, \ldots b_m), \tag{25.}$$

$$(26.)\quad f_\alpha''(a) = \left(\frac{d^2y_\alpha}{dx^2}\right)_{x=a} = \left(\frac{d\varphi_\alpha}{dx}\right)_{x=a} = \varphi_\alpha'(a;\ b_1,\ b_2, \ldots b_m),$$

allgemein

$$(27.)\quad f^{(n)}_\alpha(a) = \left(\frac{d^ny_\alpha}{dx^n}\right)_{x=a} = \left(\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}\right)_{x=a} = \varphi_\alpha^{(n-1)}(a;\ b_1, b_2, \ldots b_m);$$

und zwar findet man nach D.-R., Formel Nr. 223 der Tabelle $\frac{d\varphi_\alpha}{dx} = \varphi_\alpha'(x;\ y_1,\ y_2, \ldots y_m)$ aus der Gleichung

$$(28.)\quad \frac{d\varphi_\alpha}{dx} = \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_m}\frac{dy_m}{dx},$$

wobei man noch aus den Gleichungen (23.) die Werte von $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots \frac{dy_m}{dx}$ einsetzen muß. Ebenso findet man aus Gleichung (28.)

$$(29.)\qquad \frac{d^n\varphi_\alpha}{dx^n} = \varphi_\alpha^{(n)}(x;\ y_1, y_2, \ldots y_m),$$

indem man φ_α mit $\varphi_\alpha^{(n-1)}$ vertauscht.

Aus dieser Lösung ergibt sich, daß man bei der Integration noch über m willkürliche Integrations-Konstanten $b_1, b_2, \ldots b_m$ verfügt.

Gelingt es, das System simultaner Differential-Gleichungen in geschlossener Form zu integrieren, so ist es natürlich nicht immer nötig, daß die m Integrations-Konstanten gerade die Anfangswerte $b_1, b_2, \ldots b_m$ von $y_1, y_2, \ldots y_m$ sind. Die Lösung kann auch durch das Gleichungs-System

$$(30.)\qquad \begin{cases} F_1(x;\ y_1, y_2, \ldots y_m;\ c_1, c_2, \ldots c_m) = 0, \\ F_2(x;\ y_1, y_2, \ldots y_m;\ c_1, c_2, \ldots c_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x;\ y_1, y_2, \ldots y_m;\ c_1, c_2, \ldots c_m) = 0 \end{cases}$$

gegeben sein. Ob diese Gleichungen wirklich ein System von *Integral-Gleichungen* sind, kann man ermitteln, indem man aus den m Gleichungen (30.) und aus den m Gleichungen

$$(31.)\qquad \frac{dF_1}{dx} = 0,\quad \frac{dF_2}{dx} = 0, \ldots \frac{dF_m}{dx} = 0$$

die m Größen $c_1, c_2, \ldots c_m$ eliminiert und dann untersucht,

ob das sich daraus ergebende System von m Gleichungen mit den Gleichungen (23.) gleichbedeutend ist. Sollen die Gleichungen (30.) das System der *allgemeinen* (oder *vollständigen*) Integral-Gleichungen sein, so muß es möglich sein, die Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_m$ so zu bestimmen, daß $y_1, y_2, \ldots y_m$ für $x = a$ die beliebig vorgeschriebenen Anfangswerte $b_1, b_2, \ldots b_m$ annehmen.

§ 87.

Auflösbarkeit der Differential-Gleichungen höherer Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 211.)

Auf den soeben erläuterten Fall läßt sich auch die Integration der Differential-Gleichungen höherer Ordnung zurückführen. Ist z. B. die Gleichung

$$(1.)\qquad F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0,$$

oder

$$(2.)\qquad \frac{d^my}{dx^m} = \varphi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)$$

gegeben, so setze man

$$(3.)\qquad \frac{dy}{dx} = y_1,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx} = y_2,\ \ldots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = \frac{dy_{m-2}}{dx} = y_{m-1}.$$

Dadurch kann man die gegebene Differential-Gleichung auf die Form

$$(4.)\qquad \frac{dy_{m-1}}{dx} = \varphi(x;\ y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots y_{m-1})$$

bringen, d. h. man hat die Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung durch ein System von m Differential-Gleichung *erster* Ordnung ersetzt, welche durch die Gleichungen (3.) und (4.) gegeben sind.

Bei der Lösung kann man noch dem Anfangswerte $x = a$ die willkürlichen Anfangswerte $b, b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ von $y, y_1, y_2, \ldots y_{m-1}$ zuordnen.

Daraus ergibt sich für y die Reihen-Entwickelung

$$(5.)\quad y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots,$$

wobei

$$(6.)\quad f(a) = b,\quad f'(a) = b_1,\quad f''(a) = b_2, \ldots f^{(m-1)}(a) = b_{m-1}$$

ganz beliebige Größen sind. Die höheren Ableitungen findet man aus den Gleichungen

$$(7.)\quad \begin{cases} f^{(m)}(a) = \varphi(a, b, b_1, \ldots b_{m-1}), \\ f^{(m+1)}(a) = \varphi'(a, b, b_1, \ldots b_{m-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die hier angedeutete Methode hat den Nachteil, daß sie die Integral-Gleichungen nicht in *endlicher, geschlossener* Form liefert, aber sie gibt den Nachweis, daß bei der Integration einer Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung m beliebige Integrations-Konstanten auftreten.

Die Anzahl der Fälle, wo man die Integral-Gleichungen in endlicher, geschlossener Form auffindet, ist verhältnismäßig klein; in den meisten Fällen führt die Integration der Differential-Gleichungen durch unendliche Reihen auf bisher unbekannte Funktionen.

In den späteren Paragraphen sollen nur einige Aufgaben hervorgehoben werden, bei denen die Lösung in endlicher Form möglich ist.

Zunächst aber soll noch die Untersuchung nachgeholt werden, unter welchen Bedingungen die Integration der Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

durch eine *konvergente* Reihe von der Form

$$y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

möglich ist. Da aber die dazu erforderlichen Beweise etwas schwierig sind, so darf der Anfänger, wie schon oben bemerkt worden ist, den folgenden Paragraphen ohne Nachteil für das Verständnis der späteren Paragraphen über-

§ 88.

Untersuchung der Konvergenz-Bedingungen.

Es sei wieder die Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) \tag{1.}$$

gegeben. Dabei sei $\varphi(x, y)$ für die betrachteten Werte von x und y eine eindeutige und stetige Funktion, die sich mit Hilfe der *Taylor*schen Reihe nach steigenden Potenzen von

$$x - a = h \quad \text{und} \quad y - b = k \tag{2.}$$

entwickeln läßt, so lange

$$|h| < R \quad \text{und} \quad |k| < S$$

bleibt. Nach dieser Voraussetzung wird also

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \varphi(a, b) &+ \left[\frac{\partial\varphi(a, b)}{\partial a}h + \frac{\partial\varphi(a, b)}{\partial b}k\right] \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial\varphi(a, b)}{\partial a}h + \frac{\partial\varphi(a, b)}{\partial b}k\right]^{(2)} \\ &+ \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial\varphi(a, b)}{\partial a}h + \frac{\partial\varphi(a, b)}{\partial b}k\right]^{(3)} + \cdots \text{*)} \end{aligned} \tag{3.}$$

eine konvergente Reihe, in der alle Glieder gleicher Dimension zu einer Gruppe vereinigt sind. Es wird z. B.

$$\begin{aligned} \frac{1}{p!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}h + \frac{\partial\varphi}{\partial b}k\right)^{(p)} = \frac{1}{p!}\Big[&\frac{\partial^p\varphi}{\partial a^p}h^p + \binom{p}{1}\frac{\partial^p\varphi}{\partial a^{p-1}\partial b}h^{p-1}k \\ &+ \binom{p}{2}\frac{\partial^p\varphi}{\partial a^{p-2}\partial b^2}h^{p-2}k^2 + \cdots\Big], \end{aligned} \tag{4.}$$

oder

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}h + \frac{\partial\varphi}{\partial b}k\right)^{(p)} = \frac{1}{p!}\sum_{n=0}^{n=p}\binom{p}{n}\frac{\partial^p\varphi}{\partial a^{p-n}\partial b^n}h^{p-n}k^n. \tag{5.}$$

---

*) Hierbei soll der Wert von $\frac{\partial^m\varphi(x, y)}{\partial x^m}$ für $x = a$, $y = b$ der Kürze wegen mit $\frac{\partial^m\varphi(a, b)}{\partial a^m}$, der Wert von $\frac{\partial^n\varphi(x, y)}{\partial y^n}$ für $x = a$, $y = b$ mit $\frac{\partial^n\varphi(a, b)}{\partial b^n}$ und der Wert von $\frac{\partial^{m+n}\varphi(x, y)}{\partial x^m\,\partial y^n}$ für $x = a$, $y = b$ mit $\frac{\partial^{m+n}\varphi(a, b)}{\partial a^m\,\partial b^n}$ bezeichnet werden.

Setzt man

$$p = m + n, \quad \text{also} \quad p - n = m \tag{6.}$$

und beachtet, daß

$$\begin{aligned} \frac{1}{p!}\binom{p}{n} &= \frac{1}{p!}\,\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!} \\ &= \frac{1}{p!}\,\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1).m!}{m!\,n!} \\ &= \frac{1}{p!}\,\frac{p(p-1)\ldots(m+1)m(m-1)\ldots 3.2.1}{m!\,n!} \\ &= \frac{1}{p!}\,\frac{p!}{m!\,n!} = \frac{1}{m!\,n!} \end{aligned} \tag{7.}$$

ist, so erkennt man, daß ein beliebiges Glied der Reihe die Form

$$\frac{1}{m!\,n!}\,\frac{\partial^{m+n}\varphi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n}h^m k^n$$

hat.

Da in jeder konvergenten Reihe die Glieder immer kleiner und kleiner und schließlich unendlich klein werden müssen, so wird

$$\lim_{m+n=\infty} \frac{1}{m!\,n!}\,\frac{\partial^{m+n}\varphi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n}R^m.S^n = 0, \tag{8.}$$

d. h. es wird, wenn man mit δ eine beliebig kleine Größe bezeichnet und $m + n$ hinreichend groß macht, z. B.

$$m + n \geqq q,$$

$$\frac{1}{m!\,n!}\left|\frac{\partial^{m+n}\varphi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n}\right| R^m.S^n < \delta. \tag{9.}$$

Die Anzahl der Glieder in der durch Gleichung (3.) gegebenen Entwickelung von $\varphi(x, y)$ nach steigenden Potenzen von h und k, bei denen $m + n < q$ ist, wird

$$1 + 2 + 3 + \cdots + q = \frac{q(q+1)}{2}. \tag{10.}$$

Nun sei unter den $\frac{q(q+1)}{2}$ Gliedern

$$\frac{1}{m!\,n!}\left|\frac{\partial^{m+n}\varphi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n}\right| R^m.S^n,$$

bei denen $m + n < q$ ist, das größeste gleich G, wobei man für hinreichend große Werte von q annehmen darf,

daß δ kleiner ist als G; dann wird nach Ungleichung (9.) für *alle* Werte von m und n

$$\frac{1}{m!\,n!}\left|\frac{\partial^{m+n}\varphi(a,b)}{\partial a^m \partial b^n}\right| R^m . S^n \leqq G,$$

oder

$$(11.)\qquad \left|\frac{\partial^{m+n}\varphi(a,b)}{\partial a^m \partial b^n}\right| \leqq \frac{m!\,n!\,G}{R^m . S^n}.$$

Dies gibt den

Satz 1. *Ist $\varphi(x, y)$ für die betrachteten Werte von x und y eine eindeutige und stetige Funktion, die sich in eine konvergente, nach steigenden Potenzen von*

$$x - a = h \quad \textit{und} \quad y - b = k$$

fortschreitende Reihe entwickeln läßt, so lange $|h| < R$ und $|k| < S$ ist, ist ferner unter den $\frac{q(q+1)}{2}$ Gliedern

$$|\varphi(a,b)|, \quad \left|\frac{\partial\varphi(a,b)}{\partial a}\right| R, \quad \left|\frac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b}\right| S, \ldots$$

$$\frac{1}{m!\,n!}\left|\frac{\partial^{m+n}\varphi(a,b)}{\partial a^m \partial b^n}\right| R^m . S^n$$

für $m + n < q$ das größeste gleich G, so ist, wenn man q hinreichend groß macht, für alle Werte von m und n

$$\left|\frac{\partial^{m+n}\varphi(a,b)}{\partial a^m \partial b^n}\right| \leqq \frac{m!\,n!\,G}{R^m . S^n}.$$

Diesem Satze kann man noch eine andere Fassung geben. Es sei

$$(12.)\qquad \Phi(x,y) = \frac{G}{\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)^2 \left(1 - \frac{y-b}{S}\right)},$$

dann wird

$$(13.)\qquad \frac{\partial^{m+n}\Phi(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{(m+1)!\,n!\,G}{R^m . S^n \left(1 - \frac{x-a}{R}\right)^{m+2} \left(1 - \frac{y-b}{S}\right)^{n+1}},$$

also für $x = a$, $y = b$

$$(14.)\qquad \frac{\partial^{m+n}\Phi(a,b)}{\partial a^m \partial b^n} = \frac{(m+1)!\,n!\,G}{R^m . S^n},$$

folglich geht Ungleichung (11.) über in

$$(15.)\quad \left|\frac{\partial^{m+n}\varphi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n}\right| \leqq \frac{1}{m+1}\,\frac{\partial^{m+n}\Phi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n} < \frac{\partial^{m+n}\Phi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n}.$$

Nun läßt sich die Differential-Gleichung

$$(16.)\quad \frac{dy}{dx} = \Phi(x, y) = \frac{G}{\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)^2\left(1 - \frac{y-b}{S}\right)}$$

sehr leicht integrieren, wenn man sie auf die Form

$$(17.)\quad \left(1 - \frac{y-b}{S}\right)dy = \frac{Gdx}{\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)^2}$$

bringt und beide Seiten dieser Gleichung integriert. Beachtet man dabei noch, daß $y = b$ sein soll für $x = a$, so findet man

$$(18.)\quad y - b - \frac{(y-b)^2}{2S} = \frac{G(x-a)}{1 - \frac{x-a}{R}},$$

oder

$$(19.)\quad (y-b)^2 - 2S(y-b) + \frac{2SG(x-a)}{1 - \frac{x-a}{R}} = 0.$$

Dies gibt

$$(20.)\quad y - b = S \pm \sqrt{S^2 - \frac{2SG(x-a)}{1 - \frac{x-a}{R}}}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man für $x = a$

$$y - b = S \pm S,$$

folglich muß man in Gleichung (20.) das untere Zeichen nehmen, damit $y = b$ wird für $x = a$. Es ist also

$$(21.)\quad y = b + S - \left(1 - \frac{x-a}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{S^2 - \frac{S(x-a)}{R}(S + 2GR)}$$

$$= b + S - S\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{R} + \frac{2G}{S}\right)(x-a)}.$$

Setzt man jetzt

$$(22.)\quad \frac{1}{R} + \frac{2G}{S} = \frac{1}{g},\quad \text{also}\quad g = \frac{RS}{S + 2GR} = R - \frac{2GR^2}{S + 2GR},$$

so erkennt man, daß $g < R$ wird. Gleichung (21.) geht dadurch über in

(23.) $y = b + S - S\left(1 - \frac{x-a}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x-a}{R}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Die Ausdrücke

$$\left(1 - \frac{x-a}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \left(1 - \frac{x-a}{R}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

kann man mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes nach steigenden Potenzen von $x - a$ entwickeln, und zwar bleiben die Reihen, da $g < R$ ist, *unbedingt* konvergent, wenn

$$|x-a| < g$$

ist. Deshalb kann man auch nach D.-R., Formel Nr. 117 der Tabelle das Produkt dieser beiden Reihen bilden und erhält

(24.) $y = b + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \cdots$.

Auch diese Reihe ist dann *unbedingt* konvergent, wenn $|x-a| < g$ ist.

Die Koeffizienten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ dieser konvergenten Reihe kann man aber auch nach den Angaben in § 85 finden, indem man

(25.) $$y = F(x), \quad \text{also} \quad b = F(a)$$

setzt und nach dem *Taylor*schen Lehrsatze entwickelt. Dies gibt

(26.) $y = b + \frac{F'(a)}{1!}(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{F'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$,

wobei

(27.) $$\begin{cases} F'(a) = \Phi(a, b) = G, \\ F''(a) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)_{x=a,\, y=b} \\ F'''(a) = \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}\right]_{x=a,\, y=b}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ist. Die Bildung dieser Ausdrücke wird noch dadurch erleichtert, daß nach Gleichung (14.)

$$\frac{\partial^{m+n}\Phi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n} = \frac{(m+1)!\, n!\, G}{R^m . S^n}$$

ist. Gleichzeitig erkennt man daraus, daß die partiellen Ableitungen von $\Phi(x, y)$ für $x = a$, $y = b$ sämtlich *reell* und *positiv* sind. Deshalb sind auch die Größen

$$\frac{F'(a)}{1!} = A_1, \quad \frac{F''(a)}{2!} = A_2, \quad \frac{F'''(a)}{3!} = A_3, \ldots \tag{28.}$$

sämtlich *reell* und *positiv*.

Vergleicht man mit der soeben gelösten Differential-Gleichung erster Ordnung die allgemeinere

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y), \tag{29.}$$

bei welcher für $\varphi(x, y)$ die in Satz 1 angegebenen Voraussetzungen gelten, so findet man nach Gleichung (22.) in § 85

$$y = b + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots, \tag{30.}$$

wobei nach den Gleichungen (19a.), (20a.) und (21.) in § 85

$$\begin{cases} f(a) = b, \\ f'(a) = \varphi(a, b), \\ f''(a) = \varphi'(a, b) = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=a,\, y=b}, \\ f'''(a) = \varphi''(a, b) = \left[\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \dfrac{\partial\varphi}{dy}\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=a,\, y=b}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{31.}$$

wird. Daß auch diese Reihenentwicklung für $|x - a| < g$ *unbedingt* konvergent ist, ergibt sich unmittelbar aus Ungleichung (15.), nämlich aus

$$\left|\frac{\partial^{m+n}\varphi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n}\right| < \frac{\partial^{m+n}\Phi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n},$$

denn deshalb wird auch

$$|f'(a)| < F'(a), \quad |f''(a)| < F''(a), \quad |f'''(a)| < F'''(a), \ldots, \tag{32.}$$

d. h. die in Gleichung (30.) dargestellte Reihe konvergiert *unbedingt* für alle Werte von $x - a$, für welche die in Gleichung (26.) dargestellte Reihe konvergiert. Dies gibt

Satz 2. *Ist* $\varphi(x, y)$ *für die betrachteten Werte von* x *und* y *eine eindeutige und stetige Funktion, die sich in eine konvergente, nach steigenden Potenzen von* $x - a = h$ *und* $y - b = k$ *fortschreitende Reihe entwickeln läßt, so lange* $|h| < R$ *und* $|k| < S$ *ist, ist ferner für hinreichend große Werte von* q *und für* $m + n < q$ *unter den* $\frac{q(q+1)}{2}$ *Gliedern* $\frac{1}{m!\,n!}\left|\frac{\partial^{m+n}\varphi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n}\right| R^m . S^n$ *das größeste gleich* G, *so konvergiert die Reihe*

$$y = b + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots$$

unbedingt, so lange $|x - a| < g = \frac{R . S}{S + 2G . R}$ *bleibt, und stellt das allgemeine Integral der Differential-Gleichung*

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

dar.

In ähnlicher Weise kann man auch die Existenz allgemeiner Integral-Gleichungen nachweisen, wenn ein System von m simultanen Differential-Gleichungen erster Ordnung, also m Gleichungen zwischen $x, y_1, y_2, \ldots y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots \frac{dy_m}{dx}$ gegeben sind.

Auf diesen Fall läßt sich dann auch, wie schon ausgeführt wurde, die Integration der Differential-Gleichungen höherer Ordnung zurückführen.

§ 89.

Trennung der Variabeln.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 212.)

Ist die Differential-Gleichung erster Ordnung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1.}$$

gegeben, so löse man sie in bezug auf $\frac{dy}{dx}$ auf, d. h. man bringe sie auf die Form

(2.) $$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

oder

(2a.) $$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Ist nun hierbei $M(x, y)$ eine Funktion X der einzigen Veränderlichen x und $N(x, y)$ eine Funktion Y der einzigen Veränderlichen y, ist also

(3.) $$M(x, y) = X, \quad N(x, y) = Y,$$

so kann man sofort das *allgemeine Integral*

(4.) $$\int X dx + \int Y dy = C$$

bilden. Hat die Differential-Gleichung diese Form noch nicht, so wird man sie auf diese Form zu bringen suchen. Das Verfahren, welches man dabei ausführt, nennt man „*Integration durch Trennung der Variabeln*“. Ist z. B. die Differential-Gleichung

(5.) $$X_1 Y_1 dx + X_2 Y_2 dy = 0$$

gegeben, wo X_1 und X_2 Funktionen der einzigen Veränderlichen x, Y_1 und Y_2 Funktionen der einzigen Veränderlichen y sind, so dividiert man die linke Seite von Gleichung (5.) durch $X_2 Y_1$ und erhält

(6.) $$\frac{X_1}{X_2} dx + \frac{Y_2}{Y_1} dy = 0,$$

also

(7.) $$\int \frac{X_1}{X_2} dx + \int \frac{Y_2}{Y_1} dx = C.$$

Da ein Integral von der Form $\int X dx$ als der Flächeninhalt einer ebenen Figur betrachtet werden kann (deren Begrenzung in Formel Nr. 4 der Tabelle angegeben ist), so nennt man hier, wo von der Integration der Differential-Gleichungen die Rede ist, die Ermittelung eines solchen Integrals eine „*Quadratur*“.

Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

(8.) $$ydx - xdy = 0$$

integrieren.

Auflösung. Indem man die linke Seite von Gleichung (8.) durch $-xy$ dividiert, erhält man

(9.) $$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0,$$

$$\int\frac{dy}{y} - \int\frac{dx}{x} = \ln y - \ln x = \ln C,$$

(10.) $$y = Cx.$$

Die Integrations-Konstante ist in diesem Falle mit $\ln C$ bezeichnet worden, damit der Übergang von den Logarithmen zu den Numeri erleichtert wird.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

(11.) $$(x^2 - a^2)dy - ydx = 0$$

integrieren.

Auflösung. Indem man die linke Seite von Gleichung (11.) durch $(x^2 - a^2)y$ dividiert, erhält man

(12.) $$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x^2 - a^2} = 0,$$

also nach Formeln Nr. 29a der Tabelle

$$2a\int\frac{dy}{y} - 2a\int\frac{dx}{x^2 - a^2} = 2a\ln y - \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = \ln C,$$

(13.) $$y^{2a} = C\frac{x-a}{x+a}.$$

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

(14.) $$x^2dy + (y - a)dx = 0$$

integrieren.

Auflösung. Indem man die linke Seite von Gleichung (14.) durch $x^2(y - a)$ dividiert, erhält man

(15.) $$\frac{dy}{y-a}+\frac{dx}{x^2}=0,$$

$$\int\frac{dy}{y-a}+\int\frac{dx}{x^2}=\ln(y-a)-\frac{1}{x}=\ln C,$$

$$\ln(y-a)=\ln C+\frac{1}{x}=\ln C+\ln(\sqrt[x]{e}),$$

(16.) $$y-a=C\,.\,\sqrt[x]{e}.$$

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Gleichung

(17.) $$xydx-(a+x)(b+y)dy=0$$

integrieren.

Auflösung. Indem man die linke Seite von Gleichung (17.) durch $y(a+x)$ dividiert, erhält man

(18.) $$\frac{xdx}{a+x}-\frac{(b+y)dy}{y}=\left(1-\frac{a}{a+x}\right)dx-\left(1+\frac{b}{y}\right)dy=0,$$

$$\int\left(1-\frac{a}{a+x}\right)dx-\int\left(1+\frac{b}{y}\right)dy=x-a\ln(a+x)-y-b\ln y=C,$$

oder

(19.) $$x-y=C+\ln[(a+x)^a\,.\,y^b].$$

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Gleichung

(20.) $$x^3ydx+ydx+xy^2dy-xdy=0$$

integrieren.

Auflösung. Man kann die vorgelegte Differential-Gleichung zunächst auf die Form

$$(x^3+1)ydx+x(y^2-1)dy=0$$

bringen und dann durch xy dividieren. Dadurch erhält man

(21.) $$\frac{(x^3+1)dx}{x}+\frac{(y^2-1)dy}{y}=0,$$

$$\int\left(x^2+\frac{1}{x}\right)dx+\int\left(y-\frac{1}{y}\right)dy=C,$$

oder

(22.) $$\frac{x^3}{3}+\ln x+\frac{y^2}{2}-\ln y=C.$$

Aufgabe 6. Man soll die Differential-Gleichung

(23.) $$(1 + x^2)dy - \sqrt{1 - y^2}\,dx = 0$$

integrieren.

Auflösung. Indem man die linke Seite von Gleichung (23.) durch $(1 + x^2)\sqrt{1 - y^2}$ dividiert, erhält man

(24.) $$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{dx}{1 + x^2} = 0,$$

also

(25.) $$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} - \int\frac{dx}{1 + x^2} = \arcsin y - \operatorname{arc\,tg} x = C.$$

Aufgabe 7. Man soll die Differential-Gleichung

(26.) $$xdy - ydx = dy\sqrt{1 + x^2} + dx\sqrt{1 + y^2}$$

integrieren.

Auflösung. Man bringt die Differential-Gleichung zunächst auf die Form

(27.) $$(x - \sqrt{1 + x^2})dy - (y + \sqrt{1 + y^2})dx = 0$$

und dividiert die linke Seite dieser Gleichung durch $(x - \sqrt{1 + x^2})$ und durch $(y + \sqrt{1 + y^2})$; dies gibt

(28.) $$\frac{dy}{y + \sqrt{1+y^2}} - \frac{dx}{x - \sqrt{1+x^2}} = 0,$$

oder

(29.) $$(\sqrt{1 + y^2} - y)dy + (\sqrt{1 + x^2} + x)dx = 0,$$

folglich findet man nach Formel Nr. 129 der Tabelle

$$\frac{y}{2}\sqrt{1 + y^2} + \frac{1}{2}\ln(y + \sqrt{1 + y^2}) - \frac{y^2}{2}$$

$$+ \frac{x}{2}\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}C,$$

oder

(30.) $$x^2 - y^2 + x\sqrt{1 + x^2} + y\sqrt{1 + y^2}$$
$$+ \ln[(x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2})] = C.$$

Aufgabe 8. Man soll die Differential-Gleichung

(31.) $$\sin x \sin y\, dy = \cos x \cos y\, dx$$

integrieren.

Auflösung. Indem man Gleichung (31.) durch $-\sin x \cos y$ dividiert, erhält man

$$\frac{\cos x dx}{\sin x} - \frac{\sin y dy}{\cos y} = 0, \tag{32.}$$

also durch Integration

$$\ln(\sin x) + \ln(\cos y) = \ln C,$$

oder

$$\sin x \cos y = C. \tag{33.}$$

Aufgabe 9. Man soll alle Kurven bestimmen, bei denen die Subtangente die konstante Länge a hat.

Auflösung. Da die Subtangente einer Kurve $St = y\frac{dx}{dy}$ ist, so erhält man der Reihe nach die Gleichungen

$$y\frac{dx}{dy} = a, \tag{34.}$$

$$dx = \frac{ady}{y}, \tag{35.}$$

$$x - x_0 = a \ln y, \tag{36.}$$

oder

$$y = e^{\frac{x - x_0}{a}}. \tag{37.}$$

Das ist die Gleichung der *logarithmischen Linie.*

Aufgabe 10. Man soll alle Kurven bestimmen, bei denen die Subtangente n-mal so groß ist wie die zugehörige Abszisse.

Auflösung. Für die gesuchten Kurven wird

$$y\frac{dx}{dy} = nx, \tag{38.}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{ndy}{y}, \tag{39.}$$

$$\ln x + \ln(2p) = n \ln y, \tag{40.}$$

wobei man die Integrations-Konstante mit $\ln(2p)$ bezeichnet hat. Dies gibt

$$y^n = 2px, \tag{41.}$$

also die Gleichung der *verallgemeinerten Parabel.*

Für $n = 2$ stellt die Gleichung die *gewöhnliche Parabel* dar, für welche die Subtangente doppelt so groß ist wie die Abszisse.

Aufgabe 11. Man soll alle Kurven bestimmen, bei denen die Polar-Subnormale die konstante Länge a hat.

Auflösung. Die Polar-Subnormale ist $Sn = \frac{dr}{d\varphi}$, folglich wird für die gesuchten Kurven

(42.) $$\frac{dr}{d\varphi} = a, \quad \text{oder} \quad dr = a \, . \, d\varphi,$$

(43.) $$r = a(\varphi - \varphi_0).$$

Die gesuchten Kurven sind also *Archimedische Spiralen.*

Aufgabe 12. Man soll alle Kurven bestimmen, bei denen die Polar-Subtangente die konstante Länge a hat.

Auflösung. Die Polar-Subtangente ist $St = \frac{r^2 d\varphi}{dr}$, folglich wird für die gesuchten Kurven

(44.) $$\frac{r^2 d\varphi}{dr} = a, \quad \text{oder} \quad d\varphi = \frac{adr}{r^2},$$

(45.) $$\varphi - \varphi_0 = -\frac{a}{r}, \quad \text{oder} \quad r(\varphi - \varphi_0) = -a.$$

Die gesuchten Kurven sind also *hyperbolische Spiralen.*

Aufgabe 13. Man soll alle Kurven bestimmen, welche mit der X-Achse, vom Nullpunkt an gerechnet, und mit der Ordinate QP ein Flächenstück OQP begrenzen, dessen Inhalt der n^{te} Teil des Rechtecks xy ist.

Auflösung. Da das von der Kurve begrenzte Flächenstück den Inhalt

(46.) $$F = \int_0^x y dx$$

hat, so erhält man für die gesuchten Kurven die Gleichung

(47.) $$xy = n\int_0^x y dx, \quad \text{oder} \quad xdy + ydx = nydx,$$

$$xdy = (n - 1)ydx,$$

(48.) $$\frac{dy}{y} = (n-1)\frac{dx}{x},$$

$$\ln y = (n-1)\ln x + \ln C = \ln(Cx^{n-1}),$$

(49.) $$y = Cx^{n-1}.$$

Die gesuchten Kurven sind wieder *verallgemeinerte Parabeln.*

Aufgabe 14. Man soll eine Kurve bestimmen, deren Tangente die konstante Länge a hat.

Auflösung. Die Tangente einer Kurve ist $T = y\frac{ds}{dy}$, folglich erhält man

(50.) $$y\frac{ds}{dy} = a, \quad \text{oder} \quad y^2(dx^2 + dy^2) = a^2dy^2,$$

$$y^2dx^2 = (a^2 - y^2)dy^2, \quad \pm\, ydx = \sqrt{a^2 - y^2}\,.\,dy,$$

(51.) $$\pm\, dx = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}dy = \frac{a^2dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}} - \frac{ydy}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung integriert, findet man nach den Formeln 37 und 31 der Tabelle

(52.) $$\pm\,(x - x_0) = \sqrt{a^2 - y^2} - a\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right).$$

Die Kurve, welche dieser Gleichung entspricht, wird „*Traktrix* von *Huyghens*“ genannt.

Aufgabe 15. Man soll alle Kurven bestimmen, bei denen der Flächeninhalt eines jeden Sektors zu der Differenz der Quadrate der den Sektor begrenzenden Leitstrahlen proportional ist.

Auflösung. Nennt man die begrenzenden Leitstrahlen r_1 und r und die zugehörigen Argumente φ_1 und φ, so wird nach Formel Nr. 134 der Tabelle der Flächeninhalt des Sektors

(53.) $$S = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi} r^2 d\varphi,$$

so daß für die gesuchten Kurven die Gleichung

(54.) $$n(r^2 - r_1^2) = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi} r^2 d\varphi$$

gilt. Betrachtet man dabei r und φ als veränderlich, während r_1 und φ_1 konstant sind, so folgt aus Gleichung (54.) durch Differentiation

(55.) $$4nrdr = r^2 d\varphi,$$

(56.) $$4n\frac{dr}{r} = d\varphi,$$

$$4n \ln r = \varphi - \varphi_0,$$

(57.) $$r^{4n} = e^{\varphi - \varphi_0}, \quad r = e^{\frac{\varphi - \varphi_0}{4n}},$$

oder, wenn man

(58.) $$\frac{1}{4n} = a, \quad e^{-a\varphi_0} = C$$

setzt,

(59.) $$r = e^{a(\varphi - \varphi_0)}, \quad \text{oder} \quad r = C \,.\, e^{a\varphi}.$$

Dies ist die Gleichung der *logarithmischen Spirale.*

§ 90.

Integration der Gleichungen von der Form $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 213.)

In den meisten Fällen wird die Trennung der Variabeln bei der Differential-Gleichung

(1.) $$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

durch einfache Multiplikation oder Division nicht möglich sein. Mitunter wird aber die Differential-Gleichung durch passende Substitution so umgeformt werden können, daß dann die Trennung der Variabeln durchführbar ist.

Sind z. B. $M(x, y)$ und $N(x, y)$ beide *homogene Funktionen m^{ten} Grades,* wird also

(2.) $$M(tx, ty) = t^m \,.\, M(x, y), \quad N(tx, ty) = t^m \,.\, N(x, y),$$

so kann man die Trennung der Variabeln in folgender Weise ermöglichen.

Aus den Gleichungen (2.) findet man für $t = \frac{1}{x}$

(3.) $$M\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{M(x, y)}{x^m}, \quad N\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{N(x, y)}{x^m}.$$

Dividiert man also Gleichung (1.) durch x^m und bezeichnet $-\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)}$ mit $f\left(\frac{y}{x}\right)$, so erhält man

$$M\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + N\left(1, \frac{y}{x}\right)dy = 0, \tag{4.}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{5.}$$

Setzt man jetzt

$$\frac{y}{x} = z, \quad \text{also} \quad y = xz, \tag{6.}$$

so wird

$$dy = zdx + xdz, \tag{7.}$$

und Gleichung (5.) geht über in

$$z + x\frac{dz}{dx} = f(z); \tag{8.}$$

dies gibt

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}; \tag{9.}$$

die Trennung der Variabeln ist also durchgeführt.

Man hätte natürlich auch mit demselben Rechte $x = yz$ setzen können und dadurch eine Differential-Gleichung zwischen y und z erhalten, bei der sich ebenfalls die Trennung der Variabeln ohne weiteres ausführen läßt.

Beispiele.

In den folgenden Aufgaben ist das angegebene Verfahren anwendbar, weil $M(x, y)$ und $N(x, y)$ jedesmal *homogene* Funktionen gleich hohen Grades sind.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(x + y)dx + xdy = 0 \tag{10.}$$

integrieren.

Auflösung. Indem man $y = xz$ setzt, findet man

$$(x + xz)dx + x(zdx + xdz) = 0,$$

oder, wenn man durch x dividiert und ordnet,

$$(1 + 2z)dx + xdz = 0. \tag{11.}$$

Jetzt ergibt sich durch Trennung der Variabeln

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{1 + 2z} = 0 \tag{12.}$$

und durch Integration

$$2\ln x + \ln(1 + 2z) = \ln C,$$

also

$$x^2(1 + 2z) = C, \quad \text{oder} \quad x(x + 2y) = C. \tag{13.}$$

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(x + y)dx + (y - x)dy = 0 \tag{14.}$$

integrieren.

Auflösung. Indem man $y = xz$ setzt, findet man

$$(x + xz)dx + (xz - x)(zdx + xdz) = 0,$$

oder, wenn man durch x dividiert und ordnet,

$$(1 + z^2)dx + (z - 1)xdz = 0. \tag{15.}$$

Jetzt ergibt sich durch Trennung der Variabeln

$$\frac{dx}{x} + \frac{(z - 1)dz}{1 + z^2} = 0 \tag{16.}$$

und durch Integration

$$\ln x + \tfrac{1}{2}\ln(1 + z^2) - \operatorname{arctg} z = \ln C,$$

oder

$$\ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{C}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right). \tag{17.}$$

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$xdy - ydx = dx\sqrt{x^2 + y^2} \tag{18.}$$

integrieren.

Auflösung. Indem man $y = xz$ setzt, findet man

$$x(zdx + xdz) - xzdx = x^2dz = dx\sqrt{x^2 + x^2z^2},$$

oder, wenn man durch x dividiert,

(19.) $$xdz = dx\sqrt{1 + z^2},$$
also durch Trennung der Variabeln

(20.) $$\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{x}$$
und durch Integration
$$\ln(z + \sqrt{1 + z^2}) = \ln x + \ln C,$$
$$z + \sqrt{1 + z^2} = Cx,$$
$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2, \quad \text{oder} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2 - y.$$
Dies gibt
$$x^2 + y^2 = C^2x^4 - 2Cx^2y + y^2,$$
oder

(21.) $$1 + 2Cy - C^2x^2 = 0.$$

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Gleichung

(22.) $$(2x^3 - 135y^3)dx + 81xy^2dy = 0$$
integrieren.

Auflösung. Indem man $y = xz$ setzt, findet man
$$(2x^3 - 135x^3z^3)dx + 81x^3z^2(xdz + zdx) = 0,$$
oder, wenn man durch x^3 dividiert,
$$(2 - 135z^3)dx + 81z^2(xdz + zdx) = 0,$$
(23.) $$(2 - 54z^3)dx + 81z^2xdz = 0.$$

Durch Trennung der Variabeln erhält man daher

(24.) $$\frac{2dx}{x} = \frac{81z^2dz}{27z^3 - 1}$$
und durch Integration
$$\ln(x^2) = \ln(27z^3 - 1) - \ln C,$$
also

(25.) $$Cx^2 = 27z^3 - 1, \quad \text{oder} \quad Cx^5 = 27y^3 - x^3.$$

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Gleichung

(26.) $$(8y + 10x)dx + (5y + 7x)dy = 0$$
integrieren.

Auflösung. Indem man $y = xz$ setzt, erhält man
$$(8xz + 10x)dx + (5xz + 7x)(xdz + zdx) = 0,$$
oder, wenn man durch x dividiert und ordnet,

(27.) $$(5z^2 + 15z + 10)dx + (5z + 7)xdz = 0.$$

Jetzt ergibt sich durch Trennung der Variabeln

(28.) $$\frac{5dx}{x} = -\frac{(5z + 7)dz}{z^2 + 3z + 2} = -\frac{2dz}{z + 1} - \frac{3dz}{z + 2}$$

und durch Integration

$$5\ln x = \ln C - 2\ln(z + 1) - 3\ln(z + 2),$$

also

(29.) $x^5(z + 1)^2(z + 2)^3 = C$, oder $(x + y)^2(2x + y)^3 = C$.

Aufgabe 6. Man soll die Differential-Gleichung

(30.) $$(a\sqrt{x^2 + y^2} - cx)dx + (b\sqrt{x^2 + y^2} - cy)dy = 0$$

integrieren.

Auflösung. Indem man $y = xz$ setzt, erhält man

$$(a\sqrt{x^2 + x^2z^2} - cx)dx + (b\sqrt{x^2 + x^2z^2} - cxz)(xdz + zdx) = 0,$$

oder, wenn man durch x dividiert und ordnet,

(31.) $$[(a + bz)\sqrt{1 + z^2} - c(1 + z^2)]dx + x(b\sqrt{1 + z^2} - cz)dz = 0.$$

Jetzt ergibt sich durch Trennung der Variabeln

(32.) $$\frac{dx}{x} + \frac{(b\sqrt{1 + z^2} - cz)dz}{\sqrt{1 + z^2}(a + bz - c\sqrt{1 + z^2})} = 0,$$

oder

(32a.) $$\frac{dx}{x} + \frac{\left(b - \frac{cz}{\sqrt{1 + z^2}}\right)dz}{a + bz - c\sqrt{1 + z^2}} = 0.$$

Da in dem zweiten Gliede der Zähler gerade das Differential des Nenners ist, so erhält man durch Integration

$$\ln x + \ln(a + bz - c\sqrt{1 + z^2}) = \ln C,$$

also

$$x(a + bz - c\sqrt{1 + z^2}) = C,$$

oder

(33.) $$ax + by - c\sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

Weit leichter wird die Lösung dieser Aufgabe durch die Substitution

(34.) $$x^2 + y^2 = r^2, \quad xdx + ydy = rdr,$$

denn dadurch geht Gleichung (30.) über in

$$ardx + brdy - crdr = 0,$$

oder

(35.) $$adx + bdy - cdr = 0,$$

woraus man wieder in Übereinstimmung mit Gleichung (33.)

$$ax + by - cr = C$$

findet.

Aufgabe 7. Man soll alle Kurven bestimmen, bei denen die Summe der Abszisse x und des Radiusvektor r gleich der Subtangente ist.

Auflösung. Die Subtangente einer Kurve ist bekanntlich $y\frac{dx}{dy}$, folglich gilt für die gesuchten Kurven die Differential-Gleichung

$$y\frac{dx}{dy} = x + r,$$

oder

(36.) $$ydx = (x + \sqrt{x^2 + y^2})dy.$$

Hier wird man zweckmäßigerweise $x = yz$ setzen, wodurch Gleichung (36.) übergeht in

$$y(ydz + zdy) = (yz + \sqrt{y^2z^2 + y^2})dy,$$

oder, wenn man durch y dividiert und ordnet,

(37.) $$ydz = \sqrt{1 + z^2}dy.$$

Jetzt ergibt sich durch Trennung der Variabeln

(38.) $$\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dy}{y}$$

und durch Integration

$$\ln(z + \sqrt{1 + z^2}) = \ln y - \ln a,$$

wobei die Integrations-Konstante mit $\ln a$ bezeichnet ist. Daraus folgt

(39.) $$a(z + \sqrt{1 + z^2}) = y, \quad \text{oder} \quad a(x + \sqrt{x^2 + y^2}) = y^2,$$

$$a\sqrt{x^2 + y^2} = y^2 - ax,$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 = y^4 - 2axy^2 + a^2x^2,$$

(40.) $$y^2 = 2ax + a^2.$$

Die gesuchten Kurven sind also *Parabeln*, deren Brennpunkt zum Anfangspunkt der Koordinaten gewählt ist. Dabei wird

(41.) $$r = x + a, \quad St = x + r = 2x + a.$$

§ 91.
Einige weitere Fälle, in denen man die Trennung der Variabeln ausführen kann.

Mitunter kann man die Funktionen $M(x, y)$ und $N(x, y)$ in der Differential-Gleichung

(1.) $$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

auch wenn sie *nicht homogen* sind, durch eine Parallelverschiebung der Koordinaten, also indem man

(2.) $$x = x' + \xi, \quad y = y' + \eta$$

setzt und die Konstanten ξ und η passend wählt, *homogen machen*. Wie dies geschieht, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

(3.) $$2(x - 2y - 5)dx + (5x - y - 7)dy = 0$$

integrieren.

Auflösung. Indem man die Werte von x und y aus den Gleichungen (2.) in die Gleichung (3.) einsetzt, erhält man

(4.) $$2(x' - 2y' + \xi - 2\eta - 5)dx' + (5x' - y' + 5\xi - \eta - 7)dy' = 0.$$

Damit die Faktoren von dx' und dy' in dieser Gleichung homogene Funktionen ersten Grades von x' und y' werden, muß man ξ und η so bestimmen, daß

(5.) $$\xi - 2\eta - 5 = 0 \quad \text{und} \quad 5\xi - \eta - 7 = 0$$

wird. Dies gibt

(6.) $$\xi = 1, \quad \eta = -2,$$

also

(7.) $$x = x' + 1, \quad y = y' - 2.$$

Dadurch geht Gleichung (4.) über in

(8.) $$2(x' - 2y')dx' + (5x' - y')dy' = 0.$$

Indem man $y' = x'z$ setzt, erhält man

$$2(x' - 2x'z)dx' + (5x' - x'z)(x'dz + zdx') = 0,$$

er, wenn man durch x' dividiert und ordnet,

) $$(2 + z - z^2)dx' + (5 - z)x'dz = 0.$$

Jetzt ergibt sich durch Trennung der Variabeln

).) $$\frac{dx'}{x'} = \frac{(-z + 5)dz}{z^2 - z - 2} = -\frac{2dz}{z + 1} + \frac{dz}{z - 2}$$

d durch Integration

$$\ln x' = -2\ln(z + 1) + \ln(z - 2) + \ln C,$$

er

$$x'(z + 1)^2 = C(z - 2),$$

l.) $$(y' + x')^2 = C(y' - 2x').$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (7.)

2.) $$(x + y + 1)^2 = C(y - 2x + 4).$$

In ähnlicher Weise kann man ganz allgemein die fferential-Gleichung

3.) $$(ax + by + c)dx + (a_1x + b_1y + c_1)dy = 0$$

tegrieren. Setzt man nämlich wieder

l.) $$x = x' + \xi, \quad y = y' + \eta,$$

geht Gleichung (13.) über in

i.) $$(ax' + by' + a\xi + b\eta + c)dx' + (a_1x' + b_1y' + a_1\xi + b_1\eta + c_1)dy' = 0.$$

Jetzt kann man die Konstanten ξ und η so bestimmen, ß

i.) $$a\xi + b\eta + c = 0 \quad \text{und} \quad a_1\xi + b_1\eta + c_1 = 0$$

rd, indem man

7.) $$\xi = \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b}, \quad \eta = \frac{ca_1 - c_1a}{ab_1 - a_1b}$$

zt. Dadurch werden in Gleichung (15.) die Faktoren n dx' und dy', nämlich

3.) $$M(x', y') = ax' + by' \quad \text{und} \quad N(x', y') = a_1x' + b_1y'$$

mogene Funktionen, und die Differential-Gleichung er- lt die Gestalt

).) $$(ax' + by')dx' + (a_1x' + b_1y')dy' = 0,$$

so daß man sofort das im vorhergehenden Paragraphen angegebene Verfahren anwenden kann.

Bei dieser Umformung ist allerdings stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden, daß die Determinante $ab_1 - a_1b$ von Null verschieden ist. Wenn

$$ab_1 - a_1b = 0, \quad \text{oder} \quad a : a_1 = b : b_1 = m \tag{20.}$$

ist, so wird

$$ax + by = m(a_1x + b_1y). \tag{21.}$$

Das weist darauf hin, daß man hier

$$a_1x + b_1y = z, \quad \text{also} \quad a_1dx + b_1dy = dz \tag{22.}$$

setzt; dann geht die gegebene Differential-Gleichung (13.) über in

$$(mz + c)dx + (z + c_1)dy = 0,$$

oder

$$b_1(mz + c)dx + (z + c_1)(dz - a_1dx) = 0,$$

$$[(b_1m - a_1)z + (b_1c - a_1c_1)]dx + (z + c_1)dz = 0,$$

$$dx = -\frac{(z + c_1)dz}{(b_1m - a_1)z + (b_1c - a_1c_1)}. \tag{23.}$$

Beispiel.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(x - 2y + 9)dx - (3x - 6y + 19)dy = 0 \tag{24.}$$

integrieren.

Auflösung. In diesem Falle ist

$z = -3x + 6y$, $m = -\frac{1}{3}$, $b_1m - a_1 = 1$, $b_1c - a_1c_1 = -3$,

folglich wird nach Gleichung (23.)

$$dx = -\frac{(z - 19)dz}{z - 3} = -dz + 16\frac{dz}{z - 3}, \tag{25.}$$

also

$$x = -z + 16\ln(z - 3) + 2C,$$

oder

$$x - 3y + 8\ln(6y - 3x - 3) + C = 0. \tag{26.}$$

Unter der Voraussetzung, daß $ab_1 - a_1b$ von Null verschieden ist, kann man die Differential-Gleichung

$$(ax + by + c)dx + (a_1x + b_1y + c_1)dy = 0$$

auch dadurch integrieren, daß man

(27.) $M(x, y) = ax + by + c = u, \quad N(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = v$

setzt und die Größen u und v zu Integrations-Veränderlichen macht; dann wird

(28.) $$du = adx + bdy, \quad dv = a_1dx + b_1dy,$$

also

(29.) $$\begin{cases} (ab_1 - a_1b)dx = b_1du - bdv, \\ (ab_1 - a_1b)dy = -a_1du + adv. \end{cases}$$

Deshalb geht die vorgelegte Differential-Gleichung über in

$$u(b_1du - bdv) + v(-a_1du + adv) = 0,$$

oder

(30.) $$(b_1u - a_1v)du + (-bu + av)dv = 0.$$

In dieser Gleichung sind die Faktoren von du und dv *homogene* Funktionen ersten Grades von u und v.

Beispiel.

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

(31.) $$(4x - 5y + 11)dx + (-3x + 4y - 7)dy = 0$$

integrieren.

Auflösung. Hier setze man

(32.) $$4x - 5y + 11 = u, \quad -3x + 4y - 7 = v,$$

dann wird

$$4dx - 5dy = du, \quad -3dx + 4dy = dv,$$

(33.) $$dx = 4du + 5dv, \quad dy = 3du + 4dv,$$

folglich geht Gleichung (31.) über in

$$u(4du + 5dv) + v(3du + 4dv) = 0,$$

oder

(34.) $$(4u + 3v)du + (5u + 4v)dv = 0.$$

Für $v = uz$ erhält man hieraus

$$(4u + 3uz)du + (5u + 4uz)(udz + zdu) = 0,$$

oder, wenn man diese Gleichung durch u dividiert und ordnet,

(35.) $$(4 + 8z + 4z^2)du + (5 + 4z)udz = 0,$$

(36.) $$\frac{4du}{u} + \frac{(4z + 5)dz}{z^2 + 2z + 1} = 0,$$

oder

$$\frac{4du}{u} + \frac{4dz}{z + 1} + \frac{dz}{(z + 1)^2} = 0,$$

(37.) $$4\ln u + 4\ln(z + 1) - \frac{1}{z + 1} = C,$$

oder

$$4\ln(uz + u) - \frac{u}{uz + u} = C.$$

Dies gibt

(38.) $$4\ln(u + v) - \frac{u}{u + v} = C,$$

oder

(39.) $$4\ln(x - y + 4) - \frac{4x - 5y + 11}{x - y + 4} = C.$$

§ 92.

Lineare Differential-Gleichungen erster Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 214.)

Die Differential-Gleichungen erster Ordnung kann man weiter einteilen nach dem Grade, den sie in bezug auf $\frac{dy}{dx}$ und y haben. Demnach versteht man unter einer Differential-Gleichung *erster Ordnung* und *ersten Grades* eine Gleichung von der Form

(1.) $$\frac{dy}{dx} + y \, . \, f(x) = \varphi(x),$$

wobei $f(x)$ und $\varphi(x)$ noch beliebige stetige Funktionen von x sind. Gewöhnlich nennt man eine solche Gleichung „*eine lineare Differential-Gleichung erster Ordnung*“ und kann zu ihrer Integration die folgenden Methoden anwenden.

1. Methode von Bernoulli. Man setze

(2.) $$y = uz, \quad \text{also} \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx},$$

dann geht Gleichung (1.) über in

(3.) $$u\frac{dz}{dx} + z\left[\frac{du}{dx} + u \,.\, f(x)\right] = \varphi(x).$$

Von den beiden Funktionen u und z kann man die eine noch ganz beliebig annehmen; deshalb werde u so bestimmt, daß in Gleichung (3.) der Faktor von z verschwindet, daß also

(4.) $$\frac{du}{dx} + u \,.\, f(x) = 0$$

wird. Dies gibt

(5.) $$\frac{du}{u} = -f(x)dx,$$

also durch Integration

(6.) $$\ln u = -\int f(x)dx, \quad \text{oder} \quad u = e^{-\int f(x)dx}.$$

Durch diese Bestimmung von u reduziert sich Gleichung (3.) auf

(7.) $$u\frac{dz}{dx} = \varphi(x), \quad \text{oder} \quad dz = \varphi(x) \,.\, e^{\int f(x)dx} \,.\, dx,$$

folglich wird

(8.) $$z = \int \varphi(x) \,.\, e^{\int f(x)dx} \,.\, dx + C,$$

also

(9.) $$y = uz = e^{-\int f(x)dx}\left[\int \varphi(x) \,.\, e^{\int f(x)dx} \,.\, dx + C\right].$$

Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

(10.) $$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$$

integrieren.

Auflösung. Indem man $y = uz$ setzt, findet man aus Gleichung (10.)

(11.) $$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1}\right) = (x+1)^3.$$

Damit der Faktor von z in dieser Gleichung verschwindet, bestimmt man u so, daß

(12.) $$\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} = \frac{2dx}{x+1}$$

wird. Dies gibt

(13.) $$\ln u = 2\ln(x+1), \quad \text{oder} \quad u = (x+1)^2.$$

Für diesen Wert von u reduziert sich Gleichung (11.) auf

(14.) $$u\frac{dz}{dx} = (x+1)^3, \quad \text{oder} \quad dz = (x+1)dx.$$

Hier findet man durch Integration

(15.) $$2z = (x+1)^2 + C,$$

(16.) $$2y = 2uz = (x+1)^4 + C(x+1)^2.$$

Da es bei der Bestimmung von u nur darauf ankommt, daß in Gleichung (3.) der Faktor von z verschwindet, so braucht man in Gleichung (6.) keine Integrations-Konstante hinzuzufügen.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

(17.) $$\frac{dy}{dx} - ay = x^4$$

integrieren.

Auflösung. Indem man $y = uz$ setzt, findet man aus Gleichung (17.)

(18.) $$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} - au\right) = x^4.$$

Damit der Faktor von z in dieser Gleichung verschwindet, bestimmt man u so, daß

(19.) $$\frac{du}{dx} - au = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} = adx$$

wird. Dies gibt

(20.) $$\ln u = ax, \quad \text{oder} \quad u = e^{ax}.$$

Für diesen Wert von u reduziert sich Gleichung (18.) auf

(21.) $$u\frac{dz}{dx} = x^4, \quad \text{oder} \quad dz = e^{-ax} . x^4 dx.$$

Hieraus erhält man durch partielle Integration

$$(22.)\quad z = -\frac{1}{a^5}\cdot e^{-ax}(a^4x^4 + 4a^3x^3 + 12a^2x^2 + 24ax + 24) + C,$$

folglich wird

$$(23.)\quad a^5(Ce^{ax} - y) = a^4x^4 + 4a^3x^3 + 12a^2x^2 + 24ax + 24.$$

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$(24.)\qquad \frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = a\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

integrieren.

Auflösung. Indem man $y = uz$ setzt, erhält man der Reihe nach die folgenden Gleichungen

$$(25.)\qquad u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{\sqrt{1+x^2}}\right) = a\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{\sqrt{1+x^2}} = 0, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$(26.)\qquad \ln u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad u = x + \sqrt{1+x^2}.$$

Deshalb geht Gleichung (25.) über in

$$u\frac{dz}{dx} = a\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}},$$

also

$$(27.)\qquad dz = \frac{adx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad z = a\,.\arcsin x + C,$$

$$(28.)\qquad y = uz = (x + \sqrt{1+x^2})(a\,.\arcsin x + C).$$

2. Methode von Lagrange (Variation der Konstanten).

Man ersetze zunächst die Differential-Gleichung

$$(29.)\qquad \frac{dy}{dx} + y\,.\,f(x) = \varphi(x)$$

durch die Gleichung

$$(30.)\qquad \frac{dy}{dx} + y\,.\,f(x) = 0,$$

welche in bezug auf y und $\frac{dy}{dx}$ *homogen* ist, und bei der ohne weiteres die Trennung der Variabeln ausgeführt werden kann. Dadurch erhält man

(31.) $$\frac{dy}{y} = -f(x)dx$$

und durch Integration

(32.) $$\ln y = -\int f(x)dx + \ln c,$$

oder

(33.) $$y = c \,.\, e^{-\int f(x)dx}.$$

Versucht man jetzt, ob die Gleichung (33.) auch ein Integral der Gleichung (29.) ist, so erkennt man, daß dies nur möglich ist, wenn man c nicht als eine *Konstante*, sondern als eine Funktion von x betrachtet. Aus Gleichung (33.) oder (32.) findet man unter dieser Annahme durch Differentiation

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + f(x) = \frac{1}{c}\frac{dc}{dx},$$

oder

(34.) $$\frac{dy}{dx} + y \,.\, f(x) = \frac{y}{c}\frac{dc}{dx},$$

folglich wird nach Gleichung (29.) und (33.)

$$\frac{y}{c}\frac{dc}{dx} = e^{-\int f(x)dx}\frac{dc}{dx} = \varphi(x),$$

(35.) $$\frac{dc}{dx} = \varphi(x) \,.\, e^{\int f(x)dx},$$

oder

(36.) $$c = \int \varphi(x) \,.\, e^{\int f(x)dx} \,.\, dx + C,$$

also in Übereinstimmung mit Gleichung (9.)

(37.) $$y = e^{-\int f(x)dx}\left[\int \varphi(x) \,.\, e^{\int f(x)dx} \,.\, dx + C\right].$$

Beispiele.

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Gleichung

(38.) $$\frac{dy}{dx} + ay = b \,.\, e^{mx}$$

integrieren.

Auflösung. Integriert man zunächst die lineare, *homogene* Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0, \tag{39.}$$

so findet man durch Trennung der Variabeln

$$\frac{dy}{y} = -adx, \quad \text{also} \quad \ln y = -ax + \ln c, \tag{40.}$$

$$y = c \,.\, e^{-ax}. \tag{41.}$$

Wenn man hierbei c als eine Funktion von x betrachtet, so erhält man durch Differentiation

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -a + \frac{1}{c}\frac{dc}{dx},$$

oder

$$\frac{dy}{dx} + ay = \frac{y}{c}\frac{dc}{dx}. \tag{42.}$$

Dies gibt mit Rücksicht auf die Gleichungen (38.) und (41.)

$$\frac{y}{c}\frac{dc}{dx} = b \,.\, e^{mx}, \quad \text{oder} \quad e^{-ax}\frac{dc}{dx} = b \,.\, e^{mx},$$

also

$$\frac{dc}{dx} = b \,.\, e^{(a+m)x}, \tag{43.}$$

$$c = b\int e^{(a+m)x} \,.\, dx = \frac{b}{a+m}\left[e^{(a+m)x} + C\right], \tag{44.}$$

$$y = \frac{b}{a+m}\left(e^{mx} + Ce^{-ax}\right). \tag{45.}$$

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a \tag{46.}$$

integrieren.

Auflösung. Durch Integration der linearen, *homogenen* Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \tag{47.}$$

erhält man

$$\ln y = \ln c - \ln x, \quad \text{oder} \quad xy = c. \tag{48.}$$

Betrachtet man jetzt c als *veränderlich*, so erhält man aus dieser Gleichung durch Differentiation

$$(49.)\quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{c}\frac{dc}{dx} - \frac{1}{x}, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y}{c}\frac{dc}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dc}{dx}.$$

Deshalb geht Gleichung (46.) über in

$$(50.)\quad \frac{1}{x}\frac{dc}{dx} = a, \quad \text{also} \quad dc = axdx,$$

folglich wird mit Rücksicht auf Gleichung (48.)

$$(51.)\quad 2c = ax^2 + C, \quad \text{also} \quad 2xy = ax^2 + C.$$

Aufgabe 6. Man soll die Differential-Gleichung

$$(52.)\quad (1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = a$$

integrieren.

Auflösung. Durch Integration der linearen, *homogenen* Differential-Gleichung

$$(53.)\quad (1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0, \quad \text{oder} \quad 2\frac{dy}{y} = -\frac{2xdx}{1 - x^2}$$

erhält man

$$(54.)\quad \ln(y^2) = \ln(1 - x^2) + \ln c, \quad \text{oder} \quad y^2 = c(1 - x^2).$$

Betrachtet man jetzt c als *veränderlich*, so erhält man aus dieser Gleichung durch Differentiation

$$\frac{2}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{1 - x^2} + \frac{1}{c}\frac{dc}{dx},$$

oder

$$(55.)\quad (1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = (1 - x^2)\frac{y}{2c}\cdot\frac{dc}{dx}.$$

Deshalb geht Gleichung (52.) über in

$$(56.)\quad (1 - x^2)\frac{y}{2c}\cdot\frac{dc}{dx} = a;$$

dies gibt mit Rücksicht auf Gleichung (54.)

$$(57.)\quad \frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{c}}\cdot\frac{dc}{dx} = a, \quad \text{oder} \quad c^{-\frac{1}{2}}dc = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}.2adx,$$

also für $x = \sin t$, $\sqrt{1 - x^2} = \cos t$, $dx = \cos t\, dt$

$$2\sqrt{c} = 2a\int(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}dx = 2a\int\frac{dt}{\cos^2 t} = 2a\,\mathrm{tg}\,t + 2C,$$

$$(58.)\quad \sqrt{c} = \frac{ax}{\sqrt{1 - x^2}} + C.$$

Deshalb findet man aus Gleichung (54.)

(59.) $$y = ax + C\sqrt{1 - x^2}.$$

3. Methode des integrierenden Faktors.

Man multipliziere die Differential-Gleichung

(60.) $$\frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = \varphi(x)$$

mit dem Faktor $\psi(x)dx$, man bilde also

(61.) $$\psi(x)dy + \psi(x)[y \cdot f(x) - \varphi(x)]dx = 0$$

und bestimme die Funktion $\psi(x)$ so, daß die linke Seite von Gleichung (61.) ein *vollständiges Differential* wird, d. h. so, daß die Bedingung

(62.) $$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

erfüllt wird, wobei in dem vorliegenden Falle

(63.) $$M(x, y) = \psi(x)[y \cdot f(x) - \varphi(x)], \quad N(x, y) = \psi(x)$$

ist. Dies gibt also die Gleichung

(64.) $$\psi(x) \cdot f(x) = \psi'(x), \quad \text{oder} \quad \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx = f(x)dx,$$

(65.) $$\ln[\psi(x)] = \int f(x)dx, \quad \text{oder} \quad \psi(x) = e^{\int f(x)dx}.$$

Deshalb geht Gleichung (61.) über in

(66.) $$du = e^{\int f(x)dx} \cdot [y \cdot f(x) - \varphi(x)]dx + e^{\int f(x)dx} \cdot dy = 0,$$

folglich wird nach dem in § 80 und 81 angegebenen Verfahren

(67.) $$u = \int N(x, y)dy + X = y \cdot e^{\int f(x)dx} + X,$$

wobei X nur noch eine Funktion der einzigen Veränderlichen x ist. Dabei wird mit Rücksicht auf Gleichung (66.)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot e^{\int f(x)dx} f(x) + \frac{dX}{dx} = e^{\int f(x)dx}[y \cdot f(x) - \varphi(x)],$$

also

(68.) $$\frac{dX}{dx} = -e^{\int f(x)dx} \cdot \varphi(x), \quad X = -\int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x)dx} \cdot dx;$$

man findet daher in Übereinstimmung mit den Gleichungen (9.) und (37.)

$$u = y \cdot e^{\int f(x)dx} - \int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x)dx} \cdot dx = C, \tag{69.}$$

oder

$$y = e^{-\int f(x)dx} \cdot \left[\int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x)dx} \cdot dx + C \right]. \tag{70.}$$

Beispiele.

Aufgabe 7. Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1+x^2} = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \tag{71.}$$

integrieren.

Auflösung. Durch Multiplikation mit $\psi(x)dx$ geht Gleichung (71.) über in

$$\psi(x)\left(\frac{y}{1+x^2} - \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\right)dx + \psi(x)dy = 0. \tag{72.}$$

Damit die linke Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential wird, muß

$$\frac{\psi(x)}{1+x^2} = \psi'(x), \quad \text{oder} \quad \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx = \frac{dx}{1+x^2} \tag{73.}$$

sein. Daraus folgt, wenn man $\operatorname{arctg} x$ mit t bezeichnet,

$$\ln[\psi(x)] = \operatorname{arctg} x = t, \quad \text{oder} \quad \psi(x) = e^t. \tag{74.}$$

Gleichung (72.) geht daher über in

$$du = e^t(y-t)\frac{dx}{1+x^2} + e^t dy = 0, \tag{75.}$$

oder

$$du = e^t(y-t)dt + e^t dy = 0. \tag{75a.}$$

Dies gibt durch Integration

$$u = y \cdot e^t + T = C, \tag{76.}$$

wobei T eine Funktion der einzigen Veränderlichen t ist

$$\frac{\partial u}{\partial t} = y \cdot e^t + \frac{dT}{dt} = y \cdot e^t - t \cdot e^t,$$

also

$$dT = -t \cdot e^t dt, \quad T = -e^t(t-1), \tag{77.}$$

$$(78.)\qquad u = y \,.\, e^t - e^t(t-1) = C,$$

$$(79.)\qquad y = t - 1 + C \,.\, e^{-t} = \operatorname{arctg} x - 1 + Ce^{-\operatorname{arctg} x}.$$

Die Lösung der Aufgabe wird erleichtert, wenn man von Anfang an

$$\operatorname{arctg} x = t, \quad \text{also} \quad \frac{dx}{1+x^2} = dt$$

einführt. Gleichung (71.) geht dann über in

$$\frac{dy}{dt} + y = t.$$

Hieraus erhält man durch Multiplikation mit $\psi(t)dt$

$$\psi(t)(y-t)dt + \psi(t)dy = 0.$$

Damit die linke Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential wird, muß man

$$\psi(t) = \psi'(t), \quad \text{also} \quad \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = 1, \quad \ln \psi(t) = t, \quad \psi(t) = e^t$$

setzen. Dies gibt dann in Übereinstimmung mit Gleichung (75a.)

$$du = (y-t)e^t dt + e^t dy = 0.$$

Aufgabe 8. Man soll die Differential-Gleichung

$$(80.)\qquad \frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1+x^2} = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$$

integrieren.

Auflösung. Indem man Gleichung (80.) mit $\psi(x)dx$ multipliziert, erhält man

$$(81.)\qquad \psi(x)\left(\frac{xy}{1+x^2} - \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx + \psi(x)dy = 0.$$

Damit die linke Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential ist, muß

$$(82.)\qquad \frac{x\psi(x)}{1+x^2} = \psi'(x), \quad \text{oder} \quad \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)} = \frac{xdx}{1+x^2}$$

sein. Daraus folgt

$$(83.)\qquad \ln[\psi(x)] = \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2), \quad \text{oder} \quad \psi(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

Gleichung (81.) geht daher über in

$$(84.)\qquad du = \left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} - \sin x\right)dx + \sqrt{1+x^2} \,.\, dy = 0.$$

Dies gibt durch Integration

(85.) $$u = y\sqrt{1+x^2} + X = C,$$

wobei X eine Funktion der einzigen Veränderlichen x i
also mit Rücksicht auf Gleichung (84.)

(86.) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{dX}{dx} = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} - \sin x,$$

(87.) $$dX = -\sin x dx, \quad X = \cos x,$$

(88.) $$u = y\sqrt{1+x^2} + \cos x = C.$$

Aufgabe 9. Man soll die Differential-Gleichung

(89.) $$\frac{dy}{dx} - y\operatorname{tg} x = 2\cos^2 x$$

integrieren.

Auflösung. Indem man Gleichung (89.) mit $\psi(x)$ multipliziert, erhält man

(90.) $$\psi(x)(-y\operatorname{tg} x - 2\cos^2 x)dx + \psi(x)dy = 0.$$

Damit die linke Seite dieser Gleichung ein vollstä
diges Differential ist, muß

(91.) $$-\psi(x)\operatorname{tg} x = \psi'(x), \quad \text{oder} \quad \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)} = \frac{-\sin x dx}{\cos x}$$

sein. Daraus folgt

(92.) $$\ln[\psi(x)] = \ln(\cos x), \quad \text{oder} \quad \psi(x) = \cos x.$$

Gleichung (90.) geht daher über in

(93.) $$du = -(y\sin x + 2\cos^3 x)dx + \cos x \,.\, dy = 0.$$

Dies gibt durch Integration

(94.) $$u = y\cos x + X = C,$$

wobei X eine Funktion der einzigen Veränderlichen x i
also mit Rücksicht auf Gleichung (93.)

(95.) $$\frac{\partial u}{\partial x} = -y\sin x + \frac{dX}{dx} = -y\sin x - 2\cos^3 x,$$

(96.) $$dX = -2\cos^3 x dx = -2(1-\sin^2 x)\cos x dx,$$
$$X = -2(\sin x - \tfrac{1}{3}\sin^3 x),$$

(97.) $$3u = 3y\cos x - 6\sin x + 2\sin^3 x = 3C.$$

§ 93.

Gleichung von *Bernoulli*.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 215.)

In manchen Fällen läßt sich eine Differential-Gleichung erster Ordnung, welche *nicht* linear ist, durch eine passend gewählte Substitution zu einer linearen machen. Es sei z. B. nach *Bernoulli*

$$y^\alpha \frac{dy}{dx} + y^{\alpha+1} . f(x) = y^\beta . \varphi(x), \tag{1.}$$

wobei α und β beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahlen sind. Setzt man dann $\beta - \alpha = n$, so kann man die Gleichung auf die Form

$$\frac{dy}{dx} + y . f(x) = y^n . \varphi(x), \quad \text{oder} \quad \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + \frac{f(x)}{y^{n-1}} = \varphi(x) \tag{2.}$$

bringen. Ist hierbei $n = 0$, so geht Gleichung (2.) in

$$\frac{dy}{dx} + y . f(x) = \varphi(x) \tag{2a.}$$

über und ist eine *lineare* Differential-Gleichung erster Ordnung, wie sie in dem vorhergehenden Paragraphen behandelt worden ist.

Wird $n = 1$, so kann man Gleichung (2.) auf die Form

$$\frac{dy}{dx} = [\varphi(x) - f(x)]y, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{y} = [\varphi(x) - f(x)]dx \tag{2b.}$$

bringen, d. h. man kann die Trennung der Variabeln ausführen.

Für alle übrigen Fälle findet man durch die Substitution

$$z = -\frac{1}{y^{n-1}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{n-1}{y^n}\frac{dy}{dx} \tag{3.}$$

die *lineare* Differential-Gleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} - (n-1)z . f(x) = (n-1)\varphi(x). \tag{4.}$$

Man kann auch die Differential-Gleichung (2.) unmittelbar integrieren, indem man wieder

$$y = uz \tag{5.}$$

setzt. Daraus ergibt sich

(6.) $$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} + u\,.\,f(x)\right) = u^n z^n\,.\,\varphi(x).$$

Wenn man die Funktion u so bestimmt, daß der Faktor von z verschwindet, erhält man

(7.) $$\frac{du}{dx} + u\,.\,f(x) = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} = -f(x)dx,$$

(8.) $$\ln u = -\int f(x)dx, \quad \text{oder} \quad u = e^{-\int f(x)dx}.$$

Dadurch geht Gleichung (6.) über in

(9.) $$u\frac{dz}{dx} = u^n z^n\,.\,\varphi(x), \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{dx} = z^n\,.\,e^{-(n-1)\int f(x)dx}\,.\,\varphi(x).$$

(10.) $$\frac{dz}{z^n} = e^{-(n-1)\int f(x)dx}\,.\,\varphi(x)dx.$$

Da nach Voraussetzung $n \gtrless 1$ ist, so folgt aus Gleichung (10.)

(11.) $$z^{1-n} = (1-n)\int e^{-(n-1)\int f(x)dx}\,.\,\varphi(x)dx + C(1-n),$$

(12.) $$y^{1-n} = (1-n)e^{(n-1)\int f(x)dx}\left[\int e^{-(n-1)\int f(x)dx}\,.\,\varphi(x)dx + C\right]\cdot$$

Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

(13.) $$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = ay^2 \ln x$$

integrieren.

Auflösung. Indem man $y = uz$ setzt, erhält man aus Gleichung (13.)

(14.) $$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right) = au^2z^2\ln x.$$

Damit in dieser Gleichung der Faktor von z verschwindet, bestimmt man die Funktion u so, daß

(15.) $$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}, \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$$

wird. Dies gibt durch Integration

(16.) $$\ln u = -\ln x, \quad \text{oder} \quad u = \frac{1}{x}\cdot$$

Hierdurch geht Gleichung (14.) über in

(17.) $$\frac{1}{x}\frac{dz}{dx} = \frac{a}{x^2}z^2\ln x,\quad \text{also}\quad \frac{dz}{z^2} = a\ln x\cdot\frac{dx}{x};$$

folglich wird durch Integration

(18.) $$-\frac{1}{z} = \frac{a}{2}(\ln x)^2 + C,\quad \text{also}\quad -\frac{1}{y} = x\left[\frac{a}{2}(\ln x)^2 + C\right],$$

oder

(19.) $$xy[a(\ln x)^2 + 2C] + 2 = 0.$$

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

(20.) $$\frac{dy}{dx} + 2y\,\mathrm{tg}\,x = ay^2\,\mathrm{ctg}\,x$$

integrieren.

Auflösung. Indem man $y = uz$ setzt, erhält man aus Gleichung (20.)

(21.) $$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} + 2u\,\mathrm{tg}\,x\right) = au^2z^2\,\mathrm{ctg}\,x.$$

Damit in dieser Gleichung der Faktor von z verschwindet, bestimmt man die Funktion u so, daß

(22.) $$\frac{du}{dx} + 2u\,\mathrm{tg}\,x = 0,\quad \text{oder}\quad \frac{du}{u} = -2\frac{\sin x\,dx}{\cos x}$$

wird. Dies gibt durch Integration

(23.) $$\ln u = 2\ln(\cos x),\quad \text{oder}\quad u = \cos^2 x.$$

Hierdurch geht Gleichung (21.) über in

$$\cos^2 x\cdot\frac{dz}{dx} = a\cos^4 x\,.\,z^2\,\mathrm{ctg}\,x,$$

oder

(24.) $$\frac{dz}{z^2} = \frac{a\cos^3 x\,dx}{\sin x} = a\left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right)d(\sin x),$$

folglich wird durch Integration

(25.) $$-\frac{1}{z} = a[\ln(\sin x) - \tfrac{1}{2}\sin^2 x] + C = -\frac{u}{y},$$

oder

(26.) $$ay[2\ln(\sin x) - \sin^2 x] + 2Cy + 2\cos^2 x = 0.$$

§ 94.

Erklärung des integrierenden Faktors.

Es war schon früher gezeigt worden, daß jede Differential-Gleichung erster Ordnung sich auf die Form

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.}$$

bringen läßt und ein allgemeines Integral

$$F(x, y, C) = 0 \tag{2.}$$

besitzt. Löst man diese Gleichung (2.) nach der Konstanten C auf, so erhält man

$$C = f(x, y), \tag{3.}$$

wobei $f(x, y)$ eine Funktion von x und y ist, die mit u bezeichnet werden möge. Dann folgt aus Gleichung (3.)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0. \tag{4.}$$

Aus dieser Gleichung findet man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}}, \tag{5.}$$

während sich aus Gleichung (1.)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \tag{6.}$$

ergibt. Da diese beiden Werte von $\frac{dy}{dx}$ miteinander übereinstimmen müssen, so wird

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}. \tag{7.}$$

Bestimmt man daher eine Funktion v von x und y durch die Gleichung

$$v = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M(x, y)}, \tag{8.}$$

so ergibt sich aus Gleichung (7.) und (8.)

(9.) $$\frac{\partial u}{\partial x} = v \,.\, M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v \,.\, N(x, y).$$

Es wird deshalb mit Rücksicht auf Gleichung (4.)

(10.) $$du = v \,.\, M(x, y)dx + v \,.\, N(x, y)dy.$$

Damit ist bewiesen:

Satz 1. *Es gibt stets eine Funktion v von x und y, welche die Eigenschaft hat, daß*

$$v[M(x, y)dx + N(x, y)dy]$$

ein vollständiges Differential wird. Die Auflösung der Differential-Gleichung

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

ist dann

(11.) $$u = C.$$

Hierbei heißt die Funktion v „*ein integrierender Faktor*“.

Bezeichnet man mit $\varphi(u)$ eine beliebige Funktion von u, so kann man die Integral-Gleichung (11.) auch auf die Form

(11a.) $$\varphi(u) = C_1$$

bringen, wobei die Integrations-Konstante C_1 gleich $\varphi(C)$ ist.

Die vorgelegte Differential-Gleichung besitzt daher *unendlich viele integrierende Faktoren.* Multipliziert man nämlich Gleichung (10.) mit der beliebigen Funktion $\varphi(u)$ von u, so erhält man

(12.) $$\varphi(u)du = d\int\varphi(u)du = v \,.\, \varphi(u)M(x, y)dx + v \,.\, \varphi(u)N(x, y)dy.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ebenfalls ein vollständiges Differential, nämlich das vollständige Differential von $\int\varphi(u)du$. Dies gibt

Satz 2. *Ist v ein integrierender Faktor der Differential-Gleichung*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dx = 0,$$

welcher das Integral $u = C$ liefert, so ist auch V gleich $v \,.\, \varphi(u)$ ein integrierender Faktor.

Damit sind aber alle integrierenden Faktoren erschöpft, denn es gilt auch der folgende

Satz 3. *Sind V und v zwei integrierende Faktoren der Differential-Gleichung*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

und ist der Quotient von V und v keine Konstante, so ist

$$\frac{V}{v} = \varphi(u) = C_1 \tag{13.}$$

ebenfalls ein allgemeines Integral der vorgelegten Differential-Gleichung, wobei C_1 eine willkürliche Konstante bedeutet.

Beweis. Nach Voraussetzung sind

(14.) $du = v(Mdx + Ndy)$ und $dU = V(Mdx + Ndy)$

vollständige Differentiale, folglich wird

(15.) $dU = \frac{V}{v}du$, oder $\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = \frac{V}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)$,

also

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{V}{v}\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{V}{v}\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = 0. \tag{16.}$$

Da diese Gleichung für unendlich viele Werte von dx und dy gelten soll, so muß

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{V}{v}\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{V}{v}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{17.}$$

sein. Setzt man nun

$$u = g(x, y), \quad U = G(x, y), \tag{18.}$$

so kann man y aus der ersten dieser beiden Gleichungen ausrechnen und in die zweite einsetzen. Dadurch erhält man

$$y = \psi(x, u), \quad U = G[x, \psi(x, u)] = H(x, u). \tag{19.}$$

Dies gibt

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{V}{v}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{20.}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{V}{v}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{21.}$$

folglich ist

$$(22.)\qquad \frac{V}{v} = \frac{\partial H}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

d. h. $U = H(x, u)$ und deshalb auch $\frac{V}{v} = \frac{\partial H}{\partial u}$ sind Funktionen der einzigen Veränderlichen u, so daß

$$(23.)\qquad \frac{V}{v} = \varphi(u) = C_1$$

ein allgemeines Integral der vorgelegten Differential-Gleichung ist.

§ 95.

Beispiele zur Erläuterung.

Zunächst möge an einigen Differential-Gleichungen erster Ordnung, die man nach den früheren Methoden integrieren kann, gezeigt werden, wie sich aus dem Endresultat der integrierende Faktor v ergibt.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(1.)\qquad xdy - ydx = 0$$

integrieren.

Auflösung. Durch Trennung der Variabeln findet man aus dieser Gleichung ohne weiteres

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0, \quad \ln y - \ln x = \ln C,$$

oder

$$(2.)\qquad \frac{y}{x} = C.$$

Bezeichnet man also $\frac{y}{x}$ mit u, so wird

$$(3.)\qquad du = \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0.$$

Damit Gleichung (1.) diese Form erhält, muß man sie mit dem integrierenden Faktor

$$(4.)\qquad v = \frac{1}{x^2}$$

multiplizieren.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

(5.) $$ydx - (x + y)dy = 0$$

integrieren.

Auflösung. Da die Koeffizienten in der vorgelegten Differential-Gleichung homogen sind, so setze man $y = xz$: dann ergibt sich

$$zdx - (1 + z)(xdz + zdx) = 0,$$

oder

$$z^2dx + (1 + z)xdz = 0, \quad \frac{dx}{x} + (z^{-1} + z^{-2})dz = 0,$$

(6.) $$\ln x + \ln z - \frac{1}{z} = C, \quad \text{oder} \quad \ln y - \frac{x}{y} = C.$$

In diesem Falle ist also

(7.) $$u = \ln y - \frac{x}{y} = C,$$

(8.) $$du = -\frac{dx}{y} + \frac{(x + y)dy}{y^2} = 0.$$

Damit Gleichung (1.) diese Form erhält, muß man sie mit $-\frac{1}{y^2}$ multiplizieren. Der integrierende Faktor ist daher in diesem Beispiele

(9.) $$v = -\frac{1}{y^2}.$$

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

(10.) $$[y(x - y)^2 - xy^2]dx + [x^2y - x(x - y)^2]dy = 0$$

integrieren.

Auflösung. Die vorgelegte Differential-Gleichung kann durch keine der bisher angegebenen Methoden integriert werden. Multipliziert man sie aber mit dem Faktor

(11.) $$v = \frac{1}{xy(x - y)^2},$$

so geht sie über in

(12.) $$\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x - y)^2}\right]dx + \left[\frac{x^2}{(x - y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist das vollständige Differential der Funktion

$$u = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{xy}{x - y} + C, \tag{13.}$$

wie bereits in § 81, Aufgabe 5 ermittelt worden ist.

Weitere Beispiele für die Bestimmung des integrierenden Faktors wurden bereits bei der Integration der linearen Differential-Gleichungen erster Ordnung in § 92 (Aufgabe 7, 8 und 9) ausgeführt.

§ 96.

Bestimmung des integrierenden Faktors.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 216 bis 221.)

Die Bedingung, daß $v(Mdx + Ndy)$ ein vollständiges Differential wird, ist nach Formel Nr. 206 der Tabelle

$$\frac{\partial(vM)}{\partial y} = \frac{\partial(vN)}{\partial x};$$

dies gibt

$$v\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial v}{\partial y} = v\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial v}{\partial x},$$

oder

$$M\frac{\partial v}{\partial y} - N\frac{\partial v}{\partial x} = v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{1.}$$

Diese Bedingung ist *notwendig*, aber auch *hinreichend* dafür, daß v ein *integrierender Faktor* ist, und zwar ist Gleichung (1.) eine *partielle* Differential-Gleichung für v, denn sie enthält die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$. Man kann schon daraus entnehmen, daß die Integration dieser partiellen Differential-Gleichung im allgemeinen schwieriger sein wird als die Integration der ursprünglich gegebenen Differential-Gleichung

$$Mdx + Ndy = 0.$$

Es gibt aber mehrere Fälle, wo die Bestimmung von v ausführbar ist. Von diesen Fällen sollen hier einige hervorgehoben werden.

I. Fall. *Der integrierende Faktor v sei eine Funktion von x allein*, es sei also

(2.) $$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dx}.$$

Unter dieser Voraussetzung geht Gleichung (1.) über in

$$-N\frac{dv}{dx} = v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

oder

(3.) $$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist nach Voraussetzung eine Funktion der einzigen Veränderlichen x, folglich muß es auch die rechte Seite sein. Ist also der Ausdruck $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ von y unabhängig, so findet man einen integrierenden Faktor v aus Gleichung (3.); es wird nämlich

(4.) $$\ln v = -\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dx}{N}, \quad v = e^{-\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dx}{N}}.$$

Dies Verfahren ist bei jeder linearen Differential-Gleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} + y \, . \, f(x) = \varphi(x), \quad \text{oder} \quad [y \, . \, f(x) - \varphi(x)]dx + dy = 0$$

anwendbar, wie schon in § 92 gezeigt worden ist; denn in diesem Falle wird

$$M = y \, . \, f(x) - \varphi(x), \quad N = 1, \quad -\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = f(x)$$

also

$$v = e^{\int f(x)dx}.$$ (Vergl. Formel Nr. 214 der Tabelle.)

Beispiel.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

(5.) $$(x^2y + y + 1)dx + (x + x^3)dy = 0$$

integrieren.

Auflösung. Hier ist

(6.) $$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{(1 + 3x^2) - (x^2 + 1)}{x + x^3} = \frac{2x}{1 + x^2},$$

folglich wird nach Gleichung (3.)

(7.) $$\frac{dv}{v} = -\frac{2xdx}{1 + x^2}, \quad \ln v = -\ln(1 + x^2), \quad v = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Indem man Gleichung (5.) mit diesem integrierenden Faktor v multipliziert, erhält man

$$(8.)\qquad du = \left(y + \frac{1}{1+x^2}\right)dx + xdy = 0,$$

also

$$(9.)\qquad u = \int xdy + \varphi(x) = xy + \varphi(x) = C,$$

wobei $\varphi(x)$ eine Funktion der einzigen Veränderlichen x ist, die man aus der Gleichung

$$(10.)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{d\varphi(x)}{dx} = y + \frac{1}{1+x^2}$$

findet, und zwar wird

$$(11.)\qquad d\varphi(x) = \frac{dx}{1+x^2}, \quad \varphi(x) = \operatorname{arctg} x,$$

folglich ist

$$(12.)\qquad u = xy + \operatorname{arctg} x = C.$$

II. Fall. *Der integrierende Faktor v sei eine Funktion von y allein,* es sei also

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dv}{dy}.$$

Unter dieser Voraussetzung geht Gleichung (1.) über in

$$M\frac{dv}{dy} = v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

oder

$$(13.)\qquad \frac{1}{v}\frac{dv}{dy} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Funktion der einzigen Veränderlichen y, folglich muß es auch die rechte sein. Ist also der Ausdruck $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ von x unabhängig, so findet man einen integrierenden Faktor v aus Gleichung (13); es wird nämlich

$$(14.)\qquad \ln v = \int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dy}{M}, \quad v = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dy}{M}}.$$

Beispiel.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(15.)\qquad (xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0$$

Auflösung. Hier ist

$$(16.)\quad \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{-y^2 - 2xy + 3y^2}{y^2(x-y)} = -\frac{2}{y},$$

folglich wird nach Gleichung (14.)

$$(17.)\quad \ln v = -2\ln y, \quad v = \frac{1}{y^2}.$$

Indem man Gleichung (15.) mit diesem integrierenden Faktor v multipliziert, erhält man

$$(18.)\quad du = (x-y)dx + \left(\frac{1}{y^2} - x\right)dy = 0,$$

also

$$(19.)\quad u = \int (x-y)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} - xy + \varphi(y) = C,$$

wobei $\varphi(y)$ eine Funktion der einzigen Veränderlichen y ist, die man aus der Gleichung

$$(20.)\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x + \varphi'(y) = \frac{1}{y^2} - x$$

findet, und zwar wird

$$(21.)\quad \varphi'(y)dy = \frac{dy}{y^2}, \quad \varphi(y) = -\frac{1}{y},$$

folglich ist

$$(22.)\quad u = \frac{x^2}{2} - xy - \frac{1}{y} = C,$$

oder

$$(22a.)\quad x^2y - 2xy^2 - 2Cy - 2 = 0.$$

III. Fall. *Der integrierende Faktor sei eine Funktion der einzigen Veränderlichen* $z = xy$; es sei also

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{dv}{dz}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x\frac{dv}{dz}.$$

Unter dieser Voraussetzung geht Gleichung (1.) über in

$$(xM - yN)\frac{dv}{dz} = v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

oder

$$(23.)\quad \frac{1}{v}\frac{dv}{dz} = \frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Funktion der einzigen Veränderlichen z, folglich muß es auch die rechte

Seite sein. Ist also $\frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ nur abhängig von $xy = z$, so findet man einen integrierenden Faktor v aus Gleichung (23.); es wird nämlich

$$\ln v = \int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{xM - yN}, \tag{24.}$$

$$v = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{xM - yN}}. \tag{25.}$$

Beispiel.

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$(y + xy^2)dx + (x - x^2y)dy = 0 \tag{26.}$$

integrieren.

Auflösung. Hier ist

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = (1 - 2xy) - (1 + 2xy) = -4xy, \tag{27.}$$

$$xM - yN = (xy + x^2y^2) - (xy - x^2y^2) = 2x^2y^2, \tag{28.}$$

folglich wird

$$\frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\frac{2}{xy} = -\frac{2}{z} \tag{29.}$$

eine Funktion von $z = xy$ allein, so daß man aus den Gleichungen (24.) und (25.)

$$\ln v = -2\int\frac{dz}{z} = -2\ln z, \quad \text{oder} \quad v = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2y^2} \tag{30.}$$

findet. Multipliziert man Gleichung (26.) mit diesem integrierenden Faktor, so ergibt sich

$$du = \left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0, \tag{31.}$$

$$u = \int\left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x}\right)dx + \varphi(y) = -\frac{1}{xy} + \ln x + \varphi(y) = C, \tag{32.}$$

wobei $\varphi(y)$ eine Funktion der einzigen Veränderlichen y ist, die man aus der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{xy^2} + \varphi'(y) = \frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y} \tag{33.}$$

findet; und zwar wird

(34.) $$\varphi'(y)dy = -\frac{dy}{y}, \quad \varphi(y) = -\ln y,$$

folglich ist

$$u = \ln x - \ln y - \frac{1}{xy} = C,$$

oder

(35.) $$\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{xy} = C.$$

IV. Fall. *Der integrierende Faktor sei eine Funktion der einzigen Veränderlichen* $z = \frac{y}{x}$; es sei also

(36.) $$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\frac{dv}{dz}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{dv}{dz}.$$

Unter dieser Voraussetzung geht Gleichung (1.) über in

$$\frac{xM + yN}{x^2}\frac{dv}{dz} = v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

oder

(37.) $$\frac{1}{v}\frac{dv}{dz} = \frac{x^2}{xM + yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Funktion der einzigen Veränderlichen z, folglich muß es auch die rechte sein. Ist also $\frac{x^2}{xM + yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ nur abhängig von $\frac{y}{x} = z$, so findet man einen integrierenden Faktor v aus Gleichung (37.); es wird nämlich

(38.) $$\ln v = \int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{x^2dz}{xM + yN},$$

(39.) $$v = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{x^2dz}{xM + yN}}.$$

Beispiel.

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Gleichung

(40.) $$\left[3x\sin\left(\frac{y}{x}\right) + y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx - x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

integrieren.

Auflösung. Bezeichnet man $\frac{y}{x}$ mit z, so wird in diesem Falle

$$\frac{x^2}{xM+yN} = \frac{x^2}{(3x^2\sin z + xy\cos z) - xy\cos z} = \frac{1}{3\sin z},$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = (-\cos z - z\sin z) - (3\cos z + \cos z - z\sin z) = -5\cos z,$$

also ist

$$(41.)\qquad \frac{x^2}{xM+yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\frac{5\cos z}{3\sin z}$$

eine Funktion von $z = \frac{y}{x}$ allein, so daß man aus den Gleichungen (38.) und (39.)

$$(42.)\qquad \ln v = -\frac{5}{3}\int\frac{\cos z dz}{\sin z} = -\frac{5}{3}\ln(\sin z),\quad v = \frac{1}{(\sin z)^{\frac{5}{3}}}$$

findet. Multipliziert man Gleichung (40.) mit diesem integrierenden Faktor v, so ergibt sich

$$(43.)\qquad du = \left[\frac{3x}{(\sin z)^{\frac{2}{3}}} + \frac{y\cos z}{(\sin z)^{\frac{5}{3}}}\right]dx - \frac{x\cos z dy}{(\sin z)^{\frac{5}{3}}} = 0.$$

Daraus folgt

$$(44.)\qquad u = -\int\frac{x\cos z dy}{(\sin z)^{\frac{5}{3}}} + \varphi(x) = -x^2\int(\sin z)^{-\frac{5}{3}}\cos z dz + \varphi(x)$$

$$= +\frac{3x^2}{2}(\sin z)^{-\frac{2}{3}} + \varphi(x) = \frac{3x^2}{2}\left[\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]^{-\frac{2}{3}} + \varphi(x) = C,$$

wobei $\varphi(x)$ eine Funktion der einzigen Veränderlichen x ist, die man aus der Gleichung

$$(45.)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 3x(\sin z)^{-\frac{2}{3}} + y(\sin z)^{-\frac{5}{3}}\cos z + \varphi'(x)$$

$$= 3x(\sin z)^{-\frac{2}{3}} + y(\sin z)^{-\frac{5}{3}}\cos z$$

findet. Es wird also

$$(46.)\qquad \varphi'(x) = 0,\quad \varphi(x) = c.$$

Dabei kann man die Integrations-Konstante c gleich Null setzen, weil man auf der rechten Seite von Gleichung (44.) bereits eine Integrations-Konstante C hinzugefügt hat. Man erhält daher

$$u = \frac{3x^2}{2}\left[\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]^{-\frac{2}{3}} = C,$$

oder

(47.) $$3x^2 = 2C\left[\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]^{\frac{2}{3}}.$$

Setzt man noch $8C^3 = 27C_1^2$, so kann man diese Gleichung auf die Form

(48.) $$x^6 = C_1^2\sin^2\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{oder} \quad x^3 = \pm\, C_1\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

bringen.

V. Fall. *Der integrierende Faktor sei eine Funktion der einzigen Veränderlichen* $z = x^2 + y^2$; es sei also

(49.) $$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\frac{dv}{dz}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y\frac{dv}{dz}.$$

Unter dieser Voraussetzung geht Gleichung (1.) über in

$$2(yM - xN)\frac{dv}{dz} = v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

oder

(50.) $$\frac{1}{v}\frac{dv}{dz} = \frac{1}{2(yM - xN)}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Funktion der einzigen Veränderlichen z, folglich muß es auch die rechte sein. Ist also $\frac{1}{yM - xN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ nur abhängig von $x^2 + y^2 = z$, so findet man einen integrierenden Faktor v aus Gleichung (50.); es wird nämlich

(51.) $$\ln v = \int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{2(yM - xN)},$$

(52.) $$v = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{2(yM - xN)}}.$$

Beispiel.

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Gleichung

(53.) $$(a\sqrt{x^2 + y^2} - cx)dx + (b\sqrt{x^2 + y^2} - cy)dy = 0$$

integrieren.

Auflösung. Bezeichnet man $x^2 + y^2$ mit z, so ist in diesem Falle

(54.) $$yM - xN = (ay\sqrt{z} - cxy) - (bx\sqrt{z} - cxy) = (ay - bx)\sqrt{z},$$

(55.) $$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{bx}{\sqrt{z}} - \frac{ay}{\sqrt{z}} = -\frac{ay - bx}{\sqrt{z}},$$

folglich ist

$$\text{.)} \qquad \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{1}{yM - xN} = -\frac{1}{z}$$

ıe Funktion der einzigen Veränderlichen z. Deshalb det man aus den Gleichungen (51.) und (52.)

$$\text{.)} \qquad \ln v = -\frac{1}{2}\ln z, \quad v = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Multipliziert man Gleichung (53.) mit diesem integrieıden Faktor v, so ergibt sich

$$\text{.)} \quad du = \left(a - \frac{cx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx + \left(b - \frac{cy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0,$$

$$\text{.)} \quad u = \int\left(a - \frac{cx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx + \varphi(y) = ax - c\sqrt{x^2+y^2} + \varphi(y) = C,$$

bei $\varphi(y)$ eine Funktion der einzigen Veränderlichen y ist, man aus der Gleichung

$$\text{.)} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{cy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi'(y) = b - \frac{cy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

det. Es wird also

$$\text{.)} \qquad \varphi'(y) = b, \quad \varphi(y) = by,$$

$$\text{.)} \qquad u = ax + by - c\sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

In ähnlicher Weise kann man noch eine ganze Reihe n besonderen Fällen behandeln, bei denen der integrieıde Faktor eine Funktion einer einzigen Veränderlichen ist, die selbst wieder eine passend gewählte Funktion n x und y sein darf. In allen diesen Fällen ist zuerst r Ausdruck

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

bilden. Ist dieser Ausdruck gleich Null, so ist schon

$$Mdx + Ndy$$

bst ein *vollständiges Differential*, ist er aber von Null rschieden, so kann man der Reihe nach versuchen, ob

$$-\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \text{ eine Funktion von } x \text{ allein,}$$

er ob $\quad +\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ „ „ „ y „

oder ob $\frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ eine Funktion von xy allein,

„ „ $\frac{x^2}{xM + yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ „ „ „ $\frac{y}{x}$ „

„ „ $\frac{1}{yM - xN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ „ „ „ $x^2 + y^2$ „

ist. Trifft einer dieser 5 Fälle ein, so kann man nach den angegebenen Regeln den integrierenden Faktor leicht bestimmen.

Erwähnt möge noch werden, daß der häufig vorkommende Ausdruck $xdy - ydx$ die integrierenden Faktoren

$$\frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{y^2}, \quad \frac{1}{x^2 + y^2}$$

besitzt. Es folgt dabei aus den Gleichungen

$$(63.)\quad du_1 = \frac{xdy - ydx}{x^2}, \quad du_2 = \frac{xdy - ydx}{y^2}, \quad du_3 = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

$$(64.)\quad u_1 = \frac{y}{x}, \quad u_2 = -\frac{x}{y}, \quad u_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Der Ausdruck $xdx + ydy$ hat den integrierenden Faktor $\frac{1}{x^2 + y^2}$, und zwar folgt aus

$$(65.)\quad du = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$$

$$(66.)\quad u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2).$$

§ 97.

Differential-Gleichungen erster Ordnung höheren Grades.

Eine Differential-Gleichung erster Ordnung und n^{ten} Grades hat die Form

$$(1.)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^n + f_1(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + f_2(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \cdots + f_{n-1}(x, y)\frac{dy}{dx} + f_n(x, y) = 0.$$

Hier bedeuten die Koeffizienten $f_1(x, y)$, $f_2(x, y), \ldots$ $f_{n-1}(x, y)$, $f_n(x, y)$ beliebige Funktionen von x und y, oder konstante Größen.

Denkt man sich nun Gleichung (1.) in bezug auf $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, so erhält man n verschiedene Differential-Gleichungen erster Ordnung und ersten Grades, nämlich

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = F_2(x, y), \cdots \frac{dy}{dx} = F_n(x, y), \tag{2.}$$

wobei $F_1(x, y)$, $F_2(x, y), \ldots F_n(x, y)$ Funktionen von x und y, oder konstante Größen sind.

Durch Integration der Gleichungen (2.) erhält man dann

$$\varphi_1(x, y, c_1) = 0, \quad \varphi_2(x, y, c_2) = 0, \ldots \varphi_n(x, y, c_n) = 0. \tag{3.}$$

Jede dieser Gleichungen ist ein Integral der Differential-Gleichung (1.). Man kann alle diese Lösungen zusammenfassen, indem man die Gleichungen (3.) miteinander multipliziert. Dies gibt

$$\varphi_1(x, y, c_1) \cdot \varphi_2(x, y, c_2) \ldots \varphi_n(x, y, c_n) = 0. \tag{4.}$$

Da dieses Produkt gleich 0 wird, wenn man *einen* der Faktoren gleich 0 setzt, so wird die Allgemeinheit der Lösung nicht beschränkt, indem man die Integrations-Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ alle einander gleich setzt. Dadurch geht Gleichung (4.) über in

$$\varphi_1(x, y, c) \cdot \varphi_2(x, y, c) \ldots \varphi_n(x, y, c) = 0. \tag{4a.}$$

Sind z. B. in Gleichung (1.) die Koeffizienten $f_1(x, y)$, $f_2(x, y), \ldots f_{n-1}(x, y)$, $f_n(x, y)$ konstante Größen, die man deshalb mit $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, f_n$ bezeichnen möge, so gehen die Gleichungen (1.) und (2.) über in

$$\begin{aligned}\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + f_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + f_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \cdots + f_{n-1}\frac{dy}{dx} + f_n \\ = \left(\frac{dy}{dx} - a_1\right)\left(\frac{dy}{dx} - a_2\right)\cdots\left(\frac{dy}{dx} - a_n\right) = 0.\end{aligned} \tag{1a.}$$

Daraus folgen die n Differential-Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = a_1, \quad \frac{dy}{dx} = a_2, \cdots \frac{dy}{dx} = a_n, \tag{5.}$$

wobei $a_1, a_2, \ldots a_n$ auch konstante Größen sind. Deshalb wird in diesem Falle

$$(6.)\quad \varphi_1 = y - a_1 x + c = 0,\quad \varphi_2 = y - a_2 x + c = 0, \ldots$$
$$\varphi_n = y - a_n x + c = 0,$$

oder

$$(6\text{a.})\quad \frac{y+c}{x} - a_1 = 0,\quad \frac{y+c}{x} - a_2 = 0, \ldots \frac{y+c}{x} - a_n = 0.$$

Gleichung (4a.) geht daher in diesem Falle über in

$$(7.)\quad \left(\frac{y+c}{x} - a_1\right)\left(\frac{y+c}{x} - a_2\right)\cdots\left(\frac{y+c}{x} - a_n\right) = 0,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (1a.) in

$$(7\text{a.})\quad \left(\frac{y+c}{x}\right)^n + f_1\left(\frac{y+c}{x}\right)^{n-1} + f_2\left(\frac{y+c}{x}\right)^{n-2} + \cdots + f_{n-1}\frac{y+c}{x} + f_n = 0.$$

In diesem Falle ist also die Auflösung der Gleichung (1.) nach $\frac{dy}{dx}$, welche mitunter bedeutende algebraische Schwierigkeiten verursachen würde, nicht einmal erforderlich.

Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(8.)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0$$

integrieren.

Auflösung. Aus Gleichung (8.) folgt zunächst

$$(9.)\quad \frac{dy}{dx} = +a \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = -a$$

und daraus durch Integration

$$y + c = ax \quad \text{und} \quad y + c = -ax,$$

oder

$$(10.)\quad (y + c - ax)(y + c + ax) = (y + c)^2 - a^2x^2 = 0.$$

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(11.)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 7\frac{dy}{dx} + 6 = 0$$

integrieren.

Auflösung. Gleichung (11.) läßt sich auf die Form

$$\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)\left(\frac{dy}{dx} - 2\right)\left(\frac{dy}{dx} + 3\right) = 0 \tag{11a.}$$

bringen, folglich erhält man für das allgemeine Integral

$$(y + c - x)(y + c - 2x)(y + c + 3x) = 0, \tag{12.}$$

oder

$$(y + c)^3 - 7x^2(y + c) + 6x^3 = 0. \tag{12a.}$$

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = ax \tag{13.}$$

integrieren.

Auflösung. Aus Gleichung (13.) folgt

$$dy = +\sqrt{ax}\,dx \quad \text{und} \quad dy = -\sqrt{ax}\,dx \tag{14.}$$

und durch Integration

$$y + c - \frac{2x}{3}\sqrt{ax} = 0 \quad \text{und} \quad y + c + \frac{2x}{3}\sqrt{ax} = 0. \tag{15.}$$

Jede dieser beiden Gleichungen kann als Integral der vorgelegten Differential-Gleichung angesehen werden. Indem man die beiden Gleichungen (15.) miteinander multipliziert, vereinigt man beide Lösungen und erhält

$$[3(y + c) - 2x\sqrt{ax}][3(y + c) + 2x\sqrt{ax}] = 0,$$

oder

$$9(y + c)^2 - 4ax^3 = 0. \tag{16.}$$

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} - 1 = 0 \tag{17.}$$

integrieren.

Auflösung. Durch Auflösung von Gleichung (17.) nach $\frac{dy}{dx}$ findet man die beiden Werte

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x - \sqrt{x^2 + y^2}}{y}, \tag{18.}$$

oder

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = +dx \quad \text{und} \quad \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -dx, \tag{19.}$$

also durch Integration

(20.) $\sqrt{x^2+y^2} = x + c$ und $\sqrt{x^2+y^2} = -x - c$,
oder, wenn man beide Lösungen vereinigt,

(21.) $(\sqrt{x^2+y^2} - x - c)(\sqrt{x^2+y^2} + x + c) = y^2 - 2cx - c^2 = 0.$

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Gleichung

(22.) $$(a^2 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + bx(a^2 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - bx = 0$$

integrieren.

Auflösung. Durch Auflösung der Gleichung (22.) nach $\frac{dy}{dx}$ erhält man die drei Differential-Gleichungen

(23.) $$\frac{dy}{dx} = -bx, \quad \frac{dy}{dx} = +\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

und findet daraus durch Integration

(24.) $$y+c = -\frac{bx^2}{2}, \quad y+c = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right), \quad y+c = -\arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Indem man diese drei Lösungen vereinigt, ergibt sich die Gleichung

$$\left(y+c+\frac{bx^2}{2}\right)\left[y+c-\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]\left[y+c+\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right] = 0,$$

oder

(25.) $$(y+c)^3 + \frac{bx^2}{2}(y+c)^2 - \left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2(y+c)$$
$$- \frac{bx^2}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2 = 0.$$

§ 98.

Integration durch Differentiation.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 222 bis 225a.)

Es war schon in dem vorhergehenden Paragraphen erwähnt worden, daß die Auflösung der Differential-Gleichungen erster Ordnung höheren Grades nach $\frac{dy}{dx}$ häufig auf große algebraische Schwierigkeiten stößt. Es sollen deshalb hier noch einige Fälle untersucht werden, bei denen man die Integration durch andere Mittel ausführen kann.

Der Kürze wegen möge hierbei

(1.) $$\frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also} \quad dy = pdx, \quad dx = \frac{dy}{p}$$

gesetzt werden. Man kann dann jede der drei Größen p, dx, dy durch die beiden anderen ausdrücken. Kommt in der Differential-Gleichung y nicht mehr vor, so setzt man $dy = pdx$ ein, kommt x nicht mehr vor, so setzt man $dx = \frac{dy}{p}$ ein. Auch wenn die Differential-Gleichung nach x oder nach y auflösbar ist, kann man diese Substitutionen mit Erfolg anwenden, nachdem man vorher beide Seiten der Gleichung differentiiert hat.

I. Fall. *Die Differential-Gleichung enthalte y gar nicht und sei auflösbar nach x*; die Gleichung habe also die Form

$$x = \varphi(p); \tag{2.}$$

dann findet man durch Differentiation

$$dx = \varphi'(p)dp, \tag{3.}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (1.)

$$pdx = dy = \varphi'(p) \,.\, pdp, \tag{4.}$$

$$y = \int \varphi'(p) \,.\, pdp + C. \tag{5.}$$

Indem man aus den Gleichungen (2.) und (5.) die Größe p eliminiert, erhält man die gesuchte Gleichung zwischen x und y.

Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$x = 4p^3 - 6p^2 + 12p - 15 \tag{6.}$$

integrieren.

Auflösung. Indem man Gleichung (6.) differentiiert, erhält man die Gleichungen

$$dx = (12p^2 - 12p + 12)dp, \tag{7.}$$

$$dy = (12p^3 - 12p^2 + 12p)dp, \tag{8.}$$

also

$$y = 3p^4 - 4p^3 + 6p^2 + C. \tag{9.}$$

Durch Elimination der Größe p aus den Gleichungen (6.) und (9.) findet man dann die gesuchte Gleichung zwischen x und y.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

(10.) $$x = \arcsin p - \sqrt{1 - p^2}$$

integrieren.

Auflösung. Indem man Gleichung (10.) differen[t]
erhält man die Gleichungen

(11.) $$dx = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - p^2}} + \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}}\right)dp,$$

(12.) $$dy = \left(\frac{p}{\sqrt{1 - p^2}} + \frac{p^2}{\sqrt{1 - p^2}}\right)dp,$$

also mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 31 und 120
Tabelle

(13.) $$y = -\sqrt{1 - p^2} - \frac{p}{2}\sqrt{1 - p^2} + \frac{1}{2}\arcsin p + C,$$

oder

(14.) $$2y - x = 2C - (1 + p)\sqrt{1 - p^2}.$$

II. Fall. *Die Differential-Gleichung enthalte x gar*
und sei auflösbar nach y; die Gleichung habe also die I

(15.) $$y = \varphi(p);$$

dann findet man durch Differentiation mit Rücksicht
Gleichung (1.)

(16.) $$dy = pdx = \varphi'(p)dp,$$

(17.) $$dx = \frac{\varphi'(p)dp}{p},$$

also

(18.) $$x = \int \frac{\varphi'(p)dp}{p} + C.$$

Indem man aus den Gleichungen (15.) und (18.)
Größe p eliminiert, findet man die gesuchte Gleic[h]
zwischen x und y.

Beispiele.

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

(19.) $$y = \frac{2a}{1 + p^2}$$

integrieren.

Auflösung. Durch Differentiation findet man aus Gleichung (19.)

(20.) $$dy = pdx = -\frac{4apdp}{(1+p^2)^2},$$

(21.) $$dx = -\frac{4adp}{(1+p^2)^2}.$$

Setzt man hierbei nach Formel Nr. 150 der Tabelle

$$p = \operatorname{tg} z, \quad \text{also} \quad z = \operatorname{arctg} p,\ dz = \frac{dp}{1+p^2},$$

$$\frac{1}{1+p^2} = \cos^2 z, \quad \frac{p}{1+p^2} = \operatorname{tg} z \cos^2 z = \sin z \cos z,$$

so gehen die Gleichungen (19.) und (21.) über in

(19a.) $$y = 2a\cos^2 z = a[1 + \cos(2z)],$$

(21a.) $$dx = -4a\cos^2 z\, dz.$$

Dies gibt nach Formel Nr. 99 der Tabelle

(22.) $$x = -2a(\sin z \cos z + z) + C = -a[2z + \sin(2z)] + C.$$

Setzt man noch

$$2z = \pi - t, \quad C - a\pi = x_0,$$

so erhält man aus den Gleichungen (22.) und (19a.)

(22a.) $$x - x_0 = a(t - \sin t),$$

(19b.) $$y = a(1 - \cos t).$$

Das allgemeine Integral stellt also eine Schar von *Zykloiden* dar.

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Gleichung

(23.) $$y = \frac{\sqrt{a^2 - p^2}}{a^2 p}$$

integrieren.

Auflösung. Durch Differentiation folgt aus Gleichung (23.)

(24.) $$dy = pdx = -\frac{dp}{p^2\sqrt{a^2 - p^2}},$$

(25.) $$dx = -\frac{dp}{p^3\sqrt{a^2 - p^2}},$$

also nach Formel Nr. 125 und 37 der Tabelle

(26.) $$x - x_0 = \frac{\sqrt{a^2 - p^2}}{2a^2p^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{dp}{p\sqrt{a^2 - p^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - p^2}}{2a^2p^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - p^2}}{p}\right).$$

Da noch aus Gleichung (23.) folgt, daß

(27.) $$p = \frac{a}{\sqrt{a^4y^2 + 1}}, \quad \sqrt{a^2 - p^2} = \frac{a^3y}{\sqrt{a^4y^2 + 1}}$$

ist, so findet man aus Gleichung (26.)

(28.) $$2a^3(x - x_0) = a^2y\sqrt{a^4y^2 + 1} + \ln(a^2y + \sqrt{a^4y^2 + 1}).$$

III. Fall. *Die Differential-Gleichung enthalte alle drei Größen x, y und p, sei aber nach x auflösbar*; die Gleichung habe also die Form

(29.) $$x = f(y, p).$$

Indem man diese Gleichung differentiiert und Gleichung (1.) beachtet, erhält man

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp,$$

oder

(30.) $$\left(\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dy - \frac{\partial f}{\partial p}dp = 0.$$

Dies ist eine Differential-Gleichung erster Ordnung zwischen y und p, die in bezug auf $\frac{dy}{dp}$ nur vom ersten Grade ist und sich in vielen Fällen leichter integrieren läßt als die vorgelegte Differential-Gleichung (29.). Hat man die Integral-Gleichung

(31.) $$\varphi(y, p, C) = 0$$

gefunden, so folgt durch Elimination von p aus den Gleichungen (29.) und (31.) die gesuchte Gleichung zwischen x und y.

Beispiel.

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Gleichung

(32.) $$yp^2 - 2xp + y = 0, \quad \text{oder} \quad x = \frac{y(1 + p^2)}{2p}$$

integrieren.

Auflösung. Durch Differentiation folgt aus Gleichung (32.)

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{p(1 + p^2)dy - y(1 - p^2)dp}{2p^2},$$

oder

(33.) $p(1 - p^2)dy + y(1 - p^2)dp = (1 - p^2)(pdy + ydp) = 0.$

Diese Gleichung wird befriedigt, indem man *entweder*

(34.) $$1 - p^2 = 0, \quad \text{also} \quad p = \frac{dy}{dx} = \pm 1,$$

oder

(35.) $$pdy + ydp = 0$$

setzt. Aus Gleichung (34.) folgt durch Integration

(36.) $$y = \pm x + C.$$

Hier darf aber die Integrations-Konstante C nicht jeden beliebigen Wert haben, denn, wenn man $p = \pm 1$ in die Gleichung (32.) einsetzt, so erkennt man, daß in Gleichung (36.) der Wert der Integrations-Konstanten C gleich 0 sein muß, daß also Gleichung (36.) in

(36a.) $$y = \pm x$$

übergeht.

Aus Gleichung (35.) findet man dagegen durch Trennung der Variabeln

(37.) $$\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = 0,$$

(38.) $\ln y + \ln p = \ln C, \quad \text{oder} \quad py = C, \quad \text{also} \quad p = \frac{C}{y}.$

Trägt man diesen Wert von p in Gleichung (32.) ein, so findet man

(39.) $$y^2 - 2Cx + C^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung und stellt eine *Schar von Parabeln* dar, welche sämtlich die beiden durch Gleichung (36a.) dargestellten geraden Linien in den Punkten mit den Koordinaten

$$x = C, \quad y = \pm C$$

berühren.

IV. Fall. *Die Differential-Gleichung enthalte alle drei Größen x, y und p, sei aber auflösbar nach y:* die Gleichung habe also die Form

(40.) $$y = f(x, p).$$

Indem man diese Gleichung differentiiert und Gleichung (1.) beachtet, erhält man

$$dy = pdx = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp,$$

oder

(41.) $$\frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} - p\right) = 0.$$

Dies ist eine Differential-Gleichung erster Ordnung zwischen x und p, die in bezug auf $\frac{dp}{dx}$ nur vom ersten Grade ist und sich in vielen Fällen leichter integrieren läßt als die vorgelegte Differential-Gleichung (40.). Hat man die Integral-Gleichung

(42.) $$\varphi(x, p, C) = 0$$

gefunden, so folgt durch Elimination von p aus den Gleichungen (40.) und (42.) die gesuchte Gleichung zwischen x und y.

Hat die Differential-Gleichung z. B. die Form

(43.) $$y = x \,.\, f(p) + \varphi(p),$$

so wird mit Rücksicht auf Gleichung (1.)

(44.) $$\frac{dy}{dx} = p = f(p) + [x \,.\, f'(p) + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx},$$

oder

(45.) $$[p - f(p)] \frac{dx}{dp} - x \,.\, f'(p) = \varphi'(p).$$

Dies ist aber eine *lineare Differential-Gleichung erster Ordnung,* die man nach den Angaben in § 92 integrieren kann. (Vergl. auch Formel Nr. 214 der Tabelle.)

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo in der vorhergehenden Entwickelung $f(p)$ gleich p ist, wo also die Differential-Gleichung die Form

(46.) $$y = px + \varphi(p)$$

hat. Dann nennt man die Gleichung eine „*Clairaut*sche Gleichung“ und erhält durch Differentiation

$$dy = pdx = pdx + xdp + \varphi'(p)dp,$$

oder

(47.) $$[x + \varphi'(p)]dp = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, indem man entweder

(48.) $$dp = 0,$$

oder

(49.) $$x + \varphi'(p) = 0$$

setzt. Aus Gleichung (48.) folgt durch Integration

(50.) $$p = \frac{dy}{dx} = C, \quad \text{also} \quad y = Cx + C_1,$$

wobei die zweite Integrations-Konstante ermittelt wird, indem man den gefundenen Wert von p in die Gleichung (46.) einsetzt. Dies gibt

(51.) $$y = Cx + \varphi(C), \quad \text{also} \quad C_1 = \varphi(C).$$

Da hierbei die Integrations-Konstante C unendlich viele Werte hat, so ist Gleichung (51.) das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung.

Ganz verschieden davon ist die Lösung, welche man findet, indem man aus den Gleichungen (46.) und (49.) die Größe p eliminiert. Daß man auf diese Weise wirklich eine Lösung erhält, kann man in folgender Weise zeigen. Denkt man sich aus Gleichung (49.) p als Funktion von x ausgerechnet und in Gleichung (46.) eingesetzt, so findet man, indem man diese Gleichung nach x differentiiert,

$$\frac{dy}{dx} = p + [x + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx},$$

also mit Rücksicht auf Gleichung (49.)

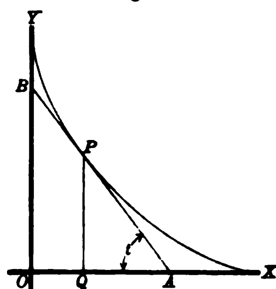
(52.) $$\frac{dy}{dx} = p.$$

Beispiel.

Aufgabe 6. Man soll eine Kurve bestimmen, bei welcher der Abschnitt der Tangente zwischen den beiden Koordinaten-Achsen eine konstante Länge c hat.

Auflösung. Bezeichnet man den Winkel OAB zwischen der Tangente und der negativen Richtung der X-Achse mit t (Fig. 143), so sind die Abschnitte $OA = a$ und $OB = b$, welche die Gerade AB auf den Koordinaten-Achsen abschneidet,

Fig. 143.



(53.) $a = c\cos t, \quad b = c\sin t,$

folglich wird die Gleichung der Geraden AB, wenn man die laufenden Koordinaten mit x' und y' bezeichnet,

$$\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} = 1, \text{ oder } \frac{x'}{c\cos t} + \frac{y'}{c\sin t} = 1,$$

oder

(54.) $y' = -x'\operatorname{tg}t + c\sin t.$

Dabei ist

(55.) $\operatorname{tg}t = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{dy}{dx} = -p, \text{ also } \sin t = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$

folglich wird die Gleichung der Tangente

(56.) $$y' = px' - \frac{cp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Da die Gerade durch den Punkt P hindurchgehen soll, so erhält man eine *Clairaut*sche Differential-Gleichung

(57.) $$y = px - \frac{cp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = p = p + \left(x - \frac{c}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx},$$

oder

(58.) $$\left(x - \frac{c}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung wird zunächst befriedigt, indem man

(59.) $$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{also} \quad p = \frac{dy}{dx} = C$$

setzt und $p = C$ in Gleichung (57.) einträgt, woraus man

(60.) $$y = Cx - \frac{Cc}{\sqrt{1 + C^2}}$$

findet. Diese Gleichung enthält die willkürliche Konstante C und ist daher das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung. Jede Kurve der gefundenen Kurvenschar ist eine *gerade Linie,* welche mit ihrer Tangente zusammenfällt und auf den Koordinaten-Achsen die Abschnitte

(61.) $$a = +\frac{c}{\sqrt{1 + C^2}}, \quad b = -\frac{cC}{\sqrt{1 + C^2}}$$

bestimmt. Da hieraus

$$a^2 + b^2 = c^2$$

folgt, so wird der Forderung der Aufgabe genügt.

Gleichung (58.) wird aber auch befriedigt, wenn man

(62.) $$x - \frac{c}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}} = 0, \text{ oder } x = \frac{c}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}}$$

setzt. Dabei wird nach Gleichung (55.)

(63.) $$p = -\operatorname{tg} t, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} = \cos t, \quad -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = \sin t;$$

dadurch gehen die Gleichungen (62.) und (57.) über in

(64.) $$x = c\cos^3 t, \quad y = c\sin^3 t.$$

Durch Elimination von t findet man aus diesen Gleichungen

(65.) $$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}.$$

Die gesuchte Kurve ist also eine *Astroide.* Für einen beliebigen Punkt der Astroide wird

(66.) $$p = -\operatorname{tg} t,$$

so daß man für die zugehörige Tangente die Gleichung

$$y' - y = p(x' - x),$$

oder

$$y' - c\sin^3 t = -\operatorname{tg} t(x' - c\cos^3 t),$$

(67.) $$y' = -\operatorname{tg} t \,.\, x' + c\sin t$$

findet. Deshalb sind die Abschnitte, welche diese Tangente auf den Koordinaten-Achsen abschneidet,

(68.) $$a = c\cos t, \quad b = c\sin t, \quad \text{also} \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Setzt man in Gleichung (67.) $-\operatorname{tg} t$ gleich C, so geht sie in Gleichung (60.) über, welche das *allgemeine* Integral der Differential-Gleichung darstellte; d. h. die Astroide, welche man als eine *besondere* Lösung der Differential-Gleichung gefunden hat, berührt alle geraden Linien, die der *allgemeinen* Lösung entsprechen.

§ 99.

Die singulären Auflösungen der Differential-Gleichungen erster Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 226.)

Bei den Aufgaben 5 und 6 des vorhergehenden Paragraphen und allgemein bei der *Clairaut*schen Differential-Gleichung

(1.) $$y = px + \varphi(p)$$

fand man *zwei* Lösungen, von denen die eine noch eine willkürliche Integrations-Konstante enthält, die zweite aber nicht. Auch erkennt man bei diesen Aufgaben sofort, daß diese zweite Lösung, welche ohne Ausführung einer Integration gefunden werden konnte, kein *partikuläres* Integral ist, d. h. die zweite Lösung geht nicht aus der ersten hervor, indem man der Integrations-Konstanten einen besonderen Wert gibt.

Man nennt daher eine solche besondere Lösung *„eine singuläre Lösung der vorgelegten Differential-Gleichung"* *).

Der Zusammenhang zwischen der *allgemeinen* und einer solchen *singulären* Lösung ergibt sich aus folgender Betrachtung.

Es sei

(2.) $$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

oder

(2a.) $$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

die gegebene Differential-Gleichung, und

*) Es kann allerdings ausnahmsweise auch vorkommen, daß die *singuläre* Lösung mit einer *partikulären* Lösung zusammenfällt.

) $$G(x, y, C) = 0$$

. das allgemeine Integral. Die Gleichung (3.) stellt eine nze Schar von Kurven dar, weil die Integrations-Konınte C unendlich viele Werte annehmen darf. C ist also Gleichung (3.) ein *variabler Parameter*. Für die Koordinten der Schnittpunkte zweier benachbarten Kurven der har, welche den variabeln Parametern C und $C + \varDelta C$ tsprechen, gelten die Gleichungen

) $$G(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad G(x, y, C + \varDelta C) = 0$$

meinschaftlich; deshalb gelten für die Koordinaten der hnittpunkte auch die beiden Gleichungen

) $$G(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{G(x, y, C + \varDelta C) - G(x, y, C)}{\varDelta C} = 0.$$

Wird $\varDelta C$ verschwindend klein, so gehen diese Gleiungen über in

) $$G(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = 0.$$

Wenn man aus diesen beiden Gleichungen den variabeln rameter C eliminiert, so erhält man *im allgemeinen* den ometrischen Ort aller dieser Schnittpunkte, d. h. die *Umllungskurve* der gegebenen Kurvenschar. (Vergl. D.-R., 155 und Formel Nr. 252 der Tabelle.) Es gilt dabei r Satz:

Besitzt die Kurvenschar

) $$G(x, y, C) = 0,$$

lche dem allgemeinen Integral der Differential-Gleichung) entspricht, eine Umhüllungskurve mit der Gleichung

) $$S(x, y) = 0,$$

ist diese Gleichung eine singuläre Lösung der gegebenen fferential-Gleichung.

Es galt nämlich der Satz: „*Die Umhüllungskurve (Enloppe) hat in den Punkten, welche sie mit einer der ırven der gegebenen Kurvenschar*

$$G(x, y, C) = 0$$

mein hat, auch die Tangente mit dieser Kurve gemein“.

(D.-R., § 155.) Im Punkte P mit den Koordinaten x und y hat daher

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

denselben Wert, gleichviel ob man annimmt, daß der Punkt P ein Punkt auf einer Kurve der durch Gleichung (3.) dargestellten Kurvenschar ist, oder ob man den Punkt P als einen Punkt der Umhüllungskurve mit der Gleichung (7.) ansieht, d. h. die Differential-Gleichung (2.) wird für die Koordinaten aller Punkte der Umhüllungskurve befriedigt.

Es ist aber noch hervorzuheben, daß die Elimination von C aus den Gleichungen (6.) nicht immer die Umhüllungskurve allein liefert, sondern möglicherweise auch noch andere Kurven. Besitzen z. B. die Kurven der gegebenen Kurvenschar

$$G(x, y, C) = 0$$

sämtlich Doppelpunkte, so gelten die Gleichungen (6.) auch für die Koordinaten dieser Doppelpunkte. Denn nach § 112 der D.-R. hat die Gleichung (3.) zwei *gleiche* Wurzeln C, wenn für den betreffenden Wert von C auch noch

$$\frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

wird. Durch den betrachteten Punkt P geht also die Kurve, welche diesem Parameter C entspricht, *zweimal* hindurch.

Von diesem Umstande kann man sich auch durch folgende Überlegung überzeugen. Nach D.-R., Formel Nr. 253 der Tabelle gelten für die Koordinaten eines Doppelpunktes die drei Gleichungen

$$(8.)\qquad G(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial y} = 0.$$

Nun ist aber auch

$$(9.)\qquad dG(x, y, C) = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial C}dC = 0,$$

folglich wird mit Rücksicht auf die Gleichungen (8.) für die Koordinaten des Doppelpunktes auch die Gleichung

$$(10.)\qquad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

befriedigt.

Die linke Seite der Gleichung

$$(11.)\qquad D(x, y) = 0,$$

welche man durch Elimination von C aus den Gleichungen (6.) findet, nennt man die *Diskriminante* der Gleichung (3.); $D(x, y)$ zerfällt möglicherweise in zwei Faktoren $H(x, y)$ und $S(x, y)$, so daß die Gleichung

$$(12.)\qquad S(x, y) = 0$$

als Gleichung der Umhüllungskurve die singuläre Lösung der vorgelegten Differential-Gleichung gibt, während der Gleichung

$$(13.)\qquad H(x, y) = 0$$

der geometrische Ort der Doppelpunkte entspricht.

Was von den Doppelpunkten der gefundenen Kurvenschar gesagt ist, gilt natürlich auch in gleicher Weise für die Spitzen und mehrfachen Punkte.

Man muß sich daher, wenn man aus den Gleichungen (6.) durch Elimination von C die Diskriminante $D(x, y)$ gefunden hat, in jedem einzelnen Falle erst darüber Rechenschaft geben, ob die Gleichung $D(x, y) = 0$ schon selbst der Umhüllungskurve der Integralkurven entspricht, oder ob sie in die Gleichungen (12.) und (13.) zerfällt.

Beispiel. Man soll die Differential-Gleichung

$$(14.)\qquad (a + x)^3(x - a)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 + ax - a^2)^2 = 0$$

integrieren.

Auflösung. Die Gleichung (14.) kann man auf die Form

$$(15.)\qquad \pm\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - ax - x^2}{(a + x)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{(a + x)\sqrt{a^2 - x^2}}$$

bringen. Daraus folgt durch Integration

$$(16.)\qquad \pm(y + C) = \sqrt{a^2 - x^2} - a\sqrt{\frac{a - x}{a + x}} = \frac{x\sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x}},$$

oder

$$(17.)\qquad G(x, y, C) = x^2(x - a) + (x + a)(y + C)^2 = 0.$$

Diese Gleichung stellt für jeden Wert von C eine Kurve 3. Grades dar, welche für $x = 0$, $y = -C$ einen Doppelpunkt hat. (Vergl. Fig. 144.)

Bringt man Gleichung (17.) auf die Form

$$G(x, y, C) = PC^2 + 2QC + R = 0, \tag{17a.}$$

so wird

$$P = x + a, \quad Q = (x + a)y, \quad R = x^2(x - a) + (x + a)y^2. \tag{18.}$$

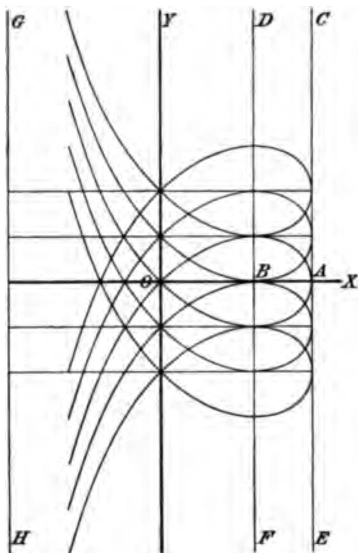
Durch Elimination von C aus Gleichung (17a.) und der Gleichung

$$\frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = 2(PC + Q) = 0$$

findet man

$$Q^2 - PR = -x^2(x + a)(x - a) = 0. \tag{19.}$$

Fig. 144.



Dabei entspricht der Gleichung

$$x^2 = 0 \tag{20.}$$

der geometrische Ort der Doppelpunkte OY;

$$x + a = 0 \tag{21.}$$

ist die Gleichung der allen Integralkurven gemeinsamen Asymptote GH, die als ein Teil der Umhüllungskurve anzusehen ist, und

$$x - a = 0 \tag{22.}$$

ist die Gleichung der Geraden CE, welche den anderen Teil der Umhüllungskurve ausmacht.

Umgekehrt läßt sich auch zeigen, daß zwischen der *allgemeinen* Lösung

$$G(x, y, C) = 0 \tag{23.}$$

und der *singulären* Lösung

(24.) $$S(x, y) = 0$$

einer Differential-Gleichung erster Ordnung immer der Zusammenhang besteht, daß $S(x, y) = 0$ die Gleichung der Umhüllungskurve für die von der Gleichung (23.) dargestellte Kurvenschar ist. Durch Differentiation der Gleichung (23.) erhält man nämlich

(25.) $$\frac{dG}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} = G_1 + G_2\frac{dy}{dx} = 0,$$

also

(26.) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{G_1(x, y, C)}{G_2(x, y, C)}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung wird im allgemeinen noch die Konstante C enthalten. Damit dieser Wert von $\frac{dy}{dx}$ in den durch Gleichung (2a.) vorgeschriebenen, nämlich in $-\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$, übergeht, muß man also den Wert von C aus Gleichung (23.) ausrechnen und in Gleichung (26.) einsetzen. Bringt man z. B. Gleichung (23.) auf die Form

(23a.) $$C = \varphi(x, y),$$

so geht Gleichung (26.) über in

(27.) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{G_1[x, y, \varphi(x, y)]}{G_2[x, y, \varphi(x, y)]} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}.$$

Es ist nun die Frage, wie es möglich ist, daß man aus irgend einer anderen Gleichung

(28.) $$S(x, y) = 0$$

denselben Wert von $\frac{dy}{dx}$ erhält?

Bestimmt man zur Beantwortung dieser Frage jetzt die Größe C so, daß für *alle* Werte von x und y

(29.) $$G(x, y, C) = S(x, y)$$

wird, so ergibt sich hieraus die Gleichung

(30.) $$C = \psi(x, y).$$

Dabei sind die Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ möglicherweise zunächst *voneinander verschieden*; da aber nur Punkte der Kurve

$$S(x, y) = 0,$$

d. h. nur solche Werte von x und y in Betracht kommen, für welche $S(x, y)$ und deshalb nach Gleichung (29.) auch $G(x, y, C)$ verschwindet, so werden die Werte von $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ für die betrachteten Werte von x und y *einander gleich*, so daß man

$$C = \psi(x, y) = \varphi(x, y)$$

und

(31.) $$G(x, y, C) = G[x, y, \varphi(x, y)] = 0$$

erhält. Durch Differentiation findet man hieraus, indem man y und C als Funktionen von x betrachtet,

(32.) $$\frac{dG}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial C}\frac{dC}{dx} = 0.$$

Damit nun diese Gleichung denselben, durch Gleichung (2a.) vorgeschriebenen Wert von $\frac{dy}{dx}$ liefert wie Gleichung (27.), muß

(33.) $$\frac{\partial G}{\partial C}\frac{dC}{dx} = 0$$

sein. Dies ist aber nur möglich, wenn *entweder*

(34.) $$\frac{dC}{dx} = 0$$

ist, wenn also C wirklich eine *Konstante* ist, *oder* wenn

(35.) $$\frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

wird. Gilt Gleichung (34.), so erhält man das *allgemeine* Integral, gilt dagegen Gleichung (35.), so braucht C keine Konstante zu sein; man findet dann durch Elimination von C aus den Gleichungen (31.) und (35.) eine Gleichung

$$H(x, y) \,.\, S(x, y) = 0,$$

welche in der Regel mit Gleichung (28.) gleichbedeutend ist oder diese Gleichung als besonderen Fall einschließt, d. h. man findet die *singuläre Lösung*. Die *allgemeine* Lösung stellt daher immer eine Schar von Kurven dar, welche die der *singulären* Lösung

$$S(x, y) = 0$$

entsprechende Kurve zur *Umhüllungskurve* haben.

§ 100.

Ableitung der singulären Lösung aus der Differential-Gleichung selbst.

Die singuläre Lösung der Differential-Gleichung ergibt sich im allgemeinen ohne Integration, man findet sie z. B. auch durch die folgende Überlegung.

Bezeichnet man der Kürze wegen $\frac{dy}{dx}$ wieder mit p, so hat die vorgelegte Differential-Gleichung die Form

$$F(x, y, p) = 0. \tag{1.}$$

Soll P ein Punkt der Umhüllungskurve sein, so kann er als Schnittpunkt zweier unendlich nahen Integralkurven betrachtet werden, d. h. durch den Punkt P gehen zwei unendlich nahe Integralkurven hindurch und haben in diesem Punkte dieselbe Tangente, so daß die zugehörigen Werte von

$$p = \frac{dy}{dx}$$

einander gleich sind. Das gibt wieder nach § 112 der D.-R. die Bedingung, daß neben der Gleichung (1.) noch die Gleichung

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0 \tag{2.}$$

befriedigt wird. Eliminiert man also aus den Gleichungen (1.) und (2.) die Größe p, so erhält man eine Gleichung

$$E(x, y) = 0, \tag{3.}$$

welche entweder mit der singulären Lösung

$$S(x, y) = 0$$

übereinstimmt, oder bei der doch wenigstens $S(x, y)$ ein Faktor der Diskriminante $E(x, y)$ ist.

Der Gleichung (3.) genügen nämlich nach den vorstehenden Ausführungen nicht nur die Koordinaten der auf der Umhüllungskurve liegenden Punkte, sondern auch die Koordinaten der auf den Integralkurven liegenden Spitzen und außerdem auch die Koordinaten derjenigen Punkte, in denen sich je zwei (nicht einander unendlich

nahe liegende) Integralkurven berühren, in denen also diese beiden Kurven dieselbe Tangente haben.

Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$F(x, y, p) = (y - b)p^2 - 4 = 0 \tag{4.}$$

integrieren.

Auflösung. Aus Gleichung (4.) folgt

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{y - b}, \tag{5.}$$

also

$$3(x + C) = \pm (y - b)\sqrt{y - b}, \tag{6.}$$

oder

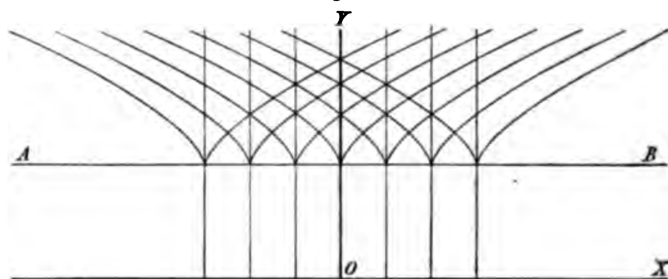
$$G(x, y, C) = 9(x + C)^2 - (y - b)^3 = 0. \tag{7.}$$

Diese Gleichung stellt eine Schar von Kurven dar, von denen jede im Punkte mit den Koordinaten

$$x = -C, \quad y = b \tag{8.}$$

eine Spitze hat. (Vergl. Fig. 145.)

Fig. 145.



Durch Elimination von C aus Gleichung (7.) und aus der Gleichung

$$\frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = 18(x + C) = 0 \tag{9.}$$

findet man

$$-(y - b)^3 = 0. \tag{10.}$$

Dies ist aber nicht die Gleichung der Umhüllungskurve, sondern die Gleichung der Geraden, auf der alle Spitzen liegen.

Dieselbe Gerade, nämlich

(11.) $$M^2 - LN = 4(y - b) = 0,$$

findet man, wenn man aus Gleichung (4.), d. h. aus

$$Lp^2 + 2Mp + N = (y - b)p^2 - 4 = 0$$

und aus

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 2(Lp + M) = 0$$

die Größe p eliminiert.

Aufgabe 2. Durch die Gleichung

(12.) $$G(x, y, C) = (x - b\cos C)^2 + (y - b\sin C)^2 - a^2 = 0$$

ist eine Schar von Kreisen mit dem Halbmesser a gegeben, deren Mittelpunkte einen Kreis mit dem Halbmesser b um den Nullpunkt beschreiben (Fig. 146); man soll die Umhüllungskurve bestimmen und die Differential-Gleichung aufsuchen, der die sämtlichen Kreise der Schar genügen.

Auflösung. Um die Umhüllungskurve zu bestimmen, eliminiere man aus Gleichung (12.) und aus der Gleichung

(13.) $$\frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = 2(x - b\cos C)b\sin C - 2(y - b\sin C)b\cos C = 0$$

oder

(13a.) $$x\sin C - y\cos C = 0, \quad y = x\,\mathrm{tg}\,C$$

die Größe C. Dies gibt

$$(x - b\cos C)^2(1 + \mathrm{tg}^2 C) = a^2,$$

oder

(14.) $x = (b \pm a)\cos C,$

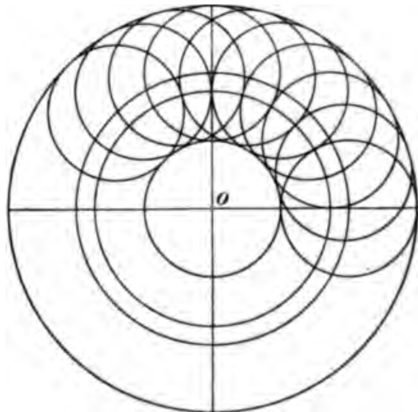
(15.) $y = (b \pm a)\sin C;$

folglich wird

(16.) $x^2 + y^2 = (b \pm a)^2,$

d. h. die Umhüllungskurve besteht aus zwei Kreisen, von denen der eine mit dem Halbmesser $b + a$, und der andere mit dem Halbmesser $b - a$ um den Nullpunkt beschrieben ist.

Fig. 146.



Aus Gleichung (12.) folgt ferner

$$(17.)\quad \frac{dG(x, y, C)}{dx} = 2(x - b\cos C) + 2(y - b\sin C)p = 0,$$

also

$$(18.)\quad x - b\cos C = -(y - b\sin C)p.$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung (12.) ein, so erhält man

$$(y - b\sin C)^2(p^2 + 1) = a^2,$$

also

$$(19.)\quad y - b\sin C = \pm\frac{a}{\sqrt{1 + p^2}}, \text{ oder } b\sin C = y \mp \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$(20.)\quad x - b\cos C = \mp\frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}, \text{ oder } b\cos C = x \pm \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Erhebt man die Gleichungen rechts ins Quadrat, so findet man durch Addition

$$(21.)\quad b^2 = x^2 + y^2 + a^2 \mp \frac{2a(y - px)}{\sqrt{1 + p^2}},$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(22.)\quad x^2 + y^2 + a^2 - b^2 = A$$

setzt,

$$\pm 2a(y - px) = A\sqrt{1 + p^2}.$$

Dies gibt

$$(23.)\quad A^2(1 + p^2) - 4a^2(y - px)^2 = 0,$$

oder

$$(23\text{a}.)\quad F(x, y, p) = Lp^2 + 2Mp + N = 0,$$

wobei

$$(24.)\quad L = A^2 - 4a^2x^2,\quad M = 4a^2xy,\quad N = A^2 - 4a^2y^2.$$

Durch Elimination von p aus den Gleichungen

$$F(x, y, p) = 0 \quad\text{und}\quad \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0$$

erhält man

$$(25.)\quad M^2 - LN = 16a^4x^2y^2 - A^4 + 4a^2(x^2 + y^2)A^2 - 16a^4x^2y^2$$
$$= -A^2[A^2 - 4a^2(x^2 + y^2)] = 0.$$

Dabei ist

$$A^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2 - 2(b^2 + a^2)(x^2 + y^2) + (b^2 - a^2)^2$$
$$= [x^2 + y^2 - (b + a)^2][x^2 + y^2 - (b - a)^2].$$

Deshalb geht Gleichung (25.) über in

5a.) $$-(x^2+y^2+a^2-b^2)^2 \cdot [x^2+y^2-(b+a)^2] \cdot [x^2+y^2-(b-a)^2] = 0.$$

Setzt man hierbei den zweiten oder dritten Faktor eich Null, so erhält man die beiden durch Gleichung (16.) reits gegebenen Teile der Umhüllungskurve; setzt man gegen den ersten Faktor gleich Null, so erhält man die eichung

5.) $$x^2+y^2=b^2-a^2,$$

h. die Gleichung eines Kreises, der mit dem Halbmesser $\sqrt{b^2-a^2}$ um den Nullpunkt beschrieben ist und alle Punkte thält, in denen sich je zwei Kreise der gegebenen Kreishar berühren. (Vergl. Fig. 146.)

Aufgabe 3. Es ist die Differential-Gleichung

7.) $$(a+x)^3(x-a)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2+ax-a^2)^2=0$$

geben; man soll den geometrischen Ort der Punkte bemmen, in denen sich die Integralkurven gegenseitig behren.

Auflösung. Die Gleichung (27.) hat die Form

7a.) $$F(x,y,p)=Lp^2+2Mp+N=0,$$

bei

8.) $$L=(a+x)^3(x-a), \quad M=0, \quad N=(x^2+ax-a^2)^2.$$

Die Integralkurven haben nach dem Beispiel in § 99 e Gleichung

9.) $$G(x,y,C)=x^2(x-a)+(x+a)(y+C)^2=0.$$

(Vergl. Fig. 144.)

Eliminiert man aus den Gleichungen

$$F(x,y,p)=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=0$$

e Größe p, so erhält man

0.) $$M^2-LN=-(a+x)^3(x-a)(x^2+ax-a^2)^2=0.$$

Setzt man hierbei die ersten beiden Faktoren gleich ull, so erhält man die aus den beiden Geraden

$$x=-a \quad \text{und} \quad y=+a$$

bestehende Umhüllungskurve. Dagegen gibt die Gleichung

(31.) $x^2 + ax - a^2 = 0$, oder $x = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5}$

die Gerade DF, in deren Punkten sich je zwei von den Integralkurven einander berühren.

Die Lösung

$$x = -\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

ist eine Gerade, auf der reelle Punkte der Integralkurven überhaupt nicht mehr liegen.

§ 101.

Singuläre Lösungen. Übungs-Beispiele.

Schon in § 98 sind zwei Differential-Gleichungen integriert worden, die eine singuläre Lösung zulassen. In Aufgabe 5 hatte man für die Differential-Gleichung

(1.) $$yp^2 - 2xp + y = 0$$

das *allgemeine* Integral

(2.) $$G(x, y, C) = y^2 - 2Cx + C^2 = 0$$

gefunden. Die Umhüllungskurve (Enveloppe) erhält man durch Elimination von C aus Gleichung (2.) und aus der Gleichung

(3.) $$\frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = -2x + 2C = 0, \quad \text{oder} \quad C = x.$$

Dies gibt

(4.) $$y^2 - x^2 = 0, \quad \text{oder} \quad y = \pm x.$$

Die Gleichung der Umhüllungskurve stimmt also überein mit der singulären Lösung der Differential-Gleichung.

In Aufgabe 6 hatte man für die Differential-Gleichung

(5.) $$y = px - \frac{cp}{\sqrt{1 + p^2}}$$

das *allgemeine* Integral

(6.) $$G(x, y, C) = y - Cx + \frac{cC}{\sqrt{1 + C^2}} = 0$$

gefunden. Die Gleichung der Kurve, welche von diesen geraden Linien eingehüllt wird, erhält man, indem man C aus der Gleichung (6.) und aus der Gleichung

$$(7.)\quad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = -x + \frac{c}{(1 + C^2)\sqrt{1 + C^2}} = 0$$

eliminiert. Setzt man dabei wieder

$$(8.)\quad C = -\operatorname{tg} t, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}} = \cos t, \quad \frac{C}{\sqrt{1 + C^2}} = -\sin t,$$

so folgt aus den Gleichungen (6.) und (7.)

$$(9.)\quad x = c\cos^3 t, \quad y = c\sin^3 t,$$

oder

$$(10.)\quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}.$$

Die Gleichung der Umhüllungskurve, welche in diesem Falle ein Astroide ist, gibt also die *singuläre* Lösung der Differential-Gleichung.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(11.)\quad y^2 - 2xyp + (1 + x^2)p^2 = 1$$

integrieren.

Auflösung. Indem man Gleichung (11.) nach y auflöst, erhält man die *Clairaut*sche Gleichung

$$(12.)\quad y = xp \pm \sqrt{1 - p^2};$$

daraus folgt durch Differentiation

$$(13.)\quad p = p + x\frac{dp}{dx} \mp \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}}\frac{dp}{dx},$$

oder

$$(13a.)\quad \left(x \mp \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}}\right)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man *entweder*

$$(14.)\quad \frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{also} \quad p = \frac{dy}{dx} = C,$$

oder

$$(15.)\quad x \mp \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}} = 0, \quad \text{also} \quad \pm\sqrt{1 - p^2} = \frac{p}{x}$$

setzt. Gleichung (14.) gibt das *allgemeine* Integral; indem man nämlich den gefundenen Wert von p in Gleichung (11.) einsetzt, erhält man

(16.) $G(x, y, C) = y^2 - 2Cxy + C^2(1 + x^2) - 1 = 0,$
oder
(16a.) $$y = Cx \pm \sqrt{1 - C^2},$$
also eine Schar von geraden Linien.

Aus Gleichung (15.) dagegen ergibt sich die *singuläre* Lösung, und zwar erhält man mit Rücksicht auf Gleichung (12.)

(17.) $$y = xp + \frac{p}{x} = \frac{p}{x}(1 + x^2), \quad p = \frac{xy}{1 + x^2},$$

oder, wenn man diesen Wert von p in Gleichung (11.) einsetzt,

$$y^2 - \frac{2x^2y^2}{1 + x^2} + \frac{x^2y^2}{1 + x^2} = 1,$$

oder

(18.) $$y^2 - x^2 = 1.$$

Dieselbe Gleichung findet man aber auch, wie man ohne weiteres erkennt, wenn man die Umhüllungskurve der durch die *allgemeine* Lösung in Gleichung (16.) dargestellten Kurvenschar bestimmt. Dies geschieht durch Elimination von C aus Gleichung (16.) und aus

(19.) $$\frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = -2xy + 2C(1 + x^2) = 0, \text{ oder } C = \frac{xy}{1 + x^2}.$$

Dieses Beispiel führte *Taylor* auf die Entdeckung der singulären Lösungen.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

(20.) $$ydx - xdy \pm a\sqrt{dx^2 + dy^2} = 0$$

integrieren.

Auflösung. Die gegebene Differential-Gleichung ist wieder eine *Clairaut*sche Gleichung, denn man kann sie auf die Form

(21.) $$y = px \mp a\sqrt{1 + p^2}$$

bringen, aus der durch Differentiation

$$p = p + x\frac{dp}{dx} \mp a\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\frac{dp}{dx},$$

oder

(22.) $$\left(x \mp \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

folgt. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man

(23.) $$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{also} \quad p = \frac{dy}{dx} = C$$

setzt. Trägt man diesen Wert von p in die Gleichung (21.) ein, so erhält man

$$y = Cx \mp a\sqrt{1 + C^2},$$

oder

(24.) $$G(x, y, C) = y^2 - 2Cxy + C^2x^2 - a^2(1 + C^2) = 0.$$

Dies ist die *allgemeine* Lösung der gegebenen Differential-Gleichung. Die *singuläre* Lösung findet man aus Gleichung (22.), indem man

(25.) $$x \mp \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} = 0, \quad \text{oder} \quad \pm\sqrt{1 + p^2} = \frac{ap}{x}$$

setzt. Dies gibt in Verbindung mit Gleichung (21.)

(26.) $$y = px - \frac{a^2p}{x} = \frac{p}{x}(x^2 - a^2), \quad \text{oder} \quad p = \frac{xy}{x^2 - a^2}.$$

Bringt man Gleichung (21.) noch auf die Form

$$y^2 - 2xyp + x^2p^2 = a^2(1 + p^2),$$

oder

(27.) $$y^2 - 2xyp + (x^2 - a^2)p^2 - a^2 = 0$$

und setzt den eben gefundenen Wert von p ein, so erhält man

(28.) $$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Dieselbe Gleichung findet man aber auch, wie man ohne weiteres erkennt, wenn man die Umhüllungskurve der durch die *allgemeine* Lösung in Gleichung (24.) dargestellten Schar gerader Linien bestimmt. Dies geschieht durch Elimination von C aus Gleichung (24.) und aus

(29.) $$\frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = -2xy + 2C(x^2 - a^2) = 0, \quad \text{oder} \quad C = \frac{xy}{x^2 - a^2}.$$

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

(30.) $$(xp - y)(x - yp) = 2p$$

integrieren.

Auflösung. Setzt man

(31.) $$x^2 = z + t, \quad y^2 = z - t, \quad \text{also} \quad 2z = x^2 + y^2, \quad 2t = x^2 - y^2,$$

$$(32.)\quad \begin{cases} dz = xdx + ydy = (x + yp)dx, \\ dt = xdx - ydy = (x - yp)dx, \end{cases}$$

also, wenn man der Kürze wegen $\frac{dz}{dt}$ mit p_1 bezeichnet,

$$(33.)\quad \frac{dz}{dt} = p_1 = \frac{x + yp}{x - yp}; \quad p = \frac{x(p_1 - 1)}{y(p_1 + 1)}.$$

Dies gibt

$$(34.)\quad \begin{cases} xp - y = \frac{p_1(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)}{y(p_1 + 1)} = \frac{2p_1t - 2z}{y(p_1 + 1)}, \\ x - yp = \frac{2xy}{y(p_1 + 1)}. \end{cases}$$

Trägt man diese Werte in Gleichung (30.) ein, so erhält man

$$\frac{4xy(p_1t - z)}{y^2(p_1 + 1)^2} = 2\frac{x(p_1 - 1)}{y(p_1 + 1)},$$

oder

$$2(p_1t - z) = p_1^2 - 1,$$

also

$$(35.)\quad z = p_1t + \frac{1 - p_1^2}{2}.$$

Indem man diese Gleichung, die wieder eine *Clairaut*sche ist, nach t differentiiert, findet man

$$p_1 = p_1 + t\frac{dp_1}{dt} - p_1\frac{dp_1}{dt},$$

oder

$$(36.)\quad (t - p_1)\frac{dp_1}{dt} = 0.$$

Hieraus folgt das *allgemeine* Integral, indem man

$$(37.)\quad \frac{dp_1}{dt} = 0, \quad \text{also} \quad p_1 = C$$

setzt und in die Gleichung (35.) einträgt. Dies gibt

$$(38.)\quad 2z - 2Ct = 1 - C^2,$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen (31.)

$$(39.)\quad G(x, y, C) = x^2 + y^2 - C(x^2 - y^2) - 1 + C^2 = 0,$$

oder

$$(40.)\quad \frac{x^2}{1 + C} + \frac{y^2}{1 - C} = 1.$$

Dieser Gleichung entspricht eine Schar konzentrischer Ellipsen und Hyperbeln.

Die *singuläre* Lösung findet man, wenn man in Gleichung (36.) den Faktor

(41.) $$t - p_1 = 0, \quad \text{also} \quad p_1 = t$$

setzt und in Gleichung (35.) einträgt. Dies gibt

(42.) $$t^2 - 2t^2 + 2z - 1 = 0,$$

oder

(43.) $$t^2 - 2z + 1 = 0,$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen (31.)

(44.) $$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 4x^2 - 4y^2 + 4 = 0,$$

oder

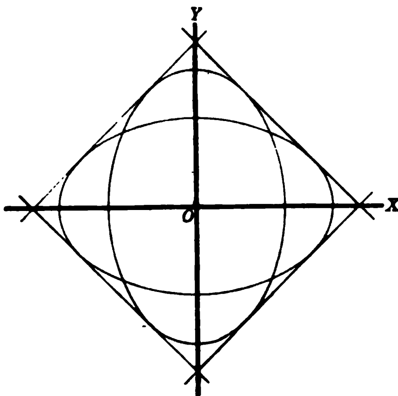
(44a.) $$(x+y+\sqrt{2})(x+y-\sqrt{2})(x-y+\sqrt{2})(x-y-\sqrt{2}) = 0.$$

Dieselbe Gleichung findet man, wenn man die Umhüllungskurve der durch Gleichung (39.) dargestellten Kurvenschar bestimmt, indem man aus dieser Gleichung und aus

(45.) $$\frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = -(x^2 - y^2) + 2C = 0, \quad \text{oder} \quad C = \frac{x^2 - y^2}{2}$$

den variablen Parameter C eliminiert.

Fig. 147.



Der Gleichung (44.) oder (44a.) entspricht ein System von 4 geraden Linien (Fig. 147), die sämtliche Kurven der durch Gleichung (40.) gegebenen Kurvenschar berühren. Gleichzeitig stellt jede dieser geraden Linien eine *singuläre* Lösung der vorgelegten Differential-Gleichung dar. Setzt man z. B

(46.) $$x - y + \sqrt{2} = 0, \quad \text{oder} \quad y = x + \sqrt{2},$$

also

(47.) $$p = 1,$$

und trägt diese Werte in die Gleichung (30.) ein, so erhält man

$$(x - x - \sqrt{2})(x - x - \sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 = 2$$

und erkennt, daß Gleichung (30.) durch diesen Wert von y befriedigt wird.

§ 102.

Isogonale Trajektorien.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 227 und 228.)

Wenn eine Schar von Kurven durch die Gleichung

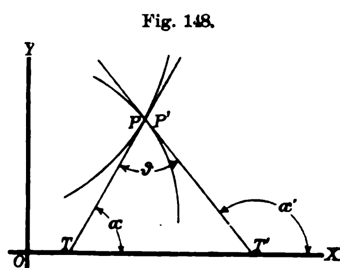
(1.) $$F(x, y, u) = 0$$

mit dem *variablen Parameter u* gegeben ist, und wenn die sämtlichen Kurven dieser Kurvenschar von einer anderen Kurve nach einem bestimmten Gesetze geschnitten werden, so nennt man diese schneidende Kurve „eine *Trajektorie*" der gegebenen Kurvenschar.

Unter den Trajektorien sind besonders bemerkenswert die *isogonalen Trajektorien*, welche die sämtlichen Kurven einer Kurvenschar unter einem gegebenen Winkel ϑ schneiden. Ist dieser Winkel ϑ ein *rechter* Winkel, so nennt man die schneidende Kurve „eine *orthogonale* oder *rechtwinklige Trajektorie*".

Um die Differential-Gleichung zu finden, welcher die isogonalen Trajektorien genügen müssen, gebe man dem variablen Parameter u in Gleichung (1.) zunächst einen bestimmten Wert, d. h. man greife aus der gegebenen Schar eine bestimmte Kurve heraus. Der Winkel, welchen die Tangente dieser Kurve (Fig. 148) im Punkte P mit der positiven Richtung der X-Achse bildet, sei α, dann ist nach D.-R., Formel Nr. 17 und 131 der Tabelle

Fig. 148.



(2.) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x, y, u)}{F_2(x, y, u)},$$

wobei die partiellen Ableitungen von $F(x, y, u)$ nach x und y bezw. mit $F_1(x, y, u)$ und $F_2(x, y, u)$ bezeichnet worden sind. Nennt man nun die laufenden Koordinaten der isogonalen Trajektorie x', y' und den Winkel, welchen die Tangente dieser Trajektorie im Punkte P' mit der positiven Richtung der X-Achse bildet, α', so ist

$$\text{(3.)} \qquad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{dy'}{dx'}.$$

Damit nun diese beiden Tangenten den Winkel ϑ miteinander bilden, muß

$$\text{(4.)} \qquad \alpha' = \alpha + \vartheta$$

sein. Dies gibt

$$\text{(5.)} \qquad \operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}(\alpha + \vartheta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\vartheta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\vartheta},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (2.) und (3.)

$$\text{(6.)} \qquad \frac{dy'}{dx'} = \frac{-\dfrac{F_1(x, y, u)}{F_2(x, y, u)} + \operatorname{tg}\vartheta}{1 + \dfrac{F_1(x, y, u)}{F_2(x, y, u)}\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{F_2\operatorname{tg}\vartheta - F_1}{F_2 + F_1\operatorname{tg}\vartheta},$$

wobei der Kürze wegen F_1 und F_2 statt $F_1(x, y, u)$ und $F_2(x, y, u)$ gesetzt ist. Multipliziert man auf der rechten Seite dieser Gleichung noch Zähler und Nenner mit $\cos\vartheta$, so erhält man

$$\text{(7.)} \qquad \frac{dy'}{dx'} = \frac{F_2\sin\vartheta - F_1\cos\vartheta}{F_2\cos\vartheta + F_1\sin\vartheta}.$$

Jetzt wird aber verlangt, daß die Tangenten an die beiden Kurven in einem Schnittpunkt derselben gelegt sind, d. h. die Punkte P und P' müssen zusammenfallen, wie es in Figur 148 bereits angenommen worden ist; es wird also

$$x' = x, \quad y' = y,$$

so daß Gleichung (7.) übergeht in die Gleichung

$$\text{(8.)} \qquad (F_1\cos\vartheta - F_2\sin\vartheta)dx + (F_1\sin\vartheta + F_2\cos\vartheta)dy = 0.$$

Im allgemeinen werden hierbei F_1 und F_2 noch Funktionen von u sein, so daß die Kurve, für welche die Differential-Gleichung (8.) gilt, nur diese *eine*, dem bestimmten

Werte von u entsprechende Kurve unter dem Winkel ϑ schneidet.

Damit *sämtliche* Kurven der gegebenen Kurvenschar unter dem Winkel ϑ geschnitten werden, muß man Gleichung (1.) in bezug auf u auflösen und den gefundenen Wert von u in Gleichung (8.) einsetzen, oder man muß, was auf dasselbe hinauskommt, aus den Gleichungen (1.) und (8.) die Größe u eliminieren. Dadurch erhält man eine Gleichung

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{9.}$$

welche die Differential-Gleichung der gesuchten *isogonalen Trajektorie* ist.

Bei der Integration dieser Differential-Gleichung erster Ordnung tritt eine Integrations-Konstante C auf, die man noch *willkürlich* bestimmen kann. Deshalb gibt es zu der Kurvenschar

$$F(x, y, u) = 0$$

eine *ganze Schar* isogonaler Trajektorien.

Bei den *orthogonalen* Trajektorien ist ϑ ein rechter Winkel, dann wird also

$$\sin\vartheta = 1, \quad \cos\vartheta = 0, \tag{10.}$$

so daß Gleichung (8.) übergeht in

$$-F_2 dx + F_1 dy = 0. \tag{11.}$$

Die Differential-Gleichung der orthogonalen Trajektorien findet man also, indem man aus den Gleichungen (1.) und (11.) den variablen Parameter u eliminiert.

§ 103.

Übungs-Aufgaben.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 229 bis 233.)

Aufgabe 1. Durch die Gleichung

$$F(x, y, u) = y - ux = 0 \tag{1.}$$

ist eine Schar von geraden Linien gegeben, welche sämt-

lich durch den Nullpunkt hindurchgehen; man soll die Gleichung der Trajektorien aufsuchen, welche alle diese Geraden unter dem Winkel ϑ schneiden.

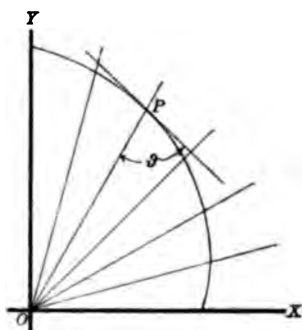


Fig. 149.

Auflösung. Aus Gleichung (1.) folgt durch partielle Differentiation

(2.) $F_1 = -u, \quad F_2 = 1,$

deshalb findet man aus Formel Nr. 227 der Tabelle für die isogonalen Trajektorien die Differential-Gleichung

(3.) $(-u\cos\vartheta - \sin\vartheta)dx + (-u\sin\vartheta + \cos\vartheta)dy = 0,$

wobei aber noch nach Gleichung (1.)

(4.) $$u = \frac{y}{x}$$

zu setzen ist. Dies gibt

(5.) $(-y\cos\vartheta - x\sin\vartheta)dx + (-y\sin\vartheta + x\cos\vartheta)dy = 0,$

oder, wenn man durch $-\sin\vartheta$ dividiert,

(5a.) $$(xdx + ydy) + \operatorname{ctg}\vartheta(ydx - xdy) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung wird ein vollständiges Differential, wie aus den Bemerkungen in § 96, Seite 524 hervorgeht, wenn man mit dem integrierenden Faktor $\frac{1}{x^2 + y^2}$ multipliziert, und zwar erhält man aus

(6.) $$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$$

nach den damals angegebenen Regeln

(7.) $$\ln(\sqrt{x^2 + y^2}) - \operatorname{ctg}\vartheta \,.\, \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln C.$$

Diese Gleichung wird noch wesentlich einfacher durch Einführung von Polarkoordinaten, indem man

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \text{also} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r, \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi$$

setzt und den konstanten Faktor $\operatorname{ctg}\vartheta$ mit a bezeichnet. Dadurch geht Gleichung (7.) über in

(8.) $$\ln r = \ln C + a\varphi = \ln(C \,.\, e^{a\varphi}),$$
oder
(9.) $$r = C \,.\, e^{a\varphi}.$$

Dies ist die Gleichung der *logarithmischen Spirale*, welche für die verschiedenen Werte der Integrations-Konstanten C verschiedene Lagen einnimmt.

In dem Falle, wo ϑ gleich 90^0 ist, wird $\operatorname{ctg}\vartheta = 0$, so daß dann Gleichung (7.) übergeht in

(10.) $$\ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \ln C, \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = C^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Schar *konzentrischer Kreise*.

Aufgabe 2. Durch die Gleichung

(11.) $$F(x, y, u) = x^2 - 2u(y - x\sqrt{3}) = 0$$

ist eine Schar von Parabeln gegeben; man soll diejenigen Kurven aufsuchen, welche alle diese Parabeln unter einem Winkel von $\pm 60^0$ schneiden.

Auflösung. Hier ist

(12.) $$\vartheta = \pm 60^0, \quad \text{also} \quad \sin\vartheta = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos\vartheta = \tfrac{1}{2},$$

(13.) $$F_1 = 2x + 2u\sqrt{3}, \quad F_2 = -2u,$$

folglich findet man nach Formel Nr. 227 der Tabelle für die isogonalen Trajektorien die Differential-Gleichung

(14.) $$(x + u\sqrt{3} \pm u\sqrt{3})dx + [\pm(x + u\sqrt{3})\sqrt{3} - u]dy = 0.$$

Für das *obere* Zeichen erhält man daher

(15.) $$(x + 2u\sqrt{3})dx + (x\sqrt{3} + 2u)dy = 0,$$

wobei aber nach Gleichung (11.)

(16.) $$2u = \frac{x^2}{y - x\sqrt{3}}$$

einzusetzen ist. Dies gibt

$$\left(x + \frac{x^2\sqrt{3}}{y - x\sqrt{3}}\right)dx + \left(x\sqrt{3} + \frac{x^2}{y - x\sqrt{3}}\right)dy = 0,$$

oder, wenn man diese Gleichungen mit $\frac{y - x\sqrt{3}}{x}$ multipliziert,

(17.) $$ydx + (y\sqrt{3} - 2x)dy = 0.$$

Da in dieser Gleichung die Koeffizienten von dx und dy homogene Funktionen gleichen Grades sind, so setze man

(18.) $$y = xz, \quad dy = xdz + zdx.$$

Dadurch erhält man, wenn man Gleichung (17.) noch durch x dividiert,

$$zdx + (z\sqrt{3} - 2)(xdz + zdx) = 0,$$

oder

(19.) $$(z^2\sqrt{3} - z)dx + (z\sqrt{3} - 2)xdz = 0,$$

(20.) $$\frac{dx}{x} = -\frac{(z\sqrt{3} - 2)dz}{z(z\sqrt{3} - 1)} = -\frac{2dz}{z} + \frac{\sqrt{3}dz}{z\sqrt{3} - 1},$$

also

(21.) $$\ln x = \ln(z\sqrt{3} - 1) - 2\ln z + \ln C,$$

oder

(22.) $$xz^2 = C(z\sqrt{3} - 1).$$

Dies gibt mit Rücksicht auf die Gleichungen (18.)

(23.) $$y^2 = C(y\sqrt{3} - x).$$

Diese Gleichung stellt ebenfalls eine *Schar von Parabeln* dar, und zwar geht Gleichung (11.) in Gleichung (23.) über, wenn man x mit y und $2u$ mit $-C$ vertauscht.

Wenn man dagegen in Gleichung (14.) das *untere* Zeichen beachtet, so erhält man

(24.) $$xdx - (x\sqrt{3} + 4u)dy = 0,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (16.)

$$xdx - \left(x\sqrt{3} + \frac{2x^2}{y - x\sqrt{3}}\right)dy = 0,$$

also, wenn man diese Gleichung mit $\frac{y - x\sqrt{3}}{x}$ multipliziert,

(25.) $$(y - x\sqrt{3})dx - (y\sqrt{3} - x)dy = 0.$$

Auch hier sind die Koeffizienten von dx und dy homogene Funktionen gleichen Grades, folglich wendet man wieder die in den Gleichungen (18.) angegebene Substitution an und erhält

$$(z - \sqrt{3})dx - (z\sqrt{3} - 1)(xdz + zdx) = 0,$$

oder

$$(26.)\qquad (z^2\sqrt{3} - 2z + \sqrt{3})dx + (z\sqrt{3} - 1)xdz = 0,$$

$$(27.)\qquad \frac{dx}{x} = -\frac{(z\sqrt{3} - 1)dz}{z^2\sqrt{3} - 2z + \sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\frac{d(z^2\sqrt{3} - 2z + \sqrt{3})}{z^2\sqrt{3} - 2z + \sqrt{3}};$$

folglich wird

$$\ln(x^2) + \ln(z^2\sqrt{3} - 2z + \sqrt{3}) = \ln C,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (18.)

$$(28.)\qquad (x^2 + y^2)\sqrt{3} - 2xy = C.$$

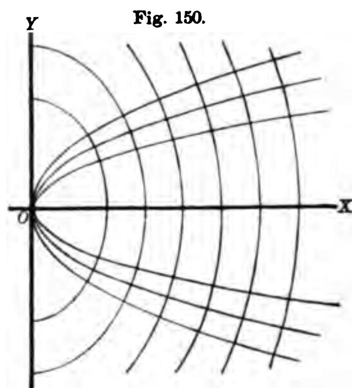
Dies ist die Gleichung einer Schar von *ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen*, deren Achsen die Winkel zwischen den Koordinaten-Achsen halbieren.

Aufgabe 3. Durch die Gleichung

$$(29.)\qquad F(x, y, u) = y^2 - ux = 0$$

ist eine Schar von *Parabeln* mit gleichem Scheitel und gleicher Achse gegeben (Fig. 150); man soll die rechtwinkligen (*orthogonalen*) Trajektorien ermitteln.

Fig. 150.



Auflösung. Hier ist

$$(30.)\qquad F_1 = -u, \quad F_2 = 2y,$$

folglich findet man nach Formel Nr. 228 der Tabelle

$$(31.)\qquad 2ydx + udy = 0,$$

wobei aber nach Gleichung (29.)

$$(32.)\qquad u = \frac{y^2}{x}$$

zu setzen ist. Dies gibt

$$(33.)\qquad 2ydx + \frac{y^2}{x}dy = 0, \quad \text{oder} \quad 2xdx + ydy = 0.$$

Daraus folgt durch Integration

$$(34.)\qquad 2x^2 + y^2 = a^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Schar von *ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen.*

Aufgabe 4. Durch die Gleichung

$$(35.)\qquad F(x, y, u) = \frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} - 1 = 0$$

ist eine Schar *konfokaler Ellipsen* gegeben, wobei der variable Parameter u alle Werte von $-b^2$ bis $+\infty$ durchläuft. Wenn dagegen u alle Werte von $-a^2$ bis $-b^2$ durchläuft, so stellt Gleichung (35.) eine Schar *konfokaler Hyperbeln* dar. Man soll für beide Fälle die rechtwinkligen (*orthogonalen*) Trajektorien bestimmen.

Auflösung. Hier ist

$$F_1 = \frac{2x}{a^2+u}, \quad F_2 = \frac{2y}{b^2+u}, \tag{36.}$$

folglich findet man nach Formel Nr. 228 der Tabelle für die orthogonalen Trajektorien die Differential-Gleichung

$$-\frac{ydx}{b^2+u} + \frac{xdy}{a^2+u} = 0, \tag{37.}$$

wobei man noch den variablen Parameter u aus den Gleichungen (35.) und (37.) in folgender Weise eliminieren kann. Aus Gleichung (37.) findet man

$$\frac{y^2}{b^2+u} = \frac{xyp}{a^2+u}; \tag{38.}$$

setzt man diesen Wert in Gleichung (35.) ein und bezeichnet man $a^2 - b^2$ mit e^2, so erhält man

$$a^2+u = x(x+yp), \quad b^2+u = a^2+u-e^2 = x(x+yp)-e^2, \tag{39.}$$

und wenn man diese Werte in Gleichung (35.) einsetzt,

$$\frac{x}{x+yp} + \frac{y^2}{x(x+yp)-e^2} = 1,$$

oder

$$(x+yp)(y-xp) = -e^2p. \tag{40.}$$

Diese Differential-Gleichung für die orthogonalen Trajektorien läßt sich ähnlich behandeln wie die in § 101, Aufgabe 3. Man setze nämlich

$$x^2 = z+t, \quad y^2 = z-t, \quad \text{also} \quad 2z = x^2+y^2, \quad 2t = x^2-y^2, \tag{41.}$$

dann wird

$$dz = (x+yp)dx, \quad dt = (x-yp)dx, \tag{42.}$$

also, wenn man $\frac{dz}{dt}$ mit p_1 bezeichnet,

$$\frac{dz}{dt} = p_1 = \frac{x+yp}{x-yp}, \quad p = \frac{x(p_1-1)}{y(p_1+1)}. \tag{43.}$$

(44.) $$x + yp = \frac{2xp_1}{p_1 + 1}, \quad y - xp = \frac{2(z - tp_1)}{y(p_1 + 1)}.$$

Deshalb geht Gleichung (40.) über in

$$\frac{4xp_1(z - tp_1)}{y(p_1 + 1)^2} = -\frac{e^2x(p_1 - 1)}{y(p_1 + 1)},$$

oder

(45.) $$4p_1(z - tp_1) = -e^2(p_1^2 - 1).$$

Diese Gleichung ist wieder eine *Clairaut*sche Gleichung; denn man kann sie auf die Form

(46.) $$z = tp_1 - \frac{e^2(p_1^2 - 1)}{4p_1}$$

bringen und erhält daraus durch Differentiation nach t

(47.) $$\left[t - \frac{e^2(p_1^2 + 1)}{4p_1^2}\right]\frac{dp_1}{dt} = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man

(48.) $$\frac{dp_1}{dt} = 0, \quad \text{also} \quad p_1 = C$$

setzt. Indem man diesen Wert von p_1 in Gleichung (45.) einträgt, erhält man

$$4C(z - tC) = e^2(1 - C^2),$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (41.)

$$2Cx^2(1 - C) + 2Cy^2(1 + C) = e^2(1 - C^2),$$

oder

(49.) $$\frac{2Cx^2}{e^2(1 + C)} + \frac{2Cy^2}{e^2(1 - C)} = 1.$$

Führt man jetzt statt der Integrations-Konstanten C einen variablen Parameter $\varkappa$ ein, indem man

(50.) $$C = \frac{e^2}{a^2 + b^2 + 2\varkappa},$$

also

$$\frac{e^2(1 + C)}{2C} = a^2 + \varkappa, \quad \frac{e^2(1 - C)}{2C} = b^2 + \varkappa$$

setzt, so geht Gleichung (49.) über in

(51.) $$\frac{x^2}{a^2 + \varkappa} + \frac{y^2}{b^2 + \varkappa} = 1.$$

Diese Gleichung stellt wieder eine Schar *konfokaler Ellipsen und Hyperbeln* dar, welche mit der gegebenen

Kurvenschar identisch ist. Dabei schneiden, wie bereits bekannt ist, in der Tat die sämtlichen Hyperbeln die sämtlichen Ellipsen *rechtwinklig*.

Hätte man in Gleichung (47.), um die *singuläre* Lösung zu erhalten, den Faktor

$$t - \frac{e^2(p_1^2 + 1)}{4p_1^2} = 0, \quad \text{oder} \quad p_1^2(4t - e^2) = e^2 \tag{52.}$$

gesetzt, so würde man mit Rücksicht darauf, daß nach Gleichung (46.)

$$4p_1 z = p_1^2(4t - e^2) + e^2 \tag{53.}$$

ist, die Gleichungen

$$4p_1 z = 2e^2, \quad \text{oder} \quad 4p_1^2 z^2 = e^4, \quad \text{also} \quad 4z^2 = e^2(4t - e^2)$$

gefunden haben. Dies gibt, wenn man die Werte von z und t aus den Gleichungen (41.) einsetzt,

$$(x^2 + y^2)^2 = e^2(2x^2 - 2y^2 - e^2),$$

oder

$$(x^2 - e^2)^2 = -y^2(2x^2 + y^2 + 2e^2). \tag{54.}$$

Die singuläre Lösung liefert also eine *imaginäre* Kurve, denn Gleichung (54.) kann durch *reelle* Werte von x und y nicht befriedigt werden.

Im allgemeinen wird die Integration der für die orthogonalen Trajektorien gefundenen Differential-Gleichungen in geschlossener Form nicht ausführbar sein; deshalb ist es von Interesse, einige Fälle hervorzuheben, wo die Integration durch Trennung der Variabeln unmittelbar bewirkt werden kann. Die gegebene Kurvenschar habe die Gleichung

$$F(x, y, u) = f(x) + g(y) - u = 0, \tag{55.}$$

wobei $f(x)$ eine Funktion der einzigen Veränderlichen x und $g(y)$ eine Funktion der einzigen Veränderlichen y sein möge; dann wird

$$F_1 = f'(x), \quad F_2 = g'(y), \tag{56.}$$

so daß die Differential-Gleichung der orthogonalen Trajektorien (vergl. Formel Nr. 228 der Tabelle) in

$$-g'(y)dx + f'(x)dy = 0,$$

oder

(57.) $$\frac{dx}{f'(x)} = \frac{dy}{g'(y)}$$

übergeht. Danach kann man ohne weiteres die folgenden Aufgaben behandeln.

Aufgabe 5. Man soll die orthogonalen Trajektorien der Kurven mit der Gleichung

(58.) $$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} - u = 0$$

bestimmen.

Auflösung. Hier ist

(59.) $$f(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}, \quad g(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta},$$

also

(60.) $$f'(x) = \frac{\alpha}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}, \quad g'(y) = \frac{\beta}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{\beta-1},$$

folglich findet man nach Gleichung (57.) für die orthogonalen Trajektorien die Differential-Gleichung

(61.) $$\frac{a^{\alpha}}{\alpha} \cdot \frac{dx}{x^{\alpha-1}} = \frac{b^{\beta}}{\beta} \cdot \frac{dy}{y^{\beta-1}}.$$

Die Fälle, wo $\alpha = 2$ oder $\beta = 2$ ist, muß man besonders untersuchen. Ist z. B. $\alpha = 2$ *und* $\beta = 2$, so geht Gleichung (61.) über in

(62.) $$a^2 \cdot \frac{dx}{x} = b^2 \cdot \frac{dy}{y},$$

folglich wird

(63.) $$b^2 \ln y = a^2 \ln x + \ln C, \quad \text{oder} \quad y^{bb} = Cx^{aa}.$$

Dagegen findet man unter der Voraussetzung, daß $\alpha \gtreqless 2$, $\beta \gtreqless 2$, aus Gleichung (61.) durch Integration

(64.) $$a^{\alpha}\beta(\beta - 2)x^{2-\alpha} = b^{\beta}\alpha(\alpha - 2)y^{2-\beta} + C.$$

Ist z. B.

$$a = 1, \quad b = 1, \quad \alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{2}{3},$$

und vertauscht man u mit $u^{\frac{2}{3}}$, so geht Gleichung (58.) über in

(65.) $$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = u^{\frac{2}{3}},$$

h. die gegebene Kurvenschar ist eine Schar *ähnlicher d ähnlich liegender Astroiden.*

Für die orthogonalen Trajektorien findet man dann aus ɘichung (64.), wenn man die Integrations-Konstante $-\frac{9}{8}C$ t $\pm v^{\frac{4}{3}}$ bezeichnet,

$$x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} = \pm v^{\frac{4}{3}}. \quad \text{.)}$$

Man kann das angegebene Verfahren auch dann noch wenden, wenn die Gleichung der angegebenen Kurvenıar die Form

$$f(x) \, . \, g(y) - u = 0 \quad \text{.)}$$

, weil man sie durch die Gleichung

$$F(x, y, u) = \ln[f(x)] + \ln[g(y)] - \ln u = 0 \quad \text{.)}$$

etzen kann. Dann wird

$$F_1 = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad F_2 = \frac{g'(y)}{g(y)}, \quad \text{.)}$$

daß man aus Formel Nr. 228 der Tabelle für die orthoıalen Trajektorien die Differential-Gleichung

$$-\frac{g'(y)}{g(y)}\,dx + \frac{f'(x)}{f(x)}\,dy = 0,$$

ɔr

$$\frac{f(x)}{f'(x)}\,dx = \frac{g(y)}{g'(y)}\,dy \quad \text{.)}$$

.ält.

Aufgabe 6. Man soll die orthogonalen Trajektorien für *verallgemeinerten gleichseitigen Hyperbeln* mit der Gleiıng

$$x^m y^n = u \quad \text{)}$$

timmen.

Auflösung. Hier ist

$$f(x) = x^m, \quad g(y) = y^n, \quad f'(x) = mx^{m-1}, \quad g'(y) = ny^{n-1}, \quad \text{)}$$

ʒlich ergibt sich aus Gleichung (70.) für die orthogonalen ıjektorien die Differential-Gleichung

$$2mydy = 2nxdx; \tag{73.}$$

die orthogonalen Trajektorien selbst haben daher die Gleichung

$$my^2 = nx^2 + C. \tag{74.}$$

Ist die Gleichung der gegebenen Kurvenschar in *Polarkoordinaten* ausgedrückt, geht man also von der Gleichung

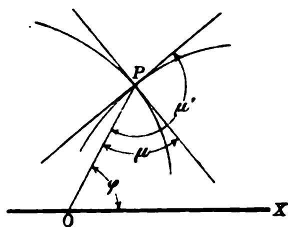
$$F(r, \varphi, u) = 0 \tag{75.}$$

aus, so ist der Winkel μ, welchen die Tangente im Kurvenpunkte P mit dem zugehörigen Radiusvector bildet, durch die Gleichung (vergl. D.-R., Formel Nr. 153 der Tabelle)

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{rd\varphi}{dr} \tag{76.}$$

gegeben. Bezeichnet man vorläufig die Koordinaten einer orthogonalen Trajektorie mit r', φ' und den Winkel, welchen die Tangente dieser Kurve mit dem zugehörigen Radiusvector bildet, mit μ', so ist

Fig. 151.



$$\operatorname{tg}\mu' = \frac{r'd\varphi'}{dr'}. \tag{77.}$$

Nun soll (Fig. 151) $\mu' - \mu = 90^0$ sein, deshalb wird

$$\operatorname{tg}(\mu' - \mu) = \frac{\operatorname{tg}\mu' - \operatorname{tg}\mu}{1 + \operatorname{tg}\mu \operatorname{tg}\mu'} = \infty, \tag{78.}$$

oder

$$1 + \operatorname{tg}\mu \operatorname{tg}\mu' = 1 + \frac{rd\varphi}{dr} \cdot \frac{r'd\varphi'}{dr'} = 0. \tag{79.}$$

Setzt man hierbei der Kürze wegen

$$\frac{\partial F(r, \varphi, u)}{\partial r} = F_1, \quad \frac{\partial F(r, \varphi, u)}{\partial \varphi} = F_2, \tag{80.}$$

so folgt aus Gleichung (75.)

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{F_1(r, \varphi, u)}{F_2(r, \varphi, u)} = -\frac{F_1}{F_2}, \tag{81.}$$

folglich geht Gleichung (79.) über in

(82.) $$1 - \frac{rF_1}{F_2} \cdot \frac{r'd\varphi'}{dr'} = 0;$$

da aber die Berührungspunkte P und P' zusammenfallen müssen, so wird r' gleich r, φ' gleich φ, also

(83.) $$F_2 - F_1 . r^2 \frac{d\varphi}{dr} = 0.$$

Im allgemeinen werden hierbei F_1 und F_2 noch den Parameter u enthalten; indem man u aus den Gleichungen (75.) und (83.) eliminiert, erhält man die Differential-Gleichung der orthogonalen Trajektorien.

Aufgabe 7. Die Gleichung

(84.) $$F(r, \varphi, u) = r^2 \cos(2\varphi + 2u) - a^2 \cos(2u) = 0$$

stellt eine Schar von *gleichseitigen Hyperbeln* dar, welche den Nullpunkt zum gemeinsamen Mittelpunkt haben und sämtlich durch den Punkt A mit den Koordinaten $r = a$, $\varphi = 0$ hindurchgehen; man soll die orthogonalen Trajektorien bestimmen.

Auflösung. In diesem Falle ist

(85.) $$F_1 = 2r \cos(2\varphi + 2u), \quad F_2 = -2r^2 \sin(2\varphi + 2u),$$

folglich geht Gleichung (83.) über in

$$-2r^2 \sin(2\varphi + 2u) - 2r^3 \cos(2\varphi + 2u) \frac{d\varphi}{dr} = 0;$$

daraus findet man

(86.) $$\operatorname{tg}(2\varphi + 2u) = -r \frac{d\varphi}{dr}.$$

Nun kann man Gleichung (84.) auf die Form

$$r^2 \cos(2\varphi) \cos(2u) - r^2 \sin(2\varphi) \sin(2u) - a^2 \cos(2u) = 0,$$

oder

(87.) $$\operatorname{tg}(2u) = \frac{r^2 \cos(2\varphi) - a^2}{r^2 \sin(2\varphi)}$$

bringen, folglich wird

(88.) $$\operatorname{tg}(2\varphi + 2u) = \frac{\operatorname{tg}(2\varphi) + \operatorname{tg}(2u)}{1 - \operatorname{tg}(2\varphi)\operatorname{tg}(2u)}$$

$$= \frac{r^2 \sin(2\varphi) \operatorname{tg}(2\varphi) + r^2 \cos(2\varphi) - a^2}{r^2 \sin(2\varphi) - \operatorname{tg}(2\varphi)[r^2 \cos(2\varphi) - a^2]}$$

$$= \frac{r^2 - a^2 \cos(2\varphi)}{a^2 \sin(2\varphi)}.$$

Dies gibt mit Rücksicht auf Gleichung (86.)

$$\frac{r^2 - a^2\cos(2\varphi)}{a^2\sin(2\varphi)} = -\frac{rd\varphi}{dr}, \tag{89.}$$

oder, wenn man

$$a^2\cos(2\varphi) = t, \quad \text{also} \quad -2a^2\sin(2\varphi)d\varphi = dt \tag{90.}$$

setzt,

$$\frac{dt}{dr} + \frac{2t}{r} = 2r. \tag{91.}$$

Weil dies eine *lineare Differential-Gleichung* erster Ordnung ist, setze man

$$t = vz, \quad \text{also} \quad dt = vdz + zdv, \tag{92.}$$

wodurch man

$$v\frac{dz}{dr} + z\left(\frac{dv}{dr} + \frac{2v}{r}\right) = 2r \tag{93.}$$

erhält. Indem man die Funktion v so bestimmt, daß in dieser Gleichung der Koeffizient von z verschwindet, erhält man

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2dr}{r}, \quad \text{also} \ \ln v = -\ln(r^2), \quad \text{oder} \ v = \frac{1}{r^2}; \tag{94.}$$

deshalb geht Gleichung (93.) über in

$$\frac{1}{r^2}\frac{dz}{dr} = 2r, \quad \text{oder} \quad dz = 2r^3dr. \tag{95.}$$

Dies gibt, wenn man die Integrations-Konstante mit $\frac{1}{2}(a^4 - b^4)$ bezeichnet,

$$2z = r^4 + a^4 - b^4, \quad \text{also} \quad 2vz = r^2 + \frac{a^4 - b^4}{r^2} = 2t, \tag{96.}$$

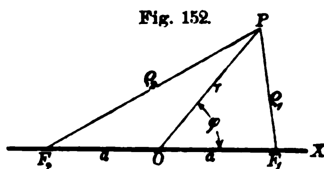
oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (90.)

$$r^4 - 2a^2r^2\cos(2\varphi) + a^4 = b^4, \tag{97.}$$

wobei b der variable Parameter ist.

Diese Gleichung stellt eine Schar von Kurven dar, welche unter dem Namen „*Cassini*sche Kurven“ bekannt sind und die Eigenschaft besitzen, daß das Produkt der Abstände eines jeden Kurvenpunktes von zwei festen Punkten mit den Koordinaten $x = \pm a$, $y = 0$ den konstanten Wert

b^2 besitzt. Sind nämlich F_1 und F_2 die beiden festen Punkte, die „*Brennpunkte*“ genannt werden, und ϱ_1, ϱ_2 die nach einem beliebigen Kurvenpunkte P gezogenen „*Brennstrahlen*“, so wird nach dem Kosinussatze (vergl. Fig. 152)



(98.) $\varrho_1{}^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos\varphi, \quad \varrho_2{}^2 = r^2 + a^2 + 2ra\cos\varphi,$

also

(99.) $$\varrho_1{}^2\varrho_2{}^2 = (r^2 + a^2)^2 - 4a^2r^2\cos^2\varphi = b^4,$$

woraus sich ohne weiteres Gleichung (97.) ergibt.

Für $b = a$ reduziert sich die Gleichung der *Cassini*schen Kurve auf

(100.) $$r^2 = 2a^2\cos(2\varphi)$$

und stellt eine *Lemniskate* dar.

Auch bei Anwendung von Polarkoordinaten kann man Fälle hervorheben, in denen die Integration durch Trennung der Variabeln ohne weiteres ausführbar ist. Hat nämlich die Gleichung der gegebenen Kurvenschar die Form

(101.) $$F(r, \varphi, u) = f(r) + g(\varphi) - u = 0,$$

wobei $f(r)$ eine Funktion der einzigen Veränderlichen r und $g(\varphi)$ eine Funktion der einzigen Veränderlichen φ sein möge, so wird

(102.) $$F_1 = f'(r), \quad F_2 = g'(\varphi),$$

so daß Gleichung (83.) übergeht in

(103.) $$g'(\varphi) - f'(r) \,.\, r^2\frac{d\varphi}{dr} = 0,$$

oder

(103a.) $$\frac{dr}{r^2 \,.\, f'(r)} = \frac{d\varphi}{g'(\varphi)}.$$

Hat die Gleichung der gegebenen Kurvenschar die Form

(104.) $$f(r) \,.\, g(\varphi) = u,$$

oder, wenn man $\ln u$ mit u_1 bezeichnet,

(104a.) $$F(r, \varphi, u_1) = \ln[f(r)] + \ln[g(\varphi)] - u_1 = 0,$$

so wird

$$F_1 = \frac{f'(r)}{f(r)}, \quad F_2 = \frac{g'(\varphi)}{g(\varphi)},$$

folglich geht Gleichung (83.) über in

(105.) $$\frac{g'(\varphi)}{g(\varphi)} - \frac{f'(r)}{f(r)} \cdot \frac{r^2 d\varphi}{dr} = 0;$$

daraus ergibt sich

(105a.) $$\frac{f(r)dr}{r^2 \cdot f'(r)} = \frac{g(\varphi)d\varphi}{g'(\varphi)}.$$

Beispiele.

Aufgabe 8. Durch die Gleichung

(106.) $$r^n \cos(m\varphi) - u = 0$$

ist eine Kurvenschar gegeben; man soll die orthogonalen Trajektorien bestimmen.

Auflösung. Hier ist

(107.) $$f(r) = r^n, \quad g(\varphi) = \cos(m\varphi),$$

also

$$f'(r) = nr^{n-1}, \quad g'(\varphi) = -m\sin(m\varphi),$$

folglich geht Gleichung (105a.) über in

$$\frac{dr}{nr} = -\frac{\cos(m\varphi)d\varphi}{m\sin(m\varphi)};$$

daraus ergibt sich

(108.) $$m^2 \frac{dr}{r} = -mn \frac{\cos(m\varphi)d\varphi}{\sin(m\varphi)},$$

also

$$m^2 \ln r = -n\ln[\sin(m\varphi)] + \ln C,$$

(109.) $$r^{mm} \sin^n(m\varphi) = C.$$

Für $m = n$ wird die Gleichung der gegebenen Kurvenschar

(110.) $$r^m \cos(m\varphi) = u$$

und die der orthogonalen Trajektorien, wenn man C gleich v^m setzt,

(111.) $$r^m \sin(m\varphi) = v.$$

Man erkennt unmittelbar die Gleichartigkeit der beiden Kurvenscharen.

Für $n = -m$ wird die Gleichung der gegebenen Kurvenschar, wenn man $\frac{1}{u}$ mit u' bezeichnet,

$$r^m = u' \cos(m\varphi) \tag{112.}$$

und die der orthogonalen Trajektorien

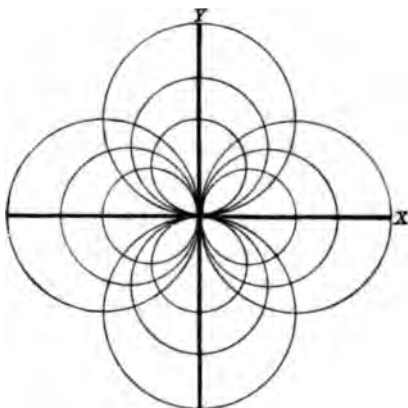
$$r^m = v \sin(m\varphi). \tag{113.}$$

Für $m = 1$ geht z. B. die Gleichung (112.) über in

$$r = u' \cos\varphi \tag{114.}$$

und stellt eine Schar von Kreisen dar, welche sämtlich durch den Nullpunkt hindurchgehen und ihren Mittelpunkt in der X-Achse haben, während der Durchmesser u' verschiedene Werte annimmt (Fig. 153). Die orthogonalen Trajektorien haben dann die Gleichung

Fig. 153.



$$r = v \sin\varphi \tag{115.}$$

und sind Kreise mit dem veränderlichen Durchmesser v, die gleichfalls durch den Nullpunkt hindurchgehen, ihren Mittelpunkt aber in der Y-Achse haben.

§ 104.
Evolventen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 234.)

In § 96 der Differential-Rechnung war auf Seite 454 der Satz bewiesen worden, daß eine jede Kurve durch Abwickelung (oder Aufwickelung) aus ihrer Krümmungsmittelpunktskurve entsteht, und daß ihre Normalen Tangenten der Krümmungsmittelpunktskurve sind. Man nennt daher die ursprüngliche Kurve „*Evolvente*“ und die Krümmungsmittelpunktskurve „*Evolute*“. Dabei gehören zu jeder Evolute

unendlich viele Evolventen, da man die Länge des abgewickelten Fadens noch beliebig annehmen kann. Damals war eine der Evolventen gegeben, und die zugehörige Evolute gesucht. Jetzt sei die Evolute durch die Gleichung

$$y = f(x) \tag{1.}$$

gegeben, und die Schar der Evolventen gesucht. Diese Aufgabe kann man leicht lösen, denn die Tangenten an die gegebene Kurve haben die Gleichung

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x), \text{ oder } y' - f(x) - f'(x)(x' - x) = 0 \tag{2.}$$

und sind zugleich Normalen der gesuchten Kurvenschar, d. h. durch Gleichung (2.) ist eine Schar von geraden Linien gegeben, man soll die rechtwinkligen Trajektorien dieser Schar von geraden Linien aufsuchen.

Damit bei der gestellten Aufgabe die Bezeichnungen mit den in § 102 benutzten übereinstimmen, vertausche man in Gleichung (2.)

$$x \text{ mit } u, \quad x' \text{ mit } x, \quad y' \text{ mit } y,$$

also

$$f(x) \text{ mit } f(u) \quad \text{und} \quad f'(x) \text{ mit } f'(u).$$

Dadurch geht Gleichung (2.) über in

$$F(x, y, u) = y - f(u) - f'(u)(x - u) = 0, \tag{2a.}$$

und es wird

$$F_1 = -f'(u), \quad F_2 = +1; \tag{3.}$$

folglich findet man nach Formel Nr. 228 der Tabelle die Differential-Gleichung der rechtwinkligen Trajektorien, indem man den Parameter u aus Gleichung (2a.) und der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f'(u)} \tag{4.}$$

eliminiert.

§ 105.

Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Evolventen der Parabel

$$y^2 = 2ax \tag{1.}$$

ermitteln.

Auflösung. Aus Gleichung (1.) folgt

$$f(u) = \sqrt{2au}, \quad f'(u) = \frac{a}{\sqrt{2au}}, \tag{2.}$$

deshalb wird

$$F(x, y, u) = y - \sqrt{2au} - \frac{a(x-u)}{\sqrt{2au}} = 0, \tag{3.}$$

$$\frac{dy}{dx} = p = -\frac{\sqrt{2au}}{a}, \quad \text{also} \quad \sqrt{2au} = -ap, \quad u = \frac{ap^2}{2}. \tag{4.}$$

Durch Elimination von u aus diesen beiden Gleichungen findet man

$$y + ap + \frac{2x - ap^2}{2p} = 0,$$

oder

$$2py + 2x + ap^2 = 0. \tag{5.}$$

Hieraus ergibt sich durch Differentiation, wenn man $dx = \frac{dy}{p}$ setzt,

$$2pdy + 2ydp + \frac{2dy}{p} + 2ap\,dp = 0,$$

oder

$$(1 + p^2)dy + (yp + ap^2)dp = 0. \tag{6.}$$

Diese Differential-Gleichung zwischen y und p hat einen integrierenden Faktor, der eine Funktion der einzigen Veränderlichen p ist; hier wird nämlich

$$M(y, p) = 1 + p^2, \quad N(y, p) = yp + ap^2, \tag{7.}$$

$$\frac{\partial M}{\partial p} = 2p, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = p, \quad \text{also} \quad \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial p}\right) = \frac{-p}{1+p^2}, \tag{8.}$$

folglich wird nach Formel Nr. 218 der Tabelle

$$\ln v = \int \frac{-pdp}{1+p^2} = -\frac{1}{2}\ln(1+p^2), \quad v = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{9.}$$

Dies gibt nach den früheren Regeln, wenn man das vollständige Differential mit dU bezeichnet,

$$dU = \sqrt{1+p^2}\,.\,dy + \frac{yp + ap^2}{\sqrt{1+p^2}}dp = 0, \tag{10.}$$

$$U = y\sqrt{1+p^2} + \varphi(p), \tag{11.}$$

$$(12.)\quad \frac{\partial U}{\partial p} = \frac{yp}{\sqrt{1+p^2}} + \varphi'(p) = \frac{yp}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{ap^2}{\sqrt{1+p^2}},$$

folglich wird nach Formel Nr. 127 der Tabelle

$$(13.)\quad \varphi(p) = \int \varphi'(p)dp = a\int \frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$= a\left[\frac{p}{2}\sqrt{1+p^2} - \frac{1}{2}\ln(p+\sqrt{1+p^2})\right],$$

$$U = y\sqrt{1+p^2} + \frac{ap}{2}\sqrt{1+p^2} - \frac{a}{2}\ln(p+\sqrt{1+p^2}) = \frac{C}{2}$$

also

$$(14.)\quad 2y = -ap + \frac{a\ln(p+\sqrt{1+p^2})}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{C}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$2x = -2py - ap^2,$$

oder

$$(15.)\quad 2x = -\frac{ap\ln(p+\sqrt{1+p^2})}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{Cp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Aufgabe 2. Man soll die Evolventen der Kurve

$$(16.)\quad 27ay^2 = 8(x-a)^3$$

ermitteln.

Auflösung. Aus Gleichung (16.) folgt

$$(17.)\quad f(u) = \frac{2(u-a)\sqrt{2(u-a)}}{3\sqrt{3a}},\quad f'(u) = \frac{\sqrt{2(u-a)}}{\sqrt{3a}},$$

deshalb wird

$$(18.)\quad F(x, y, u) = y - f(u) - (x-u)f'(u)$$

$$= y - \frac{\sqrt{2(u-a)}}{3\sqrt{3a}}(3x - u - 2a) = 0,$$

$$(19.)\quad \frac{dy}{dx} = p = -\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{2(u-a)}},$$

oder

$$(20.)\quad \sqrt{2(u-a)} = -\frac{\sqrt{3a}}{p},\quad u = \frac{3a+2ap^2}{2p^2} = a + \frac{3a}{2p^2}.$$

Durch Elimination von u aus den Gleichungen (18.) und (19.) findet man daher

$$y + \frac{1}{3p}\left(3x - 3a - \frac{3a}{2p^2}\right) = 0,$$

oder

(21.) $$py + x - a - \frac{a}{2p^2} = 0.$$

Hieraus erhält man durch Differentiation, indem man wieder $dx = \frac{dy}{p}$ setzt,

(22.) $$\left(p + \frac{1}{p}\right)dy + \left(y + \frac{a}{p^3}\right)dp = 0,$$

oder

(23.) $$(1 + p^2)dy + \left(py + \frac{a}{p^2}\right)dp = 0.$$

Auch diese Differential-Gleichung hat den integrierenden Faktor $\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$, mit dem man Gleichung (23.) multiplizieren muß, damit die linke Seite ein vollständiges Differential

(24.) $$dU = \sqrt{1 + p^2}\,.\,dy + \left(\frac{yp}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{a}{p^2\sqrt{1 + p^2}}\right)dp$$
$$= d(y\sqrt{1 + p^2}) + \frac{adp}{p^2\sqrt{1 + p^2}} = 0$$

wird. Dies gibt nach Formel Nr. 40 der Tabelle

(25.) $$U = y\sqrt{1 + p^2} - \frac{a\sqrt{1 + p^2}}{p} = C,$$

also

(26.) $$y = \frac{a}{p} + \frac{C}{\sqrt{1 + p^2}},$$

(27.) $$2x = -2py + 2a + \frac{a}{p^2} = \frac{a}{p^2} - \frac{2Cp}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Für $C = 0$ erhält man

(28.) $$2x = \frac{a}{p^2},\quad y = \frac{a}{p},\quad \text{also}\quad y^2 = 2ax.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Evolute die durch Gleichung (16.) gegebene Kurve ist.

XVI. Abschnitt.

Gewöhnliche Differential-Gleichungen höherer Ordnung.

§ 106.

Allgemeine Bemerkungen.

Die Differential-Gleichungen höherer Ordnung bieten im allgemeinen bei der Integration noch weit größere Schwierigkeiten als die von der ersten Ordnung. Man kennt bisher nur eine geringe Anzahl von besonderen Fällen, in denen sich die Integration von Differential-Gleichungen höherer Ordnung in endlicher, geschlossener Form ausführen läßt. Einige von diesen mögen hier hervorgehoben werden.

§ 107.

Integration der Differential-Gleichung $\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi(x)$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 235.)

Ist die m^{te} Ableitung von y als Funktion von x gegeben, gilt also die Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi(x), \tag{1.}$$

wobei $\varphi(x)$ eine bekannte Funktion der einzigen Veränderlichen x sein möge, so kann man das allgemeine Integral sofort bestimmen. Es wird dann nämlich

$$\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} = \int \varphi(x)dx + C_1 = \varphi_1(x) + C_1, \tag{2.}$$

$$(3.)\quad \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \int \varphi_1(x)dx + C_1 x + C_2 = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2,$$

$$(4.)\quad \frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} = \int \varphi_2(x)dx + \frac{C_1 x^2}{2!} + \frac{C_2 x}{1!} + C_3$$

$$= \varphi_3(x) + \frac{C_1 x^2}{2!} + \frac{C_2 x}{1!} + C_3,$$

. . . .

$$(5.)\quad y = \int \varphi_{m-1}(x)dx + \frac{C_1 x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{C_2 x^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots$$

$$+ \frac{C_{m-1} x}{1!} + C_m.$$

Die m Integrations-Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_m$ kann man noch so bestimmen, daß die m Größen

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}},\ \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}},\ \ldots \frac{dy}{dx},\ y$$

für $x = x_0$ die beliebig vorgeschriebenen Werte

$$y_0^{(m-1)},\quad y_0^{(m-2)} \ldots y_0',\ y_0$$

annehmen.

Dabei geht $\int \varphi_{m-1}(x)dx$ aus $\varphi(x)$ durch m-malige Integration hervor und ist deshalb ein m-faches Integral

$$(6.)\quad \varphi_m(x) = \int \varphi_{m-1}(x)dx = \int dx \int dx \ldots \int \varphi(x)dx.$$

Diesen Ausdruck kann man aber noch vereinfachen durch partielle Integration, also durch die Formel

$$(7.)\quad \int u dv = uv - \int v du.$$

Bezeichnet man nämlich in den Gleichungen (2.) bis (5.) die Integrationsgrenzen mit x_0 und x, die Integrations-Veränderliche aber mit z, so wird

$$(8.)\quad \varphi_1(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(z)dz,\quad \varphi_2(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi_1(z)dz,\quad \varphi_3(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi_2(z)dz, \ldots.$$

Setzt man jetzt

$$(9.)\quad u = \varphi_1(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(z)dz,\quad dv = dx,$$

also mit Rücksicht auf Formel Nr. 182 der Tabelle

$$du = \varphi(x)dx, \quad v = x,$$

so erhält man nach Gleichung (7.), da $\varphi_1(x)$ für x gleic x_0 verschwindet,

$$(10.) \qquad \varphi_2(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi_1(x)dx = x\varphi_1(x) - \int_{x_0}^{x} x\varphi(x)dx$$

$$= x\int_{x_0}^{x} \varphi(z)dz - \int_{x_0}^{x} z\varphi(z)dz,$$

folglich wird

$$(11.) \qquad \varphi_2(x) = \int_{x_0}^{x} (x - z)\varphi(z)dz.$$

Hieraus ergibt sich

$$(12.) \quad 2\varphi_3(x) = 2\int_{x_0}^{x} \varphi_2(x)dx = \int_{x_0}^{x} 2xdx\int_{x_0}^{x} \varphi(z)dz - 2\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} z\varphi(z)dz.$$

Um die beiden Integrale auf der rechten Seite dies Gleichung zu berechnen, setze man zunächst wieder

$$(13.) \qquad u = \varphi_1(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(z)dz, \quad \text{aber} \quad dv = 2xdx,$$

also

$$(14.) \qquad du = \varphi(x)dx, \quad v = x^2,$$

deshalb findet man durch partielle Integration

$$(15.) \qquad \int_{x_0}^{x} 2xdx\int_{x_0}^{x} \varphi(z)dz = x^2\int_{x_0}^{x} \varphi(z)dz - \int_{x_0}^{x} x^2\varphi(x)dx$$

$$= x^2\int_{x_0}^{x} \varphi(z)dz - \int_{x_0}^{x} z^2\varphi(z)dz.$$

Ferner setze man

$$(16.) \quad u = \int_{x_0}^{x} z\varphi(z)dz, \quad dv = dx, \quad \text{also} \quad du = x\varphi(x)dx, \quad v = x$$

dann ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} z\varphi(z)dz = x\int_{x_0}^{x} z\varphi(z)dz - \int_{x_0}^{x} x^2\varphi(x)dx,$$

oder, wenn man beide Seiten der Gleichung mit -2 mul‑ pliziert,

$$(17.) \quad -2\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} z\varphi(z)dz = -2x\int_{x_0}^{x} z\varphi(z)dz + 2\int_{x_0}^{x} z^2\varphi(z)dz.$$

Indem man die Gleichungen (15.) und (17.) addiert, findet man mit Rücksicht auf Gleichung (12.)

$$(18.)\qquad 1.2\varphi_3(x) = x^2\int_{x_0}^{x}\varphi(z)dz - 2x\int_{x_0}^{x}z\varphi(z)dz + \int_{x_0}^{x}z^2\varphi(z)dz,$$

oder

$$(19.)\qquad 1.2\varphi_3(x) = \int_{x_0}^{x}(x-z)^2\varphi(z)dz.$$

In dieser Weise kann man fortfahren und zwar erhält man aus Gleichung (18.)

$$(20.)\qquad 1.2.3\varphi_4(x) = 1.2.3\int_{x_0}^{x}\varphi_3(x)dx = 3\int_{x_0}^{x}x^2dx\int_{x_0}^{x}\varphi(z)dz$$

$$- 6\int_{x_0}^{x}xdx\int_{x_0}^{x}z\varphi(z)dz + 3\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}z^2\varphi(z)dz.$$

Durch partielle Integration ergibt sich dann

$$(21.)\qquad 3\int_{x_0}^{x}x^2dx\int_{x_0}^{x}\varphi(z)dz = x^3\int_{x_0}^{x}\varphi(z)dz - \int_{x_0}^{x}z^3\varphi(z)dz,$$

$$(22.)\qquad - 6\int_{x_0}^{x}xdx\int_{x_0}^{x}z\varphi(z)dz = - 3x^2\int_{x_0}^{x}z\varphi(z)dz + 3\int_{x_0}^{x}z^3\varphi(z)dz,$$

$$(23.)\qquad + 3\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}z^2\varphi(z)dz = + 3x\int_{x_0}^{x}z^2\varphi(z)dz - 3\int_{x_0}^{x}z^3\varphi(z)dz;$$

folglich wird, wenn man die Gleichungen (21.), (22.) und (23.) addiert,

$$(24.)\qquad 3!\varphi_4(x) = x^3\int_{x_0}^{x}\varphi(z)dz - 3x^2\int_{x_0}^{x}z\varphi(z)dz + 3x\int_{x_0}^{x}z^2\varphi(z)dz - \int_{x_0}^{x}z^3\varphi(z)dz$$

$$= \int_{x_0}^{x}(x-z)^3\varphi(z)dz.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens findet man die allgemeine Formel

$$(25.)\qquad (m-1)!\,\varphi_m(x) = \int_{x_0}^{x}(x-z)^{m-1}\varphi(z)dz,$$

deren Richtigkeit man durch den Schluß von n auf $n+1$ beweisen kann. Ist nämlich

$$(26.)\qquad (n-1)!\,\varphi_n(x) = \int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1}\varphi(z)dz,$$

oder

$$(26\text{a.})\quad (n-1)!\varphi_n(x) = x^{n-1}\int_{x_0}^{x}\varphi(z)dz - \binom{n-1}{1}x^{n-2}\int_{x_0}^{x}z\varphi(z)dz + - \cdots$$

$$-(+1)^k\binom{n-1}{k}x^{n-k-1}\int_{x_0}^{x}z^k\varphi(z)dz + \cdots \pm \int_{x_0}^{x}z^{n-1}\varphi(z)dz,$$

oder

$$(26\text{b.})\quad (n-1)!\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}x^{n-k-1}\int_{x_0}^{x}z^k\varphi(z)dz,$$

so wird, weil $n\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}(n-k)$ ist,

$$(27.)\quad n!\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)x^{n-k-1}\int_{x_0}^{x}z^k\varphi(z)dz.$$

Setzt man jetzt

$$(28.)\qquad u = \int_{x_0}^{x}z^k\varphi(z)dz, \quad dv = (n-k)x^{n-k-1}dx,$$

also

$$(29.)\qquad du = x^k\varphi(x)dx, \quad v = x^{n-k},$$

so erhält man durch partielle Integration

$$(30.)\quad \int_{x_0}^{x}(n-k)x^{n-k-1}dx\int_{x_0}^{x}z^k\varphi(z)dz = x^{n-k}\int_{x_0}^{x}z^k\varphi(z)dz - \int_{x_0}^{x}x^n\varphi(x)dx$$

$$= x^{n-k}\int_{x_0}^{x}z^k\varphi(z)dz - \int_{x_0}^{x}z^n\varphi(z)dz.$$

Dies gibt

$$(31.)\quad n!\varphi_{n+1}(x) = n!\int_{x_0}^{x}\varphi_n(x)dx = \sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}\int_{x_0}^{x}z^k\varphi(z)dz$$

$$-\int_{x_0}^{x}z^n\varphi(z)dz \,.\sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^k\binom{n}{k}.$$

Da nun

$$\sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^k\binom{n}{k} = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}$$

$$= (1-1)^n - (-1)^n = -(-1)^n$$

ist, so geht Gleichung (31.) über in

$$(32.)\qquad n!\varphi_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}\int_{x_0}^{x} z^k\varphi(z)dz$$
$$= \int_{x_0}^{x}(x-z)^n\varphi(z)dz.$$

Dies ist aber eine Gleichung, welche aus Gleichung (26.) entsteht, indem man n mit $n+1$ vertauscht.

Man kann daher das allgemeine Integral von Gleichung (1.) auf die Form

$$(33.)\qquad y = \frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{m-1}\varphi(z)dz + \frac{C_1 x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{C_2 x^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + \frac{C_{m-1}x}{1!} + C_m$$

bringen.

§ 108.

Differential-Gleichungen von der Form $F\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right) = 0$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 236 und 237.)

Hat die gegebene Differential-Gleichung zunächst die Form

$$(1.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

so bezeichne man wieder $\frac{dy}{dx}$ mit p, also $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit $\frac{dp}{dx}$. Dadurch erhält Gleichung (1.) die Form

$$(2.)\qquad \frac{dp}{dx} = f(p), \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dp}{f(p)},$$

folglich ist

$$(3.)\qquad x = \int\frac{dp}{f(p)} + C_1.$$

Ferner ist nach Gleichung (2.)

$$(4.)\qquad dy = pdx = \frac{pdp}{f(p)},$$

also

$$(5.)\qquad y = \int\frac{pdp}{f(p)} + C_2.$$

Durch die Gleichungen (3.) und (5.) sind x und y als Funktionen von p dargestellt. Durch Elimination von p findet man daraus die gesuchte Gleichung zwischen x und y.

Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$6.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

integrieren.

Auflösung. Aus Gleichung (6.) folgt

$$(7.)\qquad \frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}, \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad dy = \frac{pdp}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$(8.)\qquad x = \int\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \ln(p + \sqrt{1 + p^2}) + C_1 = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\,p + C_1,$$

$$(9.)\qquad y = \int\frac{pdp}{\sqrt{1 + p^2}} = \sqrt{1 + p^2} + C_2.$$

Dies gibt, wenn man die Integrations-Konstanten C_1 und C_2 bezw. mit x_0 und y_0 bezeichnet,

$$(10.)\qquad \sqrt{1 + p^2} = y - y_0, \quad \mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\,p = x - x_0,$$

$$(11.)\qquad p = \mathfrak{Sin}(x - x_0), \quad 1 + p^2 = 1 + \mathfrak{Sin}^2(x - x_0) = \mathfrak{Cof}^2(x - x_0),$$

folglich wird

$$(12.)\qquad y - y_0 = \mathfrak{Cof}(x - x_0),$$

oder

$$(13.)\qquad y - y_0 = e^{x - x_0} + e^{-(x - x_0)}.$$

Aufgabe 2. Man soll die Gleichung derjenigen Kurven bestimmen, bei denen der Krümmungshalbmesser die konstante Länge a hat.

Auflösung. Nach D.-R., Formel Nr. 149 der Tabelle ist

$$\varrho = \pm \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

deshalb müssen die gesuchten Kurven der Differential-Gleichung

(14.) $$\pm\left(\frac{ds}{dx}\right)^3 = a\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{oder} \quad \pm(\sqrt{1+p^2})^3 = a\frac{dp}{dx}$$

genügen. Daraus folgt

(15.) $$dx = \pm \frac{adp}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}},$$

oder, wenn man

(16.) $$p = \operatorname{tg} t, \quad \text{also} \quad \sqrt{1+p^2} = \frac{1}{\cos t}, \quad dp = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

setzt,

(17.) $$dx = \pm a\cos t \,.\, dt, \quad dy = pdx = \pm a\sin t \,.\, dt.$$

Dies gibt, wenn man die beiden Integrations-Konstanten wieder mit x_0 und y_0 bezeichnet,

(18.) $$x - x_0 = \pm a\sin t = \pm \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

(19.) $$y - y_0 = \mp a\cos t = \mp \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Indem man die Gleichungen (18.) und (19.) ins Quadrat erhebt und addiert, erhält man

(20.) $$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2.$$

Die gesuchten Kurven sind demnach Kreise mit dem Halbmesser a; ihr Mittelpunkt hat die Koordinaten x_0, y_0, die als *willkürliche Integrations-Konstanten* eingeführt worden sind. Der *Kreis* ist daher die einzige Kurve, deren Krümmungshalbmesser eine konstante Länge hat.

Ist eine Gleichung zwischen

(21.) $$\frac{dy}{dx} = p \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = q = \frac{dp}{dx}$$

gegeben, welche nicht nach q, sondern nur nach p auflösbar ist, hat also die Differential-Gleichung die Form

(22.) $$p = \varphi(q),$$

so findet man durch Differentiation nach x

(23.) $$q = \varphi'(q) \cdot \frac{dq}{dx},$$

also

(24.) $$dx = \frac{\varphi'(q)dq}{q}, \quad dy = pdx = \frac{\varphi(q)\varphi'(q)dq}{q},$$

(25.) $$x = \int \frac{\varphi'(q)dq}{q} + C_1, \quad y = \int \frac{\varphi(q)\varphi'(q)dq}{q} + C_2.$$

Indem man aus diesen beiden Gleichungen die Größe q eliminiert, ergibt sich die gesuchte Gleichung zwischen x und y.

Das angegebene Verfahren kann man auch auf die Integration von Differential-Gleichungen höherer Ordnung übertragen. Es sei

(26.) $$u = \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}, \quad v = \frac{d^my}{dx^m}, \quad \text{also} \quad \frac{du}{dx} = v,$$

und die gegebene Differential-Gleichung habe die Form

(27.) $$v = f(u), \quad \text{oder} \quad \frac{du}{dx} = f(u),$$

dann wird

(28.) $$dx = \frac{du}{f(u)}, \quad x = \int \frac{du}{f(u)} + C_1.$$

Läßt sich diese Gleichung in bezug auf u auflösen, so findet man

(29.) $$u = \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = \varphi(x)$$

und kann das in § 107 angegebene Verfahren anwenden.

Hat die gegebene Differential-Gleichung die Form

(30.) $$u = \varphi(v),$$

so findet man durch Differentiation nach x

(31.) $$v = \varphi'(v) \cdot \frac{dv}{dx}, \quad \text{oder} \quad dx = \frac{\varphi'(v)dv}{v},$$

(32.) $$x = \int \frac{\varphi'(v)dv}{v} + C_1.$$

Läßt sich diese Gleichung in bezug auf v auflösen, so kann man wieder das in § 107 angegebene Verfahren anwenden, nachdem man den gefundenen Wert von v in Gleichung (30.) eingesetzt hat.

§ 109.

Differential-Gleichungen von der Form $F\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}\right) = 0$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 238 bis 241.)

Hat die gegebene Differential-Gleichung die Form

(1.) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y),$$

so setze man wieder

(2.) $$\frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{p} = dx,$$

dann geht Gleichung (1.) über in

(3.) $$\frac{dp}{dx} = f(y), \quad \text{oder} \quad dp = f(y)dx = \frac{f(y)dy}{p},$$

folglich wird

(4.) $$2pdp = 2f(y)dy,$$

(5.) $$p^2 = 2\int f(y)dy + C_1.$$

Aus dieser Gleichung folgt dann

(6.) $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 + 2\int f(y)dy}, \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{C_1 + 2\int f(y)dy}},$$

also

(7.) $$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 + 2\int f(y)dy}} + C_2.$$

Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{a^2} \tag{8.}$$

integrieren.

Auflösung. Bringt man diese Gleichung auf die For

$$dp = \frac{ydx}{a^2} = \frac{ydy}{a^2p}, \quad \text{oder} \quad 2a^2pdp = 2ydy, \tag{9.}$$

so erhält man durch Integration

$$a^2p^2 = y^2 + C_1, \tag{10.}$$

oder

$$ady = \pm\sqrt{y^2 + C_1}\,.\,dx. \tag{11.}$$

Hat hierbei C_1 einen negativen Wert, so setze man

$$C_1 = -c^2,$$

also

$$dx = \pm\frac{ady}{\sqrt{y^2 - c^2}}; \tag{12.}$$

dies gibt, wenn man die neue Integrations-Konstante m x_0 bezeichnet,

$$x - x_0 = a\,.\,\mathrm{ArCof}\left(\frac{y}{c}\right), \tag{13.}$$

$$y = c\,\mathrm{Cof}\left(\frac{x - x_0}{a}\right) = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right). \tag{14.}$$

Setzt man noch

$$ce^{-\frac{x_0}{a}} = 2A, \quad ce^{\frac{x_0}{a}} = 2B, \tag{15.}$$

so geht Gleichung (14.) über in

$$y = Ae^{\frac{x}{a}} + Be^{-\frac{x}{a}}. \tag{16.}$$

Hat dagegen C_1 einen positiven Wert, so setze man

$$C_1 = +c^2.$$

Dadurch folgt aus Gleichung (11.)

$$dx = \pm\frac{ady}{\sqrt{y^2 + c^2}}, \tag{17.}$$

also nach Formel Nr. 35 der Tabelle, wenn man die neue Integrations-Konstante wieder mit x_0 bezeichnet,

(18.) $$x - x_0 = \pm a \,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\left(\frac{y}{c}\right),$$

(18a.) $$y = \pm c\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{x - x_0}{a}\right) = \pm \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} - e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right).$$

Dies gibt, wenn man

$$\pm \frac{c}{2} e^{-\frac{x_0}{a}} = A, \quad \mp \frac{c}{2} e^{\frac{x_0}{a}} = B$$

setzt, in Übereinstimmung mit Gleichung (16.),

$$y = A \,.\, e^{\frac{x}{a}} + Be^{-\frac{x}{a}}.$$

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

(19.) $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{a^2}$$

integrieren.

Auflösung. Bringt man diese Gleichung auf die Form

(20.) $$dp = -\frac{ydx}{a^2} = -\frac{ydy}{a^2p}, \quad \text{oder} \quad 2a^2pdp = -2ydy,$$

so erhält man durch Integration

(21.) $$a^2p^2 = C_1 - y^2.$$

Da hierbei C_1 nur *positive* Werte haben kann, möge C_1 mit c^2 vertauscht werden. Dadurch erhält man

(22.) $$ap = a\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{c^2 - y^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \pm\frac{dx}{a},$$

folglich findet man durch Integration nach Formel Nr. 34 der Tabelle

(23.) $$\arcsin\left(\frac{y}{c}\right) = C_2 \pm \frac{x}{a},$$

oder

(24.) $$y = c\sin\left(C_2 \pm \frac{x}{a}\right) = c\sin C_2 \cos\left(\frac{x}{a}\right) \pm c\cos C_2 \sin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Setzt man noch

(25.) $$\pm c\cos C_2 = A, \quad c\sin C_2 = B,$$

so geht Gleichung (24.) über in

(26.) $$y = A\sin\left(\frac{x}{a}\right) + B\cos\left(\frac{x}{a}\right).$$

Dabei sind A und B wieder zwei beliebige Konstanten, welche die Integrations-Konstanten ersetzen.

Ist allgemein die Gleichung

(27.) $$F\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}\right) = 0$$

gegeben, so setze man

(28.) $$\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = u, \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = \frac{du}{dx} = v, \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{dv}{dx} = w$$

und bringe die gegebene Differential-Gleichung durch Auflösung nach w auf die Form

(29.) $$w = f(u), \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dx} = f(u).$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung mit $2v = 2\frac{du}{dx}$ multipliziert, erhält man

(30.) $$2v\frac{dv}{dx} = 2f(u)\frac{du}{dx}$$

und durch Integration

(31.) $$v^2 = 2\int f(u)du + C_1.$$

Dies gibt

(32.) $$v = \frac{du}{dx} = \pm\sqrt{C_1 + 2\int f(u)du}, \quad \text{oder} \quad dx = \pm\frac{du}{\sqrt{C_1 + 2\int f(u)du}}$$

(33.) $$x = \pm\int\frac{du}{\sqrt{C_1 + 2\int f(u)du}} + C_2.$$

Läßt sich diese Gleichung nach u auflösen, so daß sie die Form

(34.) $$u = \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \varphi(x)$$

erhält, so kann man zur Ausführung der weiteren Integration das in § 107 angegebene Verfahren anwenden.

Läßt sich aber u nicht explicite als Funktion von x darstellen, so folgt aus Gleichung (32.)

$$(35.)\qquad udx = d\left(\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}}\right) = \pm \frac{udu}{\sqrt{C_1 + 2\int f(u)du}},$$

also

$$(36.)\qquad \frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} = \pm \int \frac{udu}{\sqrt{C_1 + 2\int f(u)du}} + C_3.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit

$$dx = \pm \frac{du}{\sqrt{C_1 + 2\int f(u)du}}$$

und integriert auf beiden Seiten, so erhält man

$$(37.)\quad \frac{d^{m-4}y}{dx^{m-4}} = \pm \int \frac{du}{\sqrt{C_1 + 2\int f(u)du}}\left[\pm \int \frac{udu}{\sqrt{C_1 + 2\int f(u)du}} + C_3\right] + C_4.$$

In dieser Weise kann man fortfahren und schließlich auch y als Funktion von u darstellen.

§ 110.

Fälle, in denen sich die Ordnung der Differential-Gleichung erniedrigen läßt.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 242 bis 244.)

Ist $n < m$, und enthält die Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung die Funktion y und die $n - 1$ ersten Ableitungen gar nicht, hat also die Differential-Gleichung die Form

$$(1.)\qquad F\left(x, \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0,$$

so kann man sie auf eine Differential-Gleichung $(m - n)^{\text{ter}}$ Ordnung reduzieren, indem man

$$(2.)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = u, \quad \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{du}{dx}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d^{m-n}u}{dx^{m-n}}$$

einführt. Die vorgelegte Differential-Gleichung wird dadurch auf die Form

$$(3.)\qquad F\left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m-n}u}{dx^{m-n}}\right) = 0$$

gebracht.

Beispiel.

Aufgabe 1. Man soll diejenigen Kurven bestimmen, bei denen der Krümmungshalbmesser im umgekehrten Verhältnisse zu der zugehörigen Abszisse steht.

Auflösung. Bezeichnet man wieder $\frac{dy}{dx}$ mit p, so müssen die gesuchten Kurven der Differential-Gleichung

$$(4.)\qquad \varrho = \pm\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = \frac{a^2}{2x}, \text{ oder } \pm(1+p)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^2}{2x}\cdot\frac{dp}{dx}$$

genügen. Daraus folgt, wenn man

$$(5.)\qquad p = \operatorname{tg} t,\quad dp = \frac{dt}{\cos^2 t},\quad \sqrt{1+p^2} = \frac{1}{\cos t}$$

setzt,

$$(6.)\qquad \pm 2x dx = \frac{a^2 dp}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} = a^2 \cos t\,.\,dt,$$

also durch Integration

$$(7.)\qquad \pm x^2 + C_1 = a^2 \sin t = \frac{a^2 p}{\sqrt{1+p^2}},$$

oder

$$(8.)\qquad p = \frac{dy}{dx} = \pm\frac{C_1 \pm x^2}{\sqrt{a^4 - (C_1 \pm x^2)^2}},$$

daraus folgt

$$(9.)\qquad y = \pm\int\frac{(C_1 \pm x^2)dx}{\sqrt{a^4 - (C_1 \pm x^2)^2}} + C_2.$$

Die Kurve, welche dieser Gleichung entspricht, heißt „die *elastische Linie*“, weil ein elastischer Stab, der an dem einen Ende befestigt und an dem andern Ende belastet ist, diese Form annimmt.

Man kann dieses Verfahren sogleich auf die Lösung der allgemeineren Aufgabe, bei welcher der Krümmungshalbmesser p irgend eine Funktion $\pm\varphi(x)$ von x ist, anwenden. Dann wird also

$$(10.)\qquad \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = \varphi(x), \quad (1+p^2)^{\frac{3}{2}} = \varphi(x)\cdot\frac{dp}{dx},$$

oder, wenn man wieder

$$(11.)\qquad p = \operatorname{tg} t \quad \text{und} \quad \int\frac{dx}{\varphi(x)} = f(x)$$

setzt,

$$(12.)\qquad \frac{dx}{\varphi(x)} = \frac{dp}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} = \cos t\,.\,dt,$$

$$(13.)\qquad \sin t = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \int\frac{dx}{\varphi(x)} + C_1 = f(x) + C_1,$$

$$(14.)\qquad p = \frac{dy}{dx} = \pm\frac{f(x)+C_1}{\sqrt{1-[f(x)+C_1]^2}},$$

$$(15.)\qquad y = \pm\int\frac{[f(x)+C_1]dx}{\sqrt{1-[f(x)+C_1]^2}} + C_2.$$

Enthält die Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung die unabhängige Veränderliche x gar nicht, hat also die Differential-Gleichung die Form

$$(16.)\qquad F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0,$$

so kann man die Ordnung wieder um eine Einheit herabdrücken, wenn man $\frac{dy}{dx} = p$ setzt und y als unabhängige Veränderliche einführt. Man erhält dann

$$(17.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\cdot\frac{dp}{dy},$$

$$(18.)\qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \left[\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p\frac{d^2p}{dy^2}\right]p,$$

. . . .

Dadurch geht die vorgelegte Differential-Gleichung über in

$$(19.)\qquad G\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots \frac{d^{m-1}p}{dy^{m-1}}\right) = 0.$$

Beispiele.

Aufgabe 2. Man soll diejenigen Kurven bestimmen, bei denen der Krümmungshalbmesser ebenso lang ist wie die zugehörige Normale.

Auflösung. Nach D.-R., Formel Nr. 143 und 149 der Tabelle sind die Ausdrücke für die Normale und für den Krümmungshalbmesser

$$(20.)\qquad N = y\frac{ds}{dx} \quad \text{und} \quad \varrho = \pm\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Die gesuchten Kurven müssen daher der Differential-Gleichung

$$(21.)\qquad \pm\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = y\frac{ds}{dx}, \quad \text{oder} \quad \pm\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = y\frac{d^2y}{dx^2}$$

genügen. Indem man

$$(22.)\qquad \frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also} \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + p^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$$

setzt, erhält man

$$(23.)\quad \pm(1 + p^2) = yp\cdot\frac{dp}{dy}, \quad \text{oder} \quad \pm\frac{2dy}{y} = \frac{2pdp}{1+p^2}.$$

Daraus findet man durch Integration

$$(24.)\qquad \pm[\ln(y^2) + \ln C_1] = \ln(1 + p^2).$$

Berücksichtigt man in Gleichung (24.) zuerst das *obere* Zeichen, so wird

$$(25.)\quad 1 + p^2 = C_1y^2, \quad \text{oder} \quad p = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1y^2 - 1}.$$

Da hierbei C_1 nur *positive* Werte haben kann, so setze man

$$(26.)\qquad C_1 = \frac{1}{a^2},$$

dann geht Gleichung (25.) über in

$$(27.)\ p = \frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{a}\sqrt{y^2 - a^2}, \quad \text{oder} \quad \pm\frac{dx}{a} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}.$$

Dies gibt durch Integration

(28.) $$\pm\frac{x-x_0}{a}=\ln\left(\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}\right)=\mathfrak{ArCos}\left(\frac{y}{a}\right),$$

wobei auf der linken Seite der Gleichung die Integrations-Konstante $\mp\frac{x_0}{a}$ hinzugefügt ist. Daraus folgt

(29.) $$y=a\mathfrak{Cos}\left(\frac{x-x_0}{a}\right),$$

oder

(30.) $$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}}+e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right).$$

Dies ist die Gleichung der *Kettenlinie*, bei der, wie schon in D.-R., § 95, Aufgabe 4 gezeigt wurde, der Krümmungshalbmesser ebenso lang ist wie die zugehörige Normale; der Krümmungshalbmesser hat dabei aber die entgegengesetzte Richtung wie die Normale. Die willkürlichen Integrations-Konstanten sind in Gleichung (30.) durch die beliebigen Größen a und x_0 vertreten.

Berücksichtigt man in Gleichung (24.) das *untere* Zeichen, so wird

(31.) $$1+p^2=\frac{1}{C_1y^2}.$$

Hier möge wieder die Integrations-Konstante C_1, da sie nur positive Werte haben kann, mit $\frac{1}{a^2}$ vertauscht werden. Dadurch erhält man

(32.) $$1+p^2=\frac{a^2}{y^2},\quad\text{oder}\quad p=\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{y}\sqrt{a^2-y^2},$$

(33.) $$\frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}}=\pm\,dx,$$

(34.) $$\pm(x-x_0)=-\sqrt{a^2-y^2},\quad\text{oder}\quad(x-x_0)^2+y^2=a^2.$$

Dies ist die Gleichung eines *Kreises* mit dem Halbmesser a, dessen Mittelpunkt in der X-Achse liegt. Der Krümmungshalbmesser ist gleich a und hat dieselbe Länge und dieselbe Richtung wie die Normale. Auch hier ver-

treten die beliebigen Größen a und x_0 die beiden Integrations-Konstanten.

Die gestellte Aufgabe hat *zwei* verschiedene Lösungen, die man erhält, je nachdem der Krümmungshalbmesser *dieselbe* oder die *entgegengesetzte* Richtung hat wie die Normale.

Aufgabe 3. Man soll diejenigen Kurven bestimmen, bei denen der Krümmungshalbmesser doppelt so lang ist wie die zugehörige Normale.

Auflösung. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (20.) müssen die gesuchten Kurven der Differential-Gleichung

$$(35.)\qquad \pm\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 2y\frac{ds}{dx}, \quad\text{oder}\quad \pm\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 2y\frac{d^2y}{dx^2}$$

genügen. Indem man wieder

$$(36.)\qquad \frac{dy}{dx} = p, \quad\text{also}\quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1+p^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p\cdot\frac{dp}{dy}$$

setzt, findet man

$$(37.)\qquad \pm(1+p^2) = 2yp\cdot\frac{dp}{dy}, \quad\text{oder}\quad \pm\frac{dy}{y} = \frac{2pdp}{1+p^2}.$$

Daraus folgt durch Integration

$$(38.)\qquad \pm\ln y + \ln C = \ln(1+p^2).$$

Berücksichtigt man zunächst das *obere* Zeichen, so wird

$$(39.)\qquad 1+p^2 = Cy, \quad\text{oder}\quad p = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{Cy-1},$$

$$(40.)\qquad \pm dx = \frac{dy}{\sqrt{Cy-1}}, \quad\text{also}\quad \pm C(x-x_0) = \int\frac{d(Cy-1)}{\sqrt{Cy-1}} = 2\sqrt{Cy-1},$$

$$C^2(x-x_0)^2 = 4Cy-4,$$

oder, wenn man die Integrations-Konstante C mit $\frac{2}{a}$ vertauscht,

$$(41.)\qquad (x-x_0)^2 = 2ay - a^2.$$

Dies ist die Gleichung einer *Parabel* mit dem willkürlichen Parameter a, deren Leitlinie zur X-Achse gemacht

ist. Die Y-Achse liegt noch ganz beliebig, weil x_0 die zweite willkürliche Integrations-Konstante ist.

Hierbei hat der Krümmungshalbmesser die entgegengesetzte Richtung wie die Normale.

Berücksichtigt man in Gleichung (38.) das *untere* Zeichen, so wird

$$(42.)\quad 1+p^2=\frac{C}{y},\ \text{oder}\ p=\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{C-y}{y}}=\pm\sqrt{\frac{C}{y}-1},$$

$$(43.)\quad \pm\, dx=dy\sqrt{\frac{y}{C-y}}.$$

Da hierbei $\frac{C}{y}-1>0$, oder $0<\frac{y}{C}<1$ sein muß, wenn die Wurzelgröße *reell* sein soll, so setze man

$$(44.)\quad y=C\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{C}{2}(1-\cos t),$$

also

$$(45.)\quad C-y=C\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{C}{2}(1+\cos t),$$

$$(46.)\quad \sqrt{\frac{y}{C-y}}=\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right),\quad dy=\frac{C}{2}\sin t\,.\,dt=C\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)dt,$$

folglich wird

$$(47.)\quad \pm\, dx=C\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt=\frac{C}{2}(1-\cos t)dt,$$

$$(48.)\quad x-x_0=\pm\frac{C}{2}(t-\sin t).$$

Vertauscht man t mit $-t$, so ändert sich Gleichung (44.) gar nicht, während in Gleichung (48.) sich nur das Vorzeichen der rechten Seite umkehrt. Man erhält daher dieselbe Kurve, gleichviel, ob man in den Gleichungen (42.), (43.) und (48.) das obere oder das untere Vorzeichen nimmt; deshalb kann man das doppelte Vorzeichen fortlassen. Indem man schließlich noch C mit $2a$ vertauscht, gehen die Gleichungen (48.) und (44.) über in

$$(49.)\quad x-x_0=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t).$$

Dies sind die Gleichungen der *Zykloide*, für welche schon in D.-R., § 95, Aufgabe 5 gezeigt wurde, daß der

Krümmungshalbmesser die doppelte Länge und dieselbe Richtung besitzt wie die Normale.

Auch diese Aufgabe hat zwei verschiedene Lösungen, die sich ergeben, je nachdem der Krümmungshalbmesser dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung hat wie die Normale.

Aufgabe 4. Man soll diejenigen Kurven bestimmen, bei denen der Krümmungshalbmesser dem Quadrate der zugehörigen Ordinate proportional ist.

Auflösung. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (20.) und (22.) müssen die gesuchten Kurven der Differential-Gleichung

$$(50.)\qquad \pm\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = ay^2, \quad \text{oder} \quad \pm(\sqrt{1+p^2})^3 = ay^2 . p\frac{dp}{dy}$$

genügen. Dies gibt

$$(51.)\qquad \frac{dy}{y^2} = \pm\frac{apdp}{(\sqrt{1+p^2})^3} = \pm\frac{a}{2}\frac{d(1+p^2)}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

also durch Integration

$$(52.)\qquad -\frac{1}{y} = \mp\frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + C, \quad \text{oder} \quad \frac{Cy+1}{y} = \pm\frac{a}{\sqrt{1+p^2}},$$

folglich wird

$$(53.)\qquad p = \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{(a^2-C^2)y^2-2Cy-1}}{Cy+1},$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(54.)\qquad a^2 - C^2 = \pm A^2, \quad \text{also} \quad C^2 \pm A^2 = a^2$$

setzt,

$$(55.)\qquad \pm dx = \frac{(Cy+1)dy}{\sqrt{\pm A^2y^2-2Cy-1}}.$$

Gilt in Gleichung (54.) das *obere* Zeichen, so setze man

$$(56.)\qquad A^2y = t + C, \quad \text{also} \quad t = A^2y - C,$$

dann wird

$$(57.)\quad Cy+1 = \frac{Ct+a^2}{A^2},\ dy = \frac{dt}{A^2},\ \sqrt{A^2y^2-2Cy-1} = \frac{1}{A}\sqrt{t^2-a^2},$$

folglich geht Gleichung (55.) über in

$$(58.)\qquad \pm\, dx = \frac{(Ct + a^2)dt}{A^3\sqrt{t^2 - a^2}}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 33 und 36 der Tabelle

$$(59.)\quad \int\frac{tdt}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \sqrt{t^2 - a^2},\ \int\frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \ln\left(\frac{t + \sqrt{t^2 - a^2}}{a}\right),$$

deshalb findet man aus Gleichung (58.) durch Integration

$$(60.)\quad \pm\, A^3(x - C_2) = AC\sqrt{A^2y^2 - 2Cy - 1} + a^2\ln(A^2y - C + A\sqrt{A^2y^2 - 2Cy - 1}),$$

wobei die Integrations-Konstante $-a^2\ln a$ auf der rechten Seite der Gleichung weggelassen ist, weil sie mit der Konstanten $\mp A^3C_2$ auf der linken Seite der Gleichung vereinigt werden kann.

Eine besonders einfache Form erhält die Lösung, wenn man die Integrations-Konstante

$$(61.)\qquad C = 0, \quad \text{also} \quad A = a$$

setzt, dann geht Gleichung (60.) über in

$$\pm\, a(x - C_2) = \ln(a^2y + a\sqrt{a^2y^2 - 1}),$$

oder

$$(62.)\qquad a(ay + \sqrt{a^2y^2 - 1}) = e^{\pm a(x - C_2)}.$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung mit $ay - \sqrt{a^2y^2 - 1}$ multipliziert, erhält man

$$a = e^{\pm a(x - C_2)}\,.\,(ay - \sqrt{a^2y^2 - 1}),$$

oder

$$(63.)\qquad a(ay - \sqrt{a^2y^2 - 1}) = a^2\,.\,e^{\mp a(x - C_2)}.$$

Durch Addition der Gleichungen (62.) und (63.) erhält man

$$(64.)\qquad 2a^2y = e^{\pm a(x - C_2)} + a^2\,.\,e^{\mp a(x - C_2)}.$$

Setzt man jetzt noch

$$aC_2 = ax_0 \mp \ln a,$$

so wird

$$(65.)\qquad \begin{cases} e^{\pm a(x - C_2)} = e^{\pm a(x - x_0) + \ln a} = a\,.\,e^{\pm a(x - x_0)}, \\ e^{\mp a(x - C_2)} = e^{\mp a(x - x_0) - \ln a} = \dfrac{1}{a}\,.\,e^{\mp a(x - x_0)}, \end{cases}$$

folglich geht Gleichung (64.) über in

$$2ay = e^{\pm a(x-x_0)} + e^{\mp a(x-x_0)}. \tag{66.}$$

Dies gibt, wenn man a mit $\frac{1}{c}$ vertauscht,

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{c}} + e^{-\frac{x-x_0}{c}}\right). \tag{67.}$$

Das ist die Gleichung der *Kettenlinie.*

Wird die Integrations-Konstante C so bestimmt, daß in Gleichung (54.) das *untere* Zeichen gilt, ist also

$$a^2 - C^2 = -A^2, \quad \text{oder} \quad A = \sqrt{C^2 - a^2}, \tag{68.}$$

so setze man

$$A^2 y = t - C, \quad \text{also} \quad t = A^2 y + C, \tag{69.}$$

dann wird

$$\begin{cases} Cy + 1 = \dfrac{Ct - a^2}{A^2}, \quad dy = \dfrac{dt}{A^2}, \\ \sqrt{-A^2y^2 - 2Cy - 1} = \dfrac{1}{A}\sqrt{a^2 - t^2}, \end{cases} \tag{70.}$$

folglich geht Gleichung (55.) über in

$$\pm\, dx = \frac{(Ct - a^2)dt}{A^3\sqrt{a^2 - t^2}}. \tag{71.}$$

Nun ist nach Formel Nr. 31 und 34 der Tabelle

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = -\sqrt{a^2 - t^2}, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \arcsin\left(\frac{t}{a}\right), \tag{72.}$$

deshalb findet man aus Gleichung (71.) durch Integration

$$\pm\, A^3(x - x_0) = \tag{73.}$$
$$-\, AC\sqrt{-A^2y^2 - 2Cy - 1} - a^2 \arcsin\left(\frac{A^2y + C}{a}\right)$$

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \tag{74.}$$

integrieren.

Auflösung. Setzt man wieder

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}, \tag{75.}$$

so erhält man aus Gleichung (74.)

(76.) $$p\frac{dp}{dy} = f(y) \cdot p^2, \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{p} = f(y)dy.$$

Daraus folgt durch Integration

(77.) $$\ln p = \int f(y)dy + \ln C_1,$$

(78.) $$p = \frac{dy}{dx} = C_1 \cdot e^{\int f(y)dy},$$

(79.) $$C_1 dx = e^{-\int f(y)dy} \cdot dy,$$

also

(80.) $$C_1 x = \int e^{-\int f(y)dy} \cdot dy + C_2.$$

Ist die vorgelegte Differential-Gleichung in bezug auf die Größen

(81.) $$y,\ y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots y^{(m)} = \frac{d^my}{dx^m}$$

homogen von der n^{ten} Ordnung, hat sie also die Form

(82.) $$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(m)}) = y^n F\left(x, \frac{y}{y}, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots \frac{y^{(m)}}{y}\right) = 0,$$

so führe man eine neue Funktion u durch die Gleichung

(83.) $$y' = yu, \quad \text{oder} \quad \ln y = udx, \quad y = e^{\int udx}$$

ein, dann wird

(84.) $$y'' = y'u + y\frac{du}{dx} = y\left(\frac{du}{dx} + u^2\right),$$

(85.) $$y''' = y'\left(\frac{du}{dx} + u^2\right) + y\left(\frac{d^2u}{dx^2} + 2u\frac{du}{dx}\right)$$
$$= y\left(\frac{d^2u}{dx^2} + 3u\frac{du}{dx} + u^3\right),$$

. . . .

Setzt man diese Werte in Gleichung (82.) ein, so erhält man eine Differential-Gleichung von der Form

(86.) $$G\left(x,\ u,\ \frac{du}{dx}, \ldots \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}\right) = 0,$$

die nur noch von der $(m - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist.

Beispiel.

Aufgabe 6. Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = 0 \tag{87.}$$

integrieren.

Auflösung. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (83.) und (84.) kann man die vorgelegte Differential-Gleichung auf die Form

$$y\left(\frac{du}{dx} + u^2\right) + \frac{yu}{x} - \frac{y}{x^2} = 0,$$

oder

$$(x^2u^2 + xu - 1)dx + x^2du = 0 \tag{88.}$$

bringen. Diese Differential-Gleichung ist nur noch von der *ersten* Ordnung und enthält u nur in der Verbindung xu; deshalb setze man

$$xu = z, \quad \text{oder} \quad u = \frac{z}{x}, \quad du = \frac{xdz - zdx}{x^2}. \tag{89.}$$

Dadurch geht Gleichung (88.) über in

$$(z^2 + z - 1)dx + xdz - zdx = 0,$$

oder

$$(z^2 - 1)dx + xdz = 0, \quad \frac{dx}{x} + \frac{dz}{z^2 - 1} = 0, \tag{90.}$$

folglich erhält man durch Integration

$$\ln(x^2) + \ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \ln C, \tag{91.}$$

$$x^2(z - 1) = C(z + 1), \quad \text{oder} \quad x^2(xu - 1) = C(xu + 1). \tag{92.}$$

Dies gibt

$$u = \frac{y'}{y} = \frac{dy}{ydx} = \frac{x^2 + C}{x(x^2 - C)}. \tag{93.}$$

Hieraus findet man durch Partialbruchzerlegung

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x - \sqrt{C}} + \frac{1}{x + \sqrt{C}} - \frac{1}{x}\right)dx \tag{94.}$$

und durch Integration

(95.) $$\ln y = \ln(x^2 - C) - \ln x + \ln C_1,$$

(96.) $$y = C_1 \frac{x^2 - C}{x}.$$

Setzt man hierbei noch

(97.) $$C_1 = A, \quad -CC_1 = B,$$

so geht Gleichung (96.) über in

(98.) $$y = Ax + Bx^{-1}.$$

XVII. Abschnitt.

Lineare Differential-Gleichungen m^{ter} Ordnung.

§ 111.

Allgemeine Bemerkungen.

Eine Differential-Gleichung von der Form

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + f_2(x)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x) \,.\, y = \varphi(x),$$

in welcher $f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x)$ und $\varphi(x)$ gegebene Funktionen von x sind, heißt *„eine lineare Differential-Gleichung* m^{ter} *Ordnung"*. Dabei soll es auch zulässig sein, daß sich die Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x)$ auf Konstante reduzieren, die dann mit $f_1, f_2, \ldots f_m$ bezeichnet werden mögen. In diesem Falle erhält Gleichung (1.) die Form

$$(2.)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + f_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + f_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + f_{m-1}\frac{dy}{dx} + f_m y = \varphi(x).$$

Wird die Funktion $\varphi(x)$ identisch gleich Null, hat also die lineare Differential-Gleichung die Form

$$(3.)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + f_2(x)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x) \,.\, y = 0,$$

so heißt sie *„homogen"*. Es wird später gezeigt werden, daß die Integration der *nicht homogenen* Differential-Gleichung (1.) immer zurückgeführt werden kann auf die Integration der *homogenen* linearen Differential-Gleichung (3.),

welche aus Gleichung (1.) hervorgeht, indem man das Glied $\varphi(x)$ auf der rechten Seite der Gleichung gleich Null setzt.

Es sollen deshalb zunächst die *homogenen* linearen Differential-Gleichungen m^{ter} Ordnung behandelt werden.

§ 112.

Homogene lineare Differential-Gleichungen m^{ter} Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 245 bis 247.)

Satz 1. *Hat die gegebene homogene lineare Differential-Gleichung*

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x)\,.\,y = 0$$

n partikuläre Integrale $y_1, y_2, \ldots y_n$, so ist auch

$$(2.)\quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

ein Integral dieser Gleichung, welche Werte die Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ auch annehmen mögen.

Beweis. Aus Gleichung (2.) folgt

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = C_1\dfrac{dy_1}{dx} + C_2\dfrac{dy_2}{dx} + \cdots + C_n\dfrac{dy_n}{dx}, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = C_1\dfrac{d^2y_1}{dx^2} + C_2\dfrac{d^2y_2}{dx^2} + \cdots + C_n\dfrac{d^2y_n}{dx^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^my}{dx^m} = C_1\dfrac{d^my_1}{dx^m} + C_2\dfrac{d^my_2}{dx^m} + \cdots + C_n\dfrac{d^my_n}{dx^m}. \end{cases}$$

Addiert man die Gleichungen (2.) und (3.), nachdem man sie bezw. mit $f_m(x), f_{m-1}(x), \ldots f_2(x), f_1(x)$ und 1 multipliziert hat, so erhält man

$$(4.)\quad \frac{d^my}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x)\,.\,y$$

$$= C_1\left[\frac{d^my_1}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy_1}{dx} + f_m(x)\,.\,y_1\right]$$

$$+ C_2\left[\frac{d^my_2}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy_2}{dx} + f_m(x)\,.\,y_2\right]$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ C_n\left[\frac{d^my_n}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y_n}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy_n}{dx} + f_m(x)\,.\,y_n\right] = 0,$$

denn nach Voraussetzung werden die Ausdrücke in den eckigen Klammern einzeln gleich Null.

Satz 2. *Kennt man m partikuläre Integrale y_1, y_2, $\ldots y_m$ und kann man in*

(5.) $$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_m y_m$$

die Konstanten C_1, C_2, $\ldots C_m$ so bestimmen, daß

(6.) $$y,\ y' = \frac{dy}{dx},\quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots y^{(m-1)} = \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

für $x = x_0$ die beliebig vorgeschriebenen Anfangswerte y_0, y_0', y_0'', $\ldots y_0^{(m-1)}$ annehmen, so ist y das allgemeine Integral der vorgelegten Differential-Gleichung.

Daß y ein Integral der vorgelegten Differential-Gleichung ist, folgt schon aus Satz 1, und da man die Anfangswerte y_0, y_0', y_0'', $\ldots y_0^{(m-1)}$, welche dem Werte $x = x_0$ entsprechen, nach Voraussetzung noch beliebig annehmen kann, so ist y auch das *allgemeine* Integral.

Es ist nur noch zu erklären, weshalb diese Voraussetzung hinzugefügt werden muß, obwohl in Gleichung (5.) scheinbar bereits m willkürliche Konstanten C_1, C_2, $\ldots C_m$ enthalten sind. Die Größen y_1, y_2, $\ldots y_m$ sind möglicherweise nicht voneinander unabhängig, es kann z. B. zwischen y_1, y_2 und y_3 die lineare Gleichung

(7.) $$y_3 = ky_1 + ly_2$$

bestehen. Dann ist aber Gleichung (5.), nämlich

(8.) $$y = (C_1 + kC_3)y_1 + (C_2 + lC_3)y_2 + C_4 y_4 + \cdots + C_m y_m,$$

kein *allgemeines* Integral, da in diesem Ausdrucke nur $m-1$ willkürliche Konstanten $C_1 + kC_3 = C_1'$, $C_2 + lC_3 = C_2'$, C_4, $\ldots C_m$ enthalten sind. Umgekehrt kann man auch zeigen, daß die Größen y_1, y_2, $\ldots y_m$ durch eine lineare Gleichung verbunden sind, wenn jene Voraussetzung nicht erfüllt ist; der Beweis dieser Behauptung möge hier aber übergangen werden.

Ist

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_m y_m$$

das *allgemeine* Integral der homogenen linearen Differential-

Gleichung (1.), so nennt man $y_1, y_2, \ldots y_m$ „ein *Fundamentalsystem* von partikulären Integralen".

Nach Formel Nr. 244 der Tabelle kann man die Ordnung einer Differential-Gleichung, welche in bezug auf y, y', y'', $\ldots y^{(m)}$ homogen ist, um eine Einheit erniedrigen, indem man

$$(9.)\quad \frac{y'}{y} = u,\ \frac{y''}{y} = \frac{du}{dx} + u^2,\ \frac{y'''}{y} = \frac{d^2u}{dx^2} + 3u\frac{du}{dx} + u^3, \ldots$$

setzt. Dies gibt

Satz 3. *Die Ordnung einer homogenen linearen Differential-Gleichung kann stets um eine Einheit erniedrigt werden.*

Durch die angegebene Substitution erhält also Gleichung (1.) die Form

$$(10.)\quad \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \cdots + [u^m + f_1(x)u^{m-1} + \cdots + f_{m-1}(x)u + f_m(x)] = 0.$$

Diese Gleichung ist im allgemeinen nicht mehr homogen und im allgemeinen auch nicht mehr linear, aber sie kann doch zu *partikulären* Integralen führen. Hat z. B. die Gleichung

$$(11.)\quad F(u) = u^m + f_1(x)u^{m-1} + f_2(x)u^{m-2} + \cdots + f_{m-1}(x)u + f_m(x) = 0$$

Wurzeln $r_1, r_2, \ldots r_n$, die von x unabhängig sind, so werden

$$(12.)\quad u = r_1,\quad u = r_2, \ldots u = r_n$$

partikuläre Integrale der Gleichung (10.) sein, weil

$$(13.)\quad \frac{dr_1}{dx} = 0,\ \frac{dr_2}{dx} = 0, \cdots \frac{dr_n}{dx} = 0$$

ist. Die zugehörigen Werte von $y = e^{\int u dx}$ sind dann

$$(14.)\quad y_1 = e^{r_1 x},\quad y_2 = e^{r_2 x}, \ldots y_n = e^{r_n x}.$$

Dieser Fall tritt namentlich dann ein, wenn die Größen $f_1(x) = f_1$, $f_2(x) = f_2, \ldots f_m(x) = f_m$ sämtlich von x unabhängig sind. Die Gleichung

$$(15.)\quad F(u) = u^m + f_1 u^{m-1} + f_2 u^{m-2} + \cdots + f_{m-1}u + f_m = 0,$$

welche man „die *charakteristische* Gleichung" nennt, hat dann

lauter konstante Wurzeln $r_1, r_2, \ldots r_m$. Sind diese Wurzeln zunächst *sämtlich voneinander verschieden*, so findet man aus den m partikulären Integralen

$$(16.)\qquad y_1 = e^{r_1x},\quad y_2 = e^{r_2x}, \ldots y_m = e^{r_mx}$$

der vorgelegten Differential-Gleichung (1.) ohne weiteres das *allgemeine* Integral

$$(17.)\qquad y = C_1 . e^{r_1x} + C_2 . e^{r_2x} + \cdots + C_m . e^{r_mx}.$$

Der gefundene Ausdruck ist in der Tat das *allgemeine* Integral, denn man kann beweisen, daß durch passende Wahl der Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_m$ die m Größen y, y', $y'', \ldots y^{(m-1)}$ für $x = x_0$ beliebig vorgeschriebene Anfangswerte $y_0, y_0', y_0'', \ldots y_0^{(m-1)}$ annehmen. Aus Gleichung (17.) folgen nämlich die Gleichungen

$$(18.)\quad \begin{cases} y = C_1 . e^{r_1x} + C_2 . e^{r_2x} + \cdots + C_m . e^{r_mx}, \\ y' = C_1r_1 . e^{r_1x} + C_2r_2 . e^{r_2x} + \cdots + C_mr_m . e^{r_mx}, \\ y'' = C_1r_1^2 . e^{r_1x} + C_2r_2^2 . e^{r_2x} + \cdots + C_mr_m^2 . e^{r_mx}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(m-1)} = C_1r_1^{m-1} . e^{r_1x} + C_2r_2^{m-1} . e^{r_2x} + \cdots + C_mr_m^{m-1} . e^{r_mx}, \end{cases}$$

welche zunächst für $x = 0$ in

$$(19.)\quad \begin{cases} y_0 = C_1 + C_2 + \cdots + C_m, \\ y_0' = C_1r_1 + C_2r_2 + \cdots + C_mr_m, \\ y_0'' = C_1r_1^2 + C_2r_2^2 + \cdots + C_mr_m^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_0^{(m-1)} = C_1r_1^{m-1} + C_2r_2^{m-1} + \cdots + C_mr_m^{m-1} \end{cases}$$

übergehen sollen. Bildet man die Funktion

$$(20.)\qquad \frac{F(r)}{r - r_1} = (r - r_2)(r - r_3) \ldots (r - r_m) = F_1(r),$$

so hat $F_1(r)$ die Form

$$(20a.)\qquad F_1(r) = r^{m-1} + k_1r^{m-2} + \cdots + k_{m-2}r + k_{m-1}.$$

Multipliziert man nun die Gleichungen (19.) bezw. mit $k_{m-1}, k_{m-2}, \ldots k_1, 1$, so erhält man durch Addition

$$(21.)\qquad k_{m-1}y_0 + k_{m-2}y_0' + k_{m-3}y_0'' + \cdots \\ + k_1y_0^{(m-2)} + y_0^{(m-1)} = C_1F_1(r_1),$$

denn die Glieder

$$C_2F_1(r_2),\quad C_3F_1(r_3),\ldots C_mF_1(r_m)$$

werden sämtlich gleich Null. Dabei ist bekanntlich

$$F_1(r_1) = \lim_{r=r_1}\frac{F(r)-F(r_1)}{r-r_1} = F'(r_1). \tag{22.}$$

Aus Gleichung (21.) findet man dann

$$C_1 = \frac{k_{m-1}y_0 + k_{m-2}y_0' + k_{m-3}y_0'' + \cdots + k_1y_0^{(m-2)} + y_0^{(m-1)}}{F'(r_1)}. \tag{23.}$$

In ähnlicher Weise findet man auch die Werte C_2 $C_3,\ldots C_m$.

Setzt man

$$x - x_0 = x',\quad\text{also}\quad x = x' + x_0,$$

so wird

$$y = C_1e^{r_1(x'+x_0)} + C_2e^{r_2(x'+x_0)} + \cdots + C_me^{r_m(x'+x_0)},$$

oder, wenn man

$$C_1e^{r_1x_0} = C_1',\quad C_2e^{r_2x_0} = C_2',\ldots C_me^{r_mx_0} = C_m' \tag{24.}$$

setzt,

$$\begin{aligned} y &= C_1'e^{r_1x'} + C_2'e^{r_2x'} + \cdots + C_m'e^{r_mx'} \\ &= C_1'e^{r_1(x-x_0)} + C_2'e^{r_2(x-x_0)} + \cdots + C_m'e^{r_m(x-x_0)}. \end{aligned} \tag{25.}$$

Indem man jetzt die Konstanten C_1', C_2', ... C_m' ebenso bestimmt wie vorher die Konstanten C_1, C_2, ... C_m, erreicht man, daß y, y', y'', ... $y^{(m-1)}$ für $x' = 0$, also für $x = x_0$ die vorgeschriebenen Werte y_0, y_0', y_0'', ... $y_0^{(m-1)}$ annehmen. Deshalb ist Gleichung (17.) das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung.

Beispiel.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{y}{a^2} = 0 \tag{26.}$$

integrieren.

Auflösung. Hier ist die charakteristische Gleichung

$$F(u) = u^2 - \frac{1}{a^2} = 0,\quad\text{also}\quad r_1 = \frac{1}{a},\quad r_2 = -\frac{1}{a}, \tag{27.}$$

folglich wird in Übereinstimmung mit Aufgabe 1 in § 109

$$y = C_1e^{\frac{x}{a}} + C_2e^{-\frac{x}{a}}. \tag{28.}$$

Hat die charakteristische Gleichung $F(u) = 0$ auch komplexe Wurzeln, so bleibt die gegebene Lösung noch richtig, sie nimmt aber eine komplexe Form an. Dem Endresultate kann man jedoch leicht wieder eine reelle Form geben, wenn man beachtet, daß die komplexen Wurzeln paarweise konjugiert auftreten. Ist z. B.

(29.) $$r_1 = a + bi, \quad r_2 = a - bi,$$

so wird

$$C_1 . e^{r_1 x} + C_2 . e^{r_2 x} = C_1 . e^{ax+bix} + C_2 . e^{ax-bix}$$
$$= e^{ax}[(C_1 + C_2)\cos(bx) + i(C_1 - C_2)\sin(bx)],$$

oder, wenn man

(30.) $$C_1 + C_2 = A, \quad i(C_1 - C_2) = B$$

setzt,

(31.) $$C_1 . e^{r_1 x} + C_2 . e^{r_2 x} = e^{ax}[A\cos(bx) + B\sin(bx)].$$

Beispiele.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

(32.) $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{a^2}$$

integrieren.

Auflösung. Hier ist die charakteristische Gleichung

(33.) $$F(u) = u^2 + \frac{1}{a^2} = 0, \quad \text{also} \quad r_1 = \frac{i}{a}, \quad r_2 = -\frac{i}{a},$$

folglich wird in Übereinstimmung mit Aufgabe 2 in § 109

(34.) $$y = C_1 . e^{\frac{xi}{a}} + C_2 . e^{-\frac{xi}{a}} = (C_1 + C_2)\cos\left(\frac{x}{a}\right) + i(C_1 - C_2)\sin\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$= A\cos\left(\frac{x}{a}\right) + B\sin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

(35.) $$\frac{d^3y}{dx^3} - 7\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

integrieren.

Auflösung. Hier ist die charakteristische Gleichung

(36.) $$F(u) = u^3 - 7u + 6 = 0, \quad \text{also} \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = -3,$$

folglich wird

(37.) $$y = C_1 . e^x + C_2 . e^{2x} + C_3 . e^{-3x}.$$

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Gleichung

(38.) $$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 13\frac{dy}{dx} - 10y = 0$$

integrieren.

Auflösung. Hier ist die charakteristische Gleichung

(39.) $$F(u) = u^3 - 6u^2 + 13u - 10 = 0,$$

also

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 2 + i, \quad r_3 = 2 - i,$$

folglich wird

(40.) $$\begin{aligned} y &= C_1 . e^{2x} + C_2 . e^{2x+ix} + C_3 . e^{2x-ix} \\ &= e^{2x}(C_1 + A\cos x + B\sin x). \end{aligned}$$

Bisher war vorausgesetzt worden, daß die Wurzeln r_1, $r_2, \ldots r_m$ der charakteristischen Gleichung $F(u) = 0$ alle voneinander verschieden sind. Hat aber $F(u) = 0$ auch *gleiche* Wurzeln, so erhält man durch Gleichung (17.) nicht mehr das *allgemeine* Integral. Ist z. B. $r_1 = r_2$, so kann man in Gleichung (17.) die Glieder

$$C_1 . e^{r_1x} + C_2 . e^{r_2x} \quad \text{in} \quad (C_1 + C_2) . e^{r_1x}$$

zusammenfassen, so daß der Ausdruck für y nur noch $m - 1$ Integrations-Konstanten enthält.

Aber auch hier kann man das *allgemeine* Integral durch eine Grenzbetrachtung aus der bisher angegebenen Form finden. Es sei zunächst

(41.) $$r_2 = r_1 + h,$$

also

(42.) $$\begin{aligned} y &= C_1 . e^{r_1x} + C_2 . e^{r_1x+hx} + C_3 . e^{r_3x} + \cdots + C_m e^{r_mx} \\ &= (C_1 + C_2 . e^{hx})e^{r_1x} + C_3 . e^{r_3x} + \cdots + C_m . e^{r_mx}. \end{aligned}$$

Nun ist aber

(43.) $$C_1 + C_2 . e^{hx} = C_1 + C_2 + C_2\frac{hx}{1!} + C_2 \cdot \frac{h^2x^2}{2!} + \cdots.$$

Setzt man in dieser Gleichung

(44.) $$C_1 + C_2 = C, \quad C_2h = C',$$

so sind auch C und C' noch zwei beliebige Konstanten; Gleichung (43.) erhält dadurch die Form

$$(45.)\quad C_1 + C_2 \,.\, e^{hx} = C + C'x + C'\frac{hx^2}{2!} + C'\cdot\frac{h^2x^3}{3!} + \cdots.$$

Läßt man jetzt h sich der Grenze Null nähern, so erhält man

$$(46.)\qquad \lim_{h=0} r_2 = r_1;\quad \lim_{h=0}(C_1 + C_2 \,.\, e^{hx}) = C + C'x,$$

folglich geht Gleichung (42.) in diesem Falle über in

$$(47.)\quad y = (C + C'x)\,.\,e^{r_1x} + C_3\,.\,e^{r_3x} + \cdots + C_m\,.\,e^{r_mx}.$$

In dieser Formel treten wieder m willkürliche Integrations-Konstanten auf, wenn $r_1, r_3, \ldots r_m$ sämtlich voneinander verschieden sind.

Setzt man jetzt in Gleichung (47.)

$$(48.)\qquad r_3 = r_1 + h,$$

also

$$(49.)\quad y = (C + C'x)\,.\,e^{r_1x} + C_3\,.\,e^{r_1x+hx} + C_4\,.\,e^{r_4x} + \cdots + C_m\,.\,e^{r_mx}$$
$$= (C + C'x + C_3\,.\,e^{hx})\,.\,e^{r_1x} + C_4\,.\,e^{r_4x} + \cdots + C_m\,.\,e^{r_mx},$$

so wird

$$(50.)\quad C + C'x + C_3\,.\,e^{hx} = C + C'x + C_3 + C_3\frac{hx}{1!} + C_3\frac{h^2x^2}{2!} + \cdots,$$

oder, wenn man

$$(51.)\qquad C + C_3 = A_1,\quad C' + C_3h = A_2,\quad C_3h^2 = 2A_3$$

setzt,

$$(52.)\quad C + C'x + C_3\,.\,e^{hx} = A_1 + A_2x + A_3x^2 + 2A_3\frac{hx^3}{3!} + \cdots,$$

wobei A_1, A_2, A_3 wieder drei willkürliche Konstanten sind. Läßt man jetzt h sich der Grenze Null nähern, so erhält man

$$(53.)\quad \lim_{h=0} r_3 = r_1,\quad \lim_{h=0}(C + C'x + C_3\,.\,e^{hx}) = A_1 + A_2x + A_3x^2,$$

folglich geht Gleichung (49.) in diesem Falle, wo $r_1 = r_2 = r_3$ ist, über in

$$(54.)\quad y = (A_1 + A_2x + A_3x^2)\,.\,e^{r_1x} + C_4\,.\,e^{r_4x} + \cdots + C_m\,.\,e^{r_mx}.$$

Dieser Ausdruck enthält wieder m willkürliche Konstanten, wenn $r_1, r_4, \ldots r_m$ voneinander verschieden sind.

In gleicher Weise kann man alle Fälle erledigen, in denen die charakteristische Gleichung $F(u) = 0$ mehrfache Wurzeln hat.

Dieselben Resultate findet man auch auf einem andern Wege. Nach D.-R., Formel Nr. 86 der Tabelle ist

$$(55.)\quad \frac{d^n(uv)}{dx^n} = u\frac{d^nv}{dx^n} + \binom{n}{1}\frac{du}{dx}\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \cdots + \binom{n}{1}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx} + \frac{d^nu}{dx^n}v.$$

Führt man also in die Gleichung

$$\frac{d^my}{dx^m} + f_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + f_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + f_{m-1}\frac{dy}{dx} + f_m\cdot y = 0$$

für y das Produkt uv ein, so erhält man

$$(56.)\quad \left(\frac{d^mv}{dx^m} + f_1\frac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}} + f_2\frac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + \cdots + f_{m-1}\frac{dv}{dx} + f_m\cdot v\right)u$$
$$+ \frac{1}{1!}\left[m\frac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}} + (m-1)f_1\frac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + (m-2)f_2\frac{d^{m-3}v}{dx^{m-3}} + \cdots + f_{m-1}\cdot v\right]\frac{du}{dx}$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[m(m-1)\frac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + (m-1)(m-2)f_1\frac{d^{m-3}v}{dx^{m-3}} + \cdots + 2.1f_{m-2}\cdot v\right]\frac{d^2u}{dx^2}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{m!}m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1.v\cdot\frac{d^mu}{dx^m} = 0,$$

oder

$$(57.)\quad Vu + \frac{1}{1!}V_1\frac{du}{dx} + \frac{1}{2!}V_2\frac{d^2u}{dx^2} + \cdots + \frac{1}{m!}V_m\frac{d^mu}{dx^m} = 0,$$

wobei

$$(58.)\quad \begin{cases} V = \dfrac{d^mv}{dx^m} + f_1\dfrac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}} + f_2\dfrac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + \cdots + f_m\cdot v, \\ V_1 = m\dfrac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}} + (m-1)f_1\dfrac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + (m-2)f_2\dfrac{d^{m-3}v}{dx^{m-3}} + \cdots + f_{m-1}\cdot v, \\ V_2 = m(m-1)\dfrac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + (m-1)(m-2)f_1\dfrac{d^{m-3}v}{dx^{m-3}} + \cdots + 2.1f_{m-2}\cdot v \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Von den beiden Funktionen u und v kann man die eine, z. B. v, noch willkürlich bestimmen. Setzt man daher

$$(59.)\qquad v = e^{rx},\quad \text{also}\quad \frac{dv}{dx} = r\,.\,e^{rx},\quad \frac{d^2v}{dx^2} = r^2\,.\,e^{rx}, \ldots,$$

so gehen die Gleichungen (58.) über in

$$(60.)\quad \begin{cases} V = e^{rx}(r^m + f_1 r^{m-1} + f_2 r^{m-2} + \cdots + f_{m-1} r + f_m) = e^{rx}\,.\,F(r), \\ V_1 = e^{rx}[m r^{m-1} + (m-1) f_1 r^{m-2} + (m-2) f_2 r^{m-3} + \cdots \\ \qquad\qquad + f_{m-1}] = e^{rx}\,.\,F'(r), \\ V_2 = e^{rx}[m(m-1) r^{m-2} + (m-1)(m-2) f_1 r^{m-3} + \cdots \\ \qquad\qquad + 2\,.\,1 f_{m-2}] = e^{rx}\,.\,F''(r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Deshalb erhält Gleichung (57.), wenn man den allen Gliedern gemeinsamen Faktor e^{rx} fortläßt, die Form

$$(61.)\quad F(r)\,.\,u + \frac{F'(r)}{1!}\frac{du}{dx} + \frac{F''(r)}{2!}\frac{d^2u}{dx^2} + \cdots \\ + \frac{F^{(m-1)}(r)}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \frac{d^mu}{dx^m} = 0.$$

Jetzt sei r_1 eine *einfache* Wurzel der charakteristischen Gleichung $F(r) = 0$, dann wird Gleichung (61.) befriedigt, wenn man

$$(62.)\qquad r = r_1,\quad u = C_1,\quad \text{also}\quad y = C_1\,.\,e^{r_1 x}$$

setzt. Ist dagegen r_1 eine α-fache Wurzel von $F(r) = 0$, so wird

$$F(r_1) = 0,\quad F'(r_1) = 0,\quad F''(r_1) = 0, \ldots F^{(\alpha-1)}(r_1) = 0,$$

so daß Gleichung (61.) befriedigt wird, wenn man

$$(63.)\qquad r = r_1,\quad u = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_\alpha x^{\alpha-1},$$

also

$$(64.)\qquad y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_\alpha x^{\alpha-1})\,.\,e^{r_1 x}$$

setzt. Auf diese Weise kann man immer einen Ausdruck finden, der m willkürliche Konstanten enthält und deshalb das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung ist.

Beispiel.

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Gleichung

$$(65.)\qquad \frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 10\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

integrieren.

Auflösung. Hier ist die charakteristische Gleichung

$$(66.)\qquad \begin{aligned} F(r) &= r^4 - 4r^3 + 10r^2 - 12r + 5 \\ &= (r^2 - 2r + 1)(r^2 - 2r + 5) = 0, \end{aligned}$$

also

$$(67.)\qquad r_1 = r_2 = 1, \quad r_3 = 1 + 2i, \quad r_4 = 1 - 2i,$$

folglich wird

$$(68.)\qquad \begin{aligned} y &= (C_1 + C_2x)e^x + e^x[A\cos(2x) + B\sin(2x)] \\ &= e^x[C_1 + C_2x + A\cos(2x) + B\sin(2x)]. \end{aligned}$$

§ 113.

Nicht homogene lineare Differential-Gleichungen m^{ter} Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 248.)

Für die Integration der *nicht homogenen* linearen Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung

$$(1.)\qquad \frac{d^my}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\cdot\frac{dy}{dx} + f_m(x)\,.\,y = \varphi(x)$$

leistet häufig der folgende Satz gute Dienste:

Satz. *Kennt man ein Fundamentalsystem partikulärer Integrale* $y_1, y_2, \ldots y_m$ *der homogenen linearen Differential-Gleichung*

$$(2.)\qquad \frac{d^my}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x)\,.\,y = 0$$

und ein partikuläres Integral Y *der nicht homogenen Gleichung* (1.), *so ist*

$$(3.)\qquad y = Y + c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_my_m$$

das allgemeine Integral der nicht homogenen Gleichung (1.).

Beweis. Der Kürze wegen setze man für $\alpha = 1, 2, \ldots m$

$$(4.)\quad \frac{dy_\alpha}{dx} = y'_\alpha, \quad \frac{d^2y_\alpha}{dx^2} = y''_\alpha, \ldots \frac{d^my_\alpha}{dx^m} = y^{(m)}_\alpha,$$

dann folgt aus Gleichung (3.)

$$(5.)\quad \begin{cases} y' = Y' + c_1y_1' + c_2y_2' + \cdots + c_my_m', \\ y'' = Y'' + c_1y_1'' + c_2y_2'' + \cdots + c_my_m'', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(m-1)} = Y^{(m-1)} + c_1y_1^{(m-1)} + c_2y_2^{(m-1)} + \cdots + c_my_m^{(m-1)}, \\ y^{(m)} = Y^{(m)} + c_1y_1^{(m)} + c_2y_2^{(m)} + \cdots + c_my_m^{(m)}. \end{cases}$$

Nun ist nach Voraussetzung

$$(6.)\quad \begin{cases} Y^{(m)} + f_1(x) \cdot Y^{(m-1)} + \cdots + f_{m-1}(x) \cdot Y' + f_m(x) \cdot Y = \varphi(x). \\ y_\alpha^{(m)} + f_1(x) \cdot y_\alpha^{(m-1)} + \cdots + f_{m-1}(x) \cdot y_\alpha' + f_m(x) \cdot y_\alpha = 0. \end{cases}$$

Addiert man also die Gleichungen (3.) und (5.), nachdem man sie bezw. mit $f_m(x), f_{m-1}(x), \ldots f_1(x)$ und 1 multipliziert hat, so findet man mit Rücksicht auf die Gleichungen (6.)

$$(7.)\quad y^{(m)} + f_1(x) \cdot y^{(m-1)} + \cdots + f_{m-1}(x) \cdot y' + f_m(x) \cdot y = \varphi(x),$$

d. h. y ist ein Integral der Gleichung (1.). Die Funktion y ist aber auch das *allgemeine* Integral der Gleichung (1.), weil es die m willkürlichen Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_m$ enthält und zwischen den partikulären Integralen $y_1, y_2, \ldots y_m$ der Gleichung (2.) nach Voraussetzung keine lineare Beziehung besteht.

Von diesem Satze kann man Gebrauch machen, um das allgemeine Integral der Gleichung (1.) zu finden, wenn die Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x)$ sich auf die konstanten Werte $f_1, f_2, \ldots f_m$ reduzieren, und die charakteristische Gleichung

$$F(r) = r^m + f_1r^{m-1} + \cdots + f_{m-1}r + f_m = 0$$

lauter verschiedene Wurzeln $r_1, r_2, \ldots r_m$ hat.

Das allgemeine Integral der *homogenen* Gleichung (2.) läßt sich dann auf die Form

$$(8.)\quad y = C_1e^{r_1(x-x_0)} + C_2e^{r_2(x-x_0)} + \cdots + C_me^{r_m(x-x_0)}$$

bringen. Dabei kann man nach den Ausführungen in § 112 die Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_m$ immer so bestimmen, daß die Größen $y, y', y'', \ldots y^{(m-1)}$ für $x = x_0$ die vorgeschriebenen Werte $y_0, y_0', y_0'', \ldots y_0^{(m-1)}$ annehmen. Für den vorliegenden Zweck setze man

$$(9.)\quad y_0 = 0,\ y_0' = 0,\ y_0'' = 0,\ y_0^{(m-2)} = 0, \ldots y_0^{(m-1)} = \varphi(x_0),$$

dann gehen die Gleichungen (19.) in § 112 über in

$$(10.)\quad \begin{cases} C_1 + C_2 + \cdots + C_m = 0, \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 + \cdots + C_m r_m = 0, \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 + \cdots + C_m r_m^2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1 r_1^{m-2} + C_2 r_2^{m-2} + \cdots + C_m r_m^{m-2} = 0, \\ C_1 r_1^{m-1} + C_2 r_2^{m-1} + \cdots + C_m r_m^{m-1} = \varphi(x_0). \end{cases}$$

Daraus folgt nach Gleichung (23.) in § 112

$$(11.)\quad C_1 = \frac{\varphi(x_0)}{F'(r_1)},\ C_2 = \frac{\varphi(x_0)}{F'(r_2)}, \cdots C_m = \frac{\varphi(x_0)}{F'(r_m)}.$$

Die Funktion

$$(12.)\quad y = \frac{\varphi(x_0)}{F'(r_1)} \cdot e^{r_1(x-x_0)} + \frac{\varphi(x_0)}{F'(r_2)} \cdot e^{r_2(x-x_0)} + \cdots + \frac{\varphi(x_0)}{F'(r_m)} \cdot e^{r_m(x-x_0)}$$

ist daher ein partikuläres Integral der homogenen Gleichung (2.) und hat die Eigenschaft, daß sie mit ihren $m - 2$ ersten Ableitungen für $x = x_0$ verschwindet, während die $(m - 1)^{\text{te}}$ Ableitung gleich $\varphi(x_0)$ wird.

Bezeichnet man jetzt die beliebige Größe x_0 mit t, so geht Gleichung (12.) über in

$$(12\text{a.})\quad y = \frac{\varphi(t)}{F'(r_1)} \cdot e^{r_1(x-t)} + \frac{\varphi(t)}{F'(r_2)} \cdot e^{r_2(x-t)} + \cdots + \frac{\varphi(t)}{F'(r_m)} \cdot e^{r_m(x-t)}.$$

Wenn man sodann mit

$$(y)_{t=x},\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=x} = (y')_{t=x},\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=x} = (y'')_{t=x},$$
$$\cdots \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_{t=x} = (y^{(m-1)})_{t=x}$$

diejenigen Werte bezeichnet, welche die Größen y, y', y'' ... $y^{(m-1)}$ für $t = x$ annehmen, so folgt aus den Gleichunge (10.), daß

(13.) $(y)_{t=x} = 0,\ (y')_{t=x} = 0,\ (y'')_{t=x} = 0, \ldots (y^{(m-2)})_{t=x} = 0$

ist, während

(14.) $$(y^{(m-1)})_{t=x} = \varphi(x)$$

wird. Setzt man also

(15.) $$Y = \int_0^x y\,dt,$$

so findet man aus Formel Nr. 184 der Tabelle, wenn ma die Buchstaben x und t miteinander vertauscht, also a der Formel

(16.) $$\frac{d}{dx}\int_a^b f(t, x)dt = \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dt - f(a, x)\frac{da}{dx} + f(b, x)\frac{db}{dx}$$

die folgenden Gleichungen

(17.) $$\begin{cases} \dfrac{dY}{dx} = \displaystyle\int_0^x y'dt + (y)_{t=x} = \int_0^x y'dt, \\ \dfrac{d^2Y}{dx^2} = \displaystyle\int_0^x y''dt + (y')_{t=x} = \int_0^x y''dt, \\ \dfrac{d^3Y}{dx^3} = \displaystyle\int_0^x y'''dt + (y'')_{t=x} = \int_0^x y'''dt, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}} = \displaystyle\int_0^x y^{(m-1)}dt + (y^{(m-2)})_{t=x} = \int_0^x y^{(m-1)}dt, \\ \dfrac{d^mY}{dx^m} = \displaystyle\int_0^x y^{(m)}dt + (y^{(m-1)})_{t=x} = \int_0^x y^{(m)}dt + \varphi(x). \end{cases}$$

Indem man diese Werte von $Y, \frac{dY}{dx}, \frac{d^2Y}{dx^2}, \ldots \frac{d^mY}{dx^m}$ a den Gleichungen (15.) und (17.) in die Gleichung (1.) für

$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^my}{dx^m}$ einsetzt, erhält man, da sich $\varphi(x)$ auf beiden Seiten forthebt,

$$(18.)\quad \int_0^x (y^{(m)} + f_1 . y^{(m-1)} + \cdots + f_{m-1} . y' + f_m . y)dt = 0.$$

Diese Gleichung wird aber in der Tat befriedigt, denn nach Formel Nr. 245 der Tabelle ist y ein partikuläres Integral der homogenen Gleichung (2.); folglich ist Y ein partikuläres Integral der *nicht* homogenen Gleichung (1.).

Aus dem *partikulären* Integral findet man nach dem oben angeführten Satze sofort das *allgemeine* Integral, indem man

$$(19.)\quad y = Y + v$$

setzt, wobei

$$(20.)\quad v = c_1 . e^{r_1x} + c_2 . e^{r_2x} + \cdots + c_m . e^{r_mx}$$

das allgemeine Integral der homogenen Gleichung (2.) ist. Dadurch erhält man

$$(21.)\quad y = \left[\int_0^x \frac{\varphi(t) . e^{r_1(x-t)}dt}{F'(r_1)} + c_1 . e^{r_1x}\right]$$

$$+ \left[\int_0^x \frac{\varphi(t) . e^{r_2(x-t)}dt}{F'(r_2)} + c_2 . e^{r_2x}\right]$$

$$+ \cdots + \left[\int_0^x \frac{\varphi(t) . e^{r_m(x-t)}dt}{F'(r_m)} + c_m . e^{r_mx}\right],$$

oder, wenn man

$$(22.)\quad c_1 . F'(r_1) = C_1,\quad c_2 . F'(r_2) = C_2, \ldots c_m . F'(r_m) = C_m$$

setzt,

$$(23.)\quad y = \frac{e^{r_1x}}{F'(r_1)}\left[C_1 + \int_0^x \varphi(t) . e^{-r_1t}dt\right] + \frac{e^{r_2x}}{F'(r_2)}\left[C_2 + \int_0^x \varphi(t) . e^{-r_2t}dt\right]$$

$$+ \cdots + \frac{e^{r_mx}}{F'(r_m)}\left[C_m + \int_0^x \varphi(t) . e^{-r_mt}dt\right].$$

Dasselbe Resultat findet man auch durch *Variation der Konstanten*, die in dem folgenden Paragraphen erläutert werden soll.

Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{y}{a^2} = \varphi(x) \tag{24.}$$

integrieren.

Auflösung. Hier ist die charakteristische Gleichung

$$\left\{\begin{array}{l} F(r) = r^2 - \frac{1}{a^2} = 0, \quad \text{also} \quad r_1 = \frac{1}{a}, \; r_2 = -\frac{1}{a}, \\ F'(r) = 2r, \quad F'(r_1) = \frac{2}{a}, \; F'(r_2) = -\frac{2}{a}, \end{array}\right. \tag{25.}$$

folglich wird nach Gleichung (23.)

$$y = \frac{a}{2} e^{\frac{x}{a}}\left[C_1 + \int_0^x \varphi(t) . e^{-\frac{t}{a}} dt\right] - \frac{a}{2} e^{-\frac{x}{a}}\left[C_2 + \int_0^x \varphi(t) e^{\frac{t}{a}} dt\right]. \tag{26.}$$

Ist z. B.

$$\varphi(x) = e^{\frac{x}{a}}, \tag{27.}$$

so wird

$$\int_0^x \varphi(t) . e^{-\frac{t}{a}} dt = \int_0^x dt = x, \quad \int_0^x \varphi(t) . e^{\frac{t}{a}} dt = \int_0^x e^{\frac{2t}{a}} dt = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2x}{a}} - 1\right), \tag{28.}$$

so daß Gleichung (26.) übergeht in

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{2} e^{\frac{x}{a}}\left(C_1 + x\right) - \frac{a}{2} e^{-\frac{x}{a}}\left[C_2 + \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2x}{a}} - 1\right)\right] \\ &= \frac{a}{2}\left[\left(C_1 + x\right) e^{\frac{x}{a}} - C_2 e^{-\frac{x}{a}}\right] - \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right). \end{aligned} \tag{29.}$$

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} + 20y = 4000x^2 \tag{30.}$$

integrieren.

Auflösung. Hier ist die charakteristische Gleichung

$$\left\{\begin{array}{l} F(r) = r^2 - 9r + 20 = 0, \quad \text{also} \quad F'(r) = 2r - 9, \; r_1 = 5, \\ r_2 = 4, \quad F'(r_1) = 1, \quad F'(r_2) = -1, \quad \varphi(x) = 4000x^2, \end{array}\right. \tag{31.}$$

folglich wird nach Gleichung (23.)

$$y = e^{5x}[C_1 + 4000\int_0^x t^2 e^{-5t} . dt] - e^{4x}[C_2 + 4000\int_0^x t^2 e^{-4t} dt]. \tag{32.}$$

Nun findet man durch partielle Integration

$$(33.)\qquad \int t^2 e^{at}dt = e^{at}\left(\frac{t^2}{a} - \frac{2t}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right),$$

so daß Gleichung (32.) übergeht in

$$(34.)\quad y = e^{5x}\left[C_1 + 4000e^{-5x}\left(-\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{25} - \frac{2}{125}\right) + \frac{8000}{125}\right]$$

$$- e^{4x}\left[C_2 + 4000e^{-4x}\left(-\frac{x^2}{4} - \frac{2x}{16} - \frac{2}{64}\right) + \frac{8000}{64}\right]$$

$$= (C_1 + 64)e^{5x} - 32(25x^2 + 10x + 2)$$

$$- (C_2 + 125)e^{4x} + 125(8x^2 + 4x + 1),$$

oder, wenn man $C_1 + 64$ mit A, $C_2 + 125$ mit $-B$ bezeichnet,

$$(35.)\qquad y = Ae^{5x} + Be^{4x} + 200x^2 + 180x + 61.$$

§ 114.

Zurückführung der linearen Differential-Gleichungen m^{ter} Ordnung auf solche Gleichungen niedrigerer Ordnung, wenn partikuläre Integrale bekannt sind.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 249 und 250.)

Die in Gleichung (23.) des vorhergehenden Paragraphen angegebene Lösung gilt nur, wenn die Koeffizienten f_1, f_2, $\ldots f_m$ konstante Größen sind. Ist diese Voraussetzung *nicht* erfüllt, so gelingt es doch in vielen Fällen, die Differential-Gleichung

$$(1.)\quad \frac{d^my}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x)\cdot y = \varphi(x),$$

von der m^{ten} Ordnung auf eine niedrigere Ordnung zu reduzieren. Es geschieht dies nach *Lagrange* durch *„Variation der Konstanten"*. Ist z. B. $y = y_1$ ein *partikuläres* Integral der *homogenen* Differential-Gleichung

$$(2.)\quad \frac{d^my}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x)\cdot y = 0,$$

so setze man

$$(3.)\qquad y = Cy_1,$$

wo aber C noch eine Funktion von x sein muß, wenn dieser Wert von y der Gleichung (1.) genügen soll. Nun ist

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1 \dfrac{dC}{dx} + C\dfrac{dy_1}{dx}, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = y_1 \dfrac{d^2C}{dx^2} + 2\dfrac{dy_1}{dx}\dfrac{dC}{dx} + C\dfrac{d^2y_1}{dx^2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^my}{dx^m} = y_1 \dfrac{d^mC}{dx^m} + \binom{m}{1}\dfrac{dy_1}{dx}\dfrac{d^{m-1}C}{dx^{m-1}} + \cdots + C\dfrac{d^my_1}{dx^m}. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in Gleichung (1.) ein und beachtet, daß nach Voraussetzung der Faktor von C verschwindet, so bleibt eine Gleichung von der Form

$$(5.)\quad y_1 \frac{d^mC}{dx^m} + g_1(x)\frac{d^{m-1}C}{dx^{m-1}} + \cdots + g_{m-1}(x)\frac{dC}{dx} = \varphi(x).$$

Führt man also die Funktion u durch die Gleichungen

$$(6.)\quad \frac{dC}{dx} = u, \quad \text{oder} \quad C = \int u dx + A$$

ein, so erhält man aus Gleichung (5.)

$$(7.)\quad y_1 \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + g_1(x)\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots + g_{m-1}(x) \,.\, u = \varphi(x).$$

Aus dem *allgemeinen* Integral u dieser Differential-Gleichung, die nur noch von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, findet man das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung (1.) durch die Gleichung

$$(8.)\quad y = y_1\Big(\int u dx + A\Big).$$

Ebenso kann man die Ordnung der Differential-Gleichung (1.) um *zwei* Einheiten erniedrigen, wenn man *zwei* partikuläre Integrale y_1 und y_2 der *homogenen* Differential-Gleichung (2.) kennt. Man setze dann

$$(9.)\quad y = C_1y_1 + C_2y_2$$

und betrachte C_1 und C_2 als Funktionen von x, welche der Bedingung

$$(10.)\quad y_1\frac{dC_1}{dx} + y_2\frac{dC_2}{dx} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{dC_2}{dx} = -\frac{y_1}{y_2}\frac{dC_1}{dx}$$

genügen. Bezeichnet man dabei $-\frac{y_1}{y_2}$ mit $\varphi_1(x)$, so folgt aus den Gleichungen (9.) und (10.)

$$\frac{dC_2}{dx} = \varphi_1(x) \cdot \frac{dC_1}{dx}, \tag{11.}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = C_1\frac{dy_1}{dx} + C_2\frac{dy_2}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} = C_1\frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2\frac{d^2y_2}{dx^2} + \varphi_2(x) \cdot \frac{dC_1}{dx}, \\ \frac{d^3y}{dx^3} = C_1\frac{d^3y_1}{dx^3} + C_2\frac{d^3y_2}{dx^3} + \varphi_2(x) \cdot \frac{d^2C_1}{dx^2} + \varphi_3(x) \cdot \frac{dC_1}{dx}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{12.}$$

wobei $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x), \dots$ leicht zu ermittelnde Funktionen von x sind. Setzt man diese Werte in Gleichung (1.) ein, so verschwinden nach Voraussetzung die Faktoren von C_1 und C_2, und es bleibt

$$G_0(x)\frac{d^{m-1}C_1}{dx^{m-1}} + G_1(x)\frac{d^{m-2}C_1}{dx^{m-2}} + \dots + G_{m-2}(x)\frac{dC_1}{dx} = \varphi(x). \tag{13.}$$

Wenn man jetzt noch

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dC_1}{dx} = z, \quad \text{also} \quad \frac{dC_2}{dx} = \varphi_1(x)\,.\,z, \\ C_1 = \int z dx + A_1, \quad C_2 = \int \varphi_1(x)\,.\,z dx + A_2 \end{array}\right. \tag{14.}$$

setzt, so geht Gleichung (13.) über in

$$G_0(x)\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + G_1(x)\frac{d^{m-3}z}{dx^{m-3}} + \dots + G_{m-2}(x)\,.\,z = \varphi(x). \tag{15.}$$

Aus dem *allgemeinen* Integral z dieser Gleichung, welche nur noch von der $(m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, findet man nach den Gleichungen (9.) und (14.) das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung (1.) durch die Formel

$$y = y_1\left(\int z dx + A_1\right) + y_2\left(\int \varphi_1(x)\,.\,z dx + A_2\right). \tag{16.}$$

Dieses Verfahren kann man fortsetzen und den Satz beweisen:

Kennt man n verschiedene partikuläre Integrale $y_1, y_2, \ldots y_n$ der homogenen Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x)\,.\,y = 0, \tag{17.}$$

so läßt sich die nicht homogene lineare Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x)\,.\,y = \varphi(x) \tag{18.}$$

auf eine andere nicht homogene lineare Differential-Gleichung von der Ordnung $m - n$ reduzieren.

Beweis. Sind $y_1, y_2, \ldots y_n$ die bekannten partikulären Integrale von Gleichung (17.), so setze man

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \tag{19.}$$

und bestimme $\frac{dC_2}{dx}, \frac{dC_3}{dx}, \ldots \frac{dC_n}{dx}$ als Funktionen von $\frac{dC_1}{dx}$ durch die $n - 1$ linearen Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} y_1\frac{dC_1}{dx} + y_2\frac{dC_2}{dx} + \cdots + y_n\frac{dC_n}{dx} = 0, \\ \frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{dy_n}{dx}\frac{dC_n}{dx} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\frac{dC_n}{dx} = 0. \end{array}\right. \tag{20.}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen erhält man

$$\frac{dC_2}{dx} = \varphi_1(x)\cdot\frac{dC_1}{dx},\quad \frac{dC_3}{dx} = \varphi_2(x)\cdot\frac{dC_1}{dx}, \ldots \quad \frac{dC_n}{dx} = \varphi_{n-1}(x)\cdot\frac{dC_1}{dx}, \tag{21.}$$

wobei die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_{n-1}(x)$ leicht zu ermitteln sind. Nach diesen Festsetzungen wird

$$\frac{dy}{dx} = C_1\frac{dy_1}{dx} + C_2\frac{dy_2}{dx} + \cdots + C_n\frac{dy_n}{dx}, \tag{22.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1\frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2\frac{d^2y_2}{dx^2} + \cdots + C_n\frac{d^2y_n}{dx^2}, \tag{23.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(24.)\quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = C_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + C_2\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \cdots + C_n\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}},$$

$$(25.)\quad \frac{d^ny}{dx^n} = C_1\frac{d^ny_1}{dx^n} + C_2\frac{d^ny_2}{dx^n} + \cdots + C_n\frac{d^ny_n}{dx^n} + \psi(x)\cdot\frac{dC_1}{dx},$$

$$(26.)\quad \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = C_1\frac{d^{n+1}y_1}{dx^{n+1}} + C_2\frac{d^{n+1}y_2}{dx^{n+1}} + \cdots$$

$$+ C_n\frac{d^{n+1}y_n}{dx^{n+1}} + \psi(x)\cdot\frac{d^2C_1}{dx^2} + \psi_1(x)\cdot\frac{dC_1}{dx},$$

. . . .

Setzt man diese Werte in die Gleichung (18.) ein, so verschwinden nach Voraussetzung die Koeffizienten von $C_1, C_2, \ldots C_n$, so daß sich die Gleichung auf

$$(27.)\quad L_0(x)\frac{d^{m-n+1}C_1}{dx^{m-n+1}} + L_1(x)\frac{d^{m-n}C_1}{dx^{m-n}} + \cdots + L_{m-n}(x)\frac{dC_1}{dx} = \varphi(x)$$

reduziert. Indem man noch die Funktion v durch die Gleichung

$$(28.)\quad \frac{dC_1}{dx} = v$$

einführt, erhält man daher

$$(29.)\quad L_0(x)\frac{d^{m-n}v}{dx^{m-n}} + L_1(x)\frac{d^{m-n-1}v}{dx^{m-n-1}} + \cdots + L_{m-n}(x)\,.\,v = \varphi(x).$$

Dabei ist nach den Gleichungen (19.), (21.) und (28.)

$$(30.)\quad C_1 = \int vdx + A_1,\quad C_2 = \int\varphi_1(x)\,.\,vdx + A_2, \ldots$$

$$C_n = \int\varphi_{n-1}(x)\,.\,vdx + A_n,$$

$$(31.)\quad y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n.$$

Für $n = m - 1$ kann man durch das angegebene Verfahren die vorgelegte Differential-Gleichung auf eine lineare Differential-Gleichung erster Ordnung von der Form

$$(32.)\quad L_0(x)\frac{dv}{dx} + L_1(x)\,.\,v = \varphi(x)$$

zurückführen, deren Integration in § 92 behandelt worden ist. (Vergl. auch Formel Nr. 214 der Tabelle.)

Für $n = m$ ergibt sich hierbei, daß man das allgemeine Integral der *nicht homogenen* Gleichung (1.) durch einfache Quadraturen findet, sobald ein vollständiges Fundamental-

system partikulärer Integrale $y_1, y_2, \ldots y_m$ der *homogenen* Gleichung (2.) bekannt ist.

Damit

$$(33.)\qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_m y_m$$

auch ein Integral der nicht homogenen Gleichung (1.) ist, muß man $C_1, C_2, \ldots C_m$ als passend gewählte Funktionen von x betrachten. Setzt man dabei der Kürze wegen

$$(34.)\qquad \frac{dC_1}{dx} = C_1', \quad \frac{dC_2}{dx} = C_2', \ldots \frac{dC_m}{dx} = C_m',$$

so mögen die m Funktionen $C_1', C_2', \ldots C_m'$ den m linearen Gleichungen

$$(35.)\qquad \begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \cdots + C_m'y_m = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \cdots + C_m'y_m' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'y_1^{(m-2)} + C_2'y_2^{(m-2)} + \cdots + C_m'y_m^{(m-2)} = 0, \\ C_1'y_1^{(m-1)} + C_2'y_2^{(m-1)} + \cdots + C_m'y_m^{(m-1)} = \varphi(x) \end{cases}$$

genügen; dann folgt aus Gleichung (33.)

$$(36.)\qquad \begin{cases} y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \cdots + C_m y_m', \\ y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \cdots + C_m y_m'', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(m-1)} = C_1 y_1^{(m-1)} + C_2 y_2^{(m-1)} + \cdots + C_m y_m^{(m-1)}, \\ y^{(m)} = C_1 y_1^{(m)} + C_2 y_2^{(m)} + \cdots + C_m y_m^{(m)} + \varphi(x). \end{cases}$$

Indem man die Gleichungen (33.) und (36.) bezw. mit $f_m(x), f_{m-1}(x), f_{m-2}(x), \ldots f_1(x)$ und 1 multipliziert und dann addiert, findet man

$$(37.)\qquad \begin{aligned} y^{(m)} + f_1(x) \cdot y^{(m-1)} + \cdots + f_{m-1}(x) \cdot y' + f_m(x) \cdot y = \\ C_1[y_1^{(m)} + f_1(x) \cdot y_1^{(m-1)} + \cdots + f_{m-1}(x) \cdot y_1' + f_m(x) \cdot y_1] \\ + C_2[y_2^{(m)} + f_1(x) \cdot y_2^{(m-1)} + \cdots + f_{m-1}(x) \cdot y_2' + f_m(x) \cdot y_2] \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + C_m[y_m^{(m)} + f_1(x) \cdot y_m^{(m-1)} + \cdots + f_{m-1}(x) \cdot y_m' + f_m(x) \cdot y_m] \\ + \varphi(x). \end{aligned}$$

Da die Ausdrücke in den eckigen Klammern nach Voraussetzung sämtlich verschwinden, so ist

$$(33.)\qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_m y_m$$

ein partikuläres Integral der nicht homogenen Gleichung (1.).

Dabei lassen sich die m Funktionen $C_1', C_2', \ldots C_m'$ aus den m linearen Gleichungen (35.) mit Hilfe der Determinantentheorie leicht ausrechnen; und zwar erhalten sie die Form

$$(38.)\quad C_1' = h_1(x) \,.\, \varphi(x),\; C_2' = h_2(x) \,.\, \varphi(x), \ldots C_m' = h_m(x) \,.\, \varphi(x).$$

Weil nach Voraussetzung $y_1, y_2, \ldots y_m$ ein Fundamentalsystem partikulärer Integrale der homogenen Gleichung (2.) bilden, d. h. weil zwischen diesen Funktionen keine lineare Beziehung besteht, so läßt sich zeigen, daß die Determinante

$$(39.)\qquad D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_m \\ y_1' & y_2' & \ldots y_m' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots y_m'' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \ldots y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Daraus folgt dann, daß sich die Funktionen $h_1(x), h_2(x), \ldots h_m(x)$ in eindeutiger Weise aus den Gleichungen (35.) berechnen lassen. Die ausführliche Begründung möge der Kürze wegen übergangen werden.

Aus den Gleichungen (38.) findet man

$$(40.)\qquad \begin{cases} C_1 = \int h_1(x) \,.\, \varphi(x)dx + c_1, \\ C_2 = \int h_2(x) \,.\, \varphi(x)dx + c_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ C_m = \int h_m(x) \,.\, \varphi(x)dx + c_m. \end{cases}$$

Daraus folgt dann auch, daß Gleichung (33.) das *allgemeine* Integral der Gleichung (1.) darstellt, weil die m willkürlichen Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_m$ darin auftreten und zwischen den partikulären Integralen $y_1, y_2, \ldots y_m$ keine lineare Beziehung besteht. Dies gibt den

Satz. *Kennt man ein Fundamentalsystem partikulärer Integrale* $y_1, y_2, \ldots y_m$ *der homogenen Gleichung* (2.), *so findet man das allgemeine Integral der nicht homogenen Gleichung* (1.), *nämlich*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_m y_m,$$

durch die in den Gleichungen (40.) *angedeuteten Quadraturen, wobei die Größen*

$$C_1' = h_1(x) \,.\, \varphi(x), \quad C_2' = h_2(x) \,.\, \varphi(x), \ldots C_m' = h_m(x) \,.\, \varphi(x)$$

durch Auflösung der linearen Gleichungen (35.) *als Funktionen der einzigen Veränderlichen x gefunden werden.*

Mit Hilfe dieses Satzes findet man auch die Behandlung des besonderen Falles, in dem sich die Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x)$ auf die konstanten Werte $f_1, f_2, \ldots f_m$ reduzieren, und zwar ergibt sich dasselbe Resultat wie in § 113, Gl. (23.), doch stützt sich hierbei die Herleitung auf einige Sätze aus der Algebra und der Determinantentheorie, die hier wohl nicht als bekannt vorausgesetzt werden dürfen.

Am besten wird man das anzuwendende Verfahren aus einem Beispiel ersehen.

Aufgabe. Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + c^2y = 2\cos(bx) \tag{41.}$$

integrieren.

Auflösung. Die homogene Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + c^2y = 0 \tag{42.}$$

hat nach Aufgabe 2 in § 112, wenn man $\frac{1}{a}$ mit c vertauscht, das allgemeine Integral

$$y = A\cos(cx) + B\sin(cx), \tag{43.}$$

wobei A und B beliebige Konstanten sind. Soll y auch ein Integral der *nicht* homogenen Differential-Gleichung (41.) werden, so müssen A und B noch Funktionen von x sein; dann wird

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -Ac\sin(cx) + Bc\cos(cx)\\ &\quad + \frac{dA}{dx}\cos(cx) + \frac{dB}{dx}\sin(cx).\end{aligned} \tag{44.}$$

Setzt man jetzt noch

$$\frac{dA}{dx}\cos(cx) + \frac{dB}{dx}\sin(cx) = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{dB}{dx} = -\frac{dA}{dx}\operatorname{ctg}(cx), \tag{45.}$$

so wird

$$\frac{dy}{dx} = -Ac\sin(cx) + Bc\cos(cx), \tag{46.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -Ac^2\cos(cx) - Bc^2\sin(cx) - \frac{dA}{dx}c\sin(cx) + \frac{dB}{dx}c\cos(cx), \tag{47.}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (43.) und (45.)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -c^2y - c\frac{dA}{dx}[\sin(cx) + \operatorname{ctg}(cx)\cos(cx)] = -c^2y - c\frac{dA}{dx}\cdot\frac{1}{\sin(cx)}. \tag{47 a.}$$

Setzt man diesen Wert von $\frac{d^2y}{dx^2}$ in Gleichung (41.) ein, so erhält man

$$-c\frac{dA}{dx} = 2\cos(bx)\sin(cx) = \sin[(c+b)x] + \sin[(c-b)x], \tag{48.}$$

folglich wird, wenn man die Integrations-Konstante mit C_1c bezeichnet,

$$Ac = -\int\sin[(c+b)x]dx - \int\sin[(c-b)x]dx = \frac{\cos[(c+b)x]}{c+b} + \frac{\cos[(c-b)x]}{c-b} + C_1c. \tag{49.}$$

Ferner folgt aus Gleichung (45.)

$$c\frac{dB}{dx} = -c\frac{dA}{dx}\operatorname{ctg}(cx) = 2\cos(bx)\cos(cx) = \cos[(c+b)x] + \cos[(c-b)x], \tag{50.}$$

folglich wird, wenn man die Integrations-Konstante mit C_2c bezeichnet,

$$Bc = \frac{\sin[(c+b)x]}{c+b} + \frac{\sin[(c-b)x]}{c-b} + C_2c. \tag{51.}$$

Setzt man die für A und B gefundenen Werte in Gleichung (43.) ein, so erhält man

$$y = \frac{\cos[(c+b)x]\cos(cx) + \sin[(c+b)x]\sin(cx)}{c(c+b)}$$

$$+ \frac{\cos[(c-b)x]\cos(cx) + \sin[(c-b)x]\sin(cx)}{c(c-b)}$$

$$+ C_1\cos(cx) + C_2\sin(cx),$$

oder

$$(52.)\qquad y = \frac{2\cos(bx)}{c^2 - b^2} + C_1\cos(cx) + C_2\sin(cx).$$

Einfacher ergibt sich dieses Resultat durch Anwendung von Formel Nr. 248 der Tabelle.

§ 115.

Ein weiterer Fall, in dem sich die lineare Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung integrieren läßt.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 251 bis 253.)

Es sei die homogene lineare Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung

$$(1.)\qquad (ax+b)^m\frac{d^my}{dx^m} + (ax+b)^{m-1}f_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + (ax+b)^{m-2}f_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}$$

$$+ \cdots + (ax+b)f_{m-1}\frac{dy}{dx} + f_my = 0$$

gegeben, wobei die Koeffizienten $f_1, f_2, \ldots f_m$ wieder Konstante sein mögen: dann setze man

$$(2.)\qquad y = (ax+b)^r,$$

also

$$(3.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = ar(ax+b)^{r-1}, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = a^2r(r-1)(ax+b)^{r-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^my}{dx^m} = a^mr(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)(ax+b)^{r-m} \end{cases}$$

in die Gleichung (1.) ein. Dadurch erhält man nach Weglassung des allen Gliedern gemeinsamen Faktors $(ax+b)^r$ die Gleichung

$$(4.)\quad a^m r(r-1)(r-2)\dots(r-m+1) + a^{m-1}r(r-1)(r-2)\dots(r-m+2)f_1 + \dots + a^2 r(r-1)f_{m-2} + arf_{m-1} + f_m = 0.$$

Dies ist eine Gleichung m^{ten} Grades für r, welche man wieder „die *charakteristische* Gleichung" nennt. Hat sie die Wurzeln $r_1, r_2, \dots r_m$, so erhält man die m partikulären Integrale

$$(5.)\quad y_1 = (ax+b)^{r_1},\ y_2 = (ax+b)^{r_2}, \dots y_m = (ax+b)^{r_m}.$$

Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung (1.) wird daher

$$(6.)\quad y = C_1(ax+b)^{r_1} + C_2(ax+b)^{r_2} + \dots + C_m(ax+b)^{r_m},$$

wobei $C_1, C_2, \dots C_m$ noch beliebige Konstanten sind.

Beispiel.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(7.)\quad x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

integrieren.

Auflösung. Die charakteristische Gleichung ist hier

$$(8.)\quad r(r-1)(r-2) + 2r(r-1) - 4r + 4 = 0,$$

oder

$$(8a.)\quad (r-1)(r-2)(r+2) = 0;$$

ihre Wurzeln sind also

$$(9.)\quad r_1 = 1,\quad r_2 = 2,\quad r_3 = -2,$$

folglich hat die Differential-Gleichung die partikulären Integrale

$$(10.)\quad y_1 = x,\quad y_2 = x^2,\quad y_3 = \frac{1}{x^2}$$

und das allgemeine Integral

$$(11.)\quad y = C_1x + C_2x^2 + \frac{C_3}{x^2}.$$

Sind zwei Wurzeln der charakteristischen Gleichung konjugiert komplexe Größen, ist z. B.

$$(12.)\quad r_1 = \alpha + \beta i,\quad r_2 = \alpha - \beta i,$$

so wird

$$C_1y_1 + C_2y_2 = C_1(ax+b)^{\alpha+\beta i} + C_2(ax+b)^{\alpha-\beta i}$$
$$= (ax+b)^\alpha\left[C_1e^{\beta i\ln(ax+b)} + C_2e^{-\beta i\ln(ax+b)}\right],$$

oder, wenn man $\ln(ax+b)$ mit t bezeichnet,

$$(13.)\quad C_1y_1+C_2y_2 = (ax+b)^\alpha[(C_1+C_2)\cos(\beta t)+(C_1-C_2)i\sin(\beta t)]$$
$$= (ax+b)^\alpha[A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)].$$

Dabei sind $A = C_1 + C_2$ und $B = (C_1 - C_2)i$ zwei willkürliche Integrations-Konstante.

Beispiel.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(14.)\quad (x+1)^3\frac{d^3y}{dx^3} - (x+1)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 6(x+1)\frac{dy}{dx} - 10y = 0$$

integrieren.

Auflösung. Die charakteristische Gleichung ist hier

$$(15.)\quad r(r-1)(r-2) - r(r-1) + 6r - 10 = 0,$$

oder

$$(15\text{a.})\quad (r-2)(r^2-2r+5) = 0;$$

ihre Wurzeln sind also

$$(16.)\quad r_1 = 2,\quad r_2 = 1+2i,\quad r_3 = 1-2i,$$

folglich hat die Differential-Gleichung das allgemeine Integral

$$(17.)\quad y = C_1(x+1)^2 + C_2(x+1)^{1+2i} + C_3(x+1)^{1-2i}$$
$$= C_1(x+1)^2 + (x+1)[C_2(x+1)^{2i} + C_3(x+1)^{-2i}]$$
$$= C_1(x+1)^2 + (x+1)[C_2e^{2i\ln(x+1)} + C_3e^{-2i\ln(x+1)}],$$

oder

$$(17\text{a.})\quad y = C_1(x+1)^2 + (x+1)[A\cos(2t) + B\sin(2t)],$$

wobei

$$(18.)\quad t = \ln(x+1),\quad A = C_2 + C_3,\quad B = (C_2 - C_3)i$$

ist.

Bisher war vorausgesetzt worden, daß die Wurzeln r_1, $r_2, \ldots r_m$ der charakteristischen Gleichung sämtlich voneinander verschieden sind. Hat die charakteristische Gleichung aber auch *gleiche* Wurzeln, so führt ein ähnliches Grenz-

verfahren wie in § 112 zum Ziele. Ist z. B. r_2 gleich r_1, so kann man in Gleichung (6.) die Glieder

$$C_1(ax+b)^{r_1} + C_2(ax+b)^{r_2} \quad \text{in} \quad (C_1+C_2)(ax+b)^{r_1}$$

zusammenfassen. Setzt man aber zunächst

$$r_2 = r_1 + h, \tag{19.}$$

so wird

$$C_1(ax+b)^{r_1} + C_2(ax+b)^{r_1+h} = (ax+b)^{r_1}[C_1 + C_2(ax+b)^h]. \tag{20.}$$

Bezeichnet man der Kürze wegen wieder

$$\ln(ax+b) \quad \text{mit} \quad t,$$

so wird

$$\begin{aligned} C_1 + C_2(ax+b)^h &= C_1 + C_2 e^{ht} \\ &= C_1 + C_2\Big(1 + \frac{ht}{1!} + \frac{h^2t^2}{2!} + \frac{h^3t^3}{3!} + \cdots\Big), \end{aligned} \tag{21.}$$

oder, wenn man wieder wie in § 112

$$C_1 + C_2 = C \quad \text{und} \quad C_2 h = C' \tag{22.}$$

setzt,

$$C_1 + C_2(ax+b)^h = C + C'\Big(t + \frac{ht^2}{2!} + \frac{h^2t^3}{3!} + \cdots\Big). \tag{23.}$$

Läßt man jetzt h sich der Grenze Null nähern, so erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{h=0} r_2 = r_1, \quad \lim_{h=0}[C_1 + C_2(ax+b)^h] &= C + C't \\ &= C + C'\ln(ax+b). \end{aligned} \tag{24.}$$

Das allgemeine Integral der vorgelegten Differential-Gleichung wird dann also

$$\begin{aligned} y = (ax+b)^{r_1}[C + C'\ln(ax+b)] &+ C_3(ax+b)^{r_3} \\ &+ \cdots + C_m(ax+b)^{r_m}. \end{aligned} \tag{25.}$$

Beispiel.

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$(2x+3)^3\frac{d^3y}{dx^3} - 8(2x+3)\frac{dy}{dx} + 32y = 0 \tag{26.}$$

integrieren.

Auflösung. Die charakteristische Gleichung ist hier

$$8r(r-1)(r-2) - 16r + 32 = 0, \tag{27.}$$

oder

(27a.) $$8(r-2)^2(r+1)=0;$$

ihre Wurzeln sind also

(28.) $$r_1=2,\quad r_2=2,\quad r_3=-1,$$

folglich hat die Differential-Gleichung das allgemeine Integral

(29.) $$y=(2x+3)^2[C+C'\ln(2x+3)]+\frac{C_3}{2x+3}.$$

Hat die charakteristische Gleichung drei gleiche Wurzeln, ist z. B.

(30.) $$r_1=r_2=r_3,$$

so findet man das allgemeine Integral, indem man zunächst

(31.) $$r_3=r_1+h \quad \text{und} \quad \ln(ax+b)=t, \quad \text{also} \quad ax+b=e^t$$

setzt; dadurch geht Gleichung (25.) über in

(32.) $$\begin{aligned}(ax+b)^{r_1}[C+C'\ln(ax+b)]+C_3(ax+b)^{r_1+h}\\ +\cdots+C_m(ax+b)^{r_m}\\ =(ax+b)^{r_1}(C+C't+C_3e^{ht})+\cdots+C_m(ax+b)^{r_m}\\ =(ax+b)^{r_1}\left[C+C't+C_3\left(1+\frac{ht}{1!}+\frac{h^2t^2}{2!}+\frac{h^3t^3}{3!}+\cdots\right)\right]\\ +\cdots+C_m(ax+b)^{r_m}.\end{aligned}$$

Setzt man jetzt noch

(33.) $$C+C_3=A_1,\quad C'+C_3h=A_2,\quad C_3h^2=2A_3,$$

so erhält man

(34.) $$C+C't+C_3e^{ht}=A_1+A_2t+A_3t^2+2A_3\left(\frac{ht^3}{3!}+\frac{h^2t^4}{4!}+\cdots\right),$$

wobei A_1, A_2, A_3 drei beliebige Konstante sind. Läßt man jetzt h sich wieder der Grenze Null nähern, so erhält man

(35.) $$\lim_{h=0} r_3=r_1,\quad \lim_{h=0}(C+C't+C_3e^{ht})=A_1+A_2t+A_3t^2,$$

folglich ergibt sich dann aus Gleichung (25.) das allgemeine Integral in der Form

(36.) $$\begin{aligned}y=(ax+b)^{r_1}[A_1+A_2\ln(ax+b)+A_3\{\ln(ax+b)\}^2]\\ +C_4(ax+b)^{r_4}+\cdots+C_m(ax+b)^{r_m}.\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise kann man alle Fälle behandeln, in denen die charakteristische Gleichung mehrfache Wurzeln hat.

Beispiel.

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Gleichung

(37.) $$x^4\frac{d^4y}{dx^4} - 11x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 49x\frac{dy}{dx} - 81y = 0$$

integrieren.

Auflösung. Die charakteristische Gleichung ist hier

(38.) $$r(r-1)(r-2)(r-3) - 11r(r-1) + 49r - 81 = 0,$$

oder

(38a.) $$(r-3)^3(r+3) = 0;$$

sie hat also die Wurzeln

(39.) $$r_1 = 3,\quad r_2 = 3,\quad r_3 = 3,\quad r_4 = -3,$$

folglich hat die Differential-Gleichung das allgemeine Integral

(40.) $$y = x^3[A_1 + A_2\ln x + A_3(\ln x)^2] + \frac{C}{x^3}.$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (1.) findet man auch, wenn man

(41.) $$ax + b = e^t,\quad \text{oder}\quad t = \ln(ax+b)$$

setzt und t zur unabhängigen Veränderlichen macht. Daraus erhält man durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{a}{ax+b}\frac{dy}{dt},$$

oder

(42.) $$(ax+b)\frac{dy}{dx} = a\frac{dy}{dt},$$

$$a\frac{dy}{dx} + (ax+b)\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} = \frac{a^2}{ax+b}\frac{d^2y}{dt^2},$$

oder

(43.) $$(ax+b)^2\frac{d^2y}{dx^2} = a^2\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$2(ax+b)\frac{d^2y}{dx^2} + (ax+b)^2\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{a^3}{ax+b}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

oder

$$(44.)\qquad (ax+b)^3\frac{d^3y}{dx^3}=a^3\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right),$$

. . . .

Dadurch kann man also die Gleichung (1.) auf die Form

$$(45.)\qquad \frac{d^my}{dt^m}+g_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+g_2\frac{d^{m-2}y}{dt^{m-2}}+\cdots+g_{m-1}\frac{dy}{dt}+g_m\cdot y=0$$

bringen, wobei $g_1, g_2, \ldots g_{m-1}, g_m$ wieder Konstante sind, und kann dann das in § 112 erläuterte Verfahren zur Integration verwenden. (Vergl. Formel Nr. 245 der Tabelle.)

Dieses Verfahren kann man auch benutzen, um die *nicht* homogene lineare Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung

$$(46.)\qquad (ax+b)^m\frac{d^my}{dx^m}+(ax+b)^{m-1}f_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots$$
$$+(ax+b)f_{m-1}\frac{dy}{dx}+f_m\cdot y=\varphi(x)$$

zu integrieren.

XVIII. Abschnitt.

Simultane Differential-Gleichungen.

§ 116.

Zurückführung von simultanen Differential-Gleichungen zwischen einer unabhängigen und mehreren abhängigen Veränderlichen auf eine Differential-Gleichung höherer Ordnung zwischen *zwei* Veränderlichen.

Die unabhängige Veränderliche, von der die Veränderlichen x, y, z, ... abhängig sind, heiße in dem folgenden t, dann mögen der Einfachheit wegen zunächst zwei simultane Differential-Gleichungen erster Ordnung zwischen t, x und y gegeben sein. Indem man aus diesen beiden Gleichungen $\frac{dy}{dt}$, bezw. $\frac{dx}{dt}$ eliminiert, kann man sie leicht auf die Form

$$F\left(t,\ x,\ y,\ \frac{dx}{dt}\right) = 0, \tag{1.}$$

$$G\left(t,\ x,\ y,\ \frac{dy}{dt}\right) = 0 \tag{2.}$$

bringen. Löst man jetzt noch die Gleichung (1.) nach y auf, so erhält man

$$y = f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right) = f(t,\ x,\ x'), \tag{3.}$$

wobei der Kürze wegen $\frac{dx}{dt}$ mit x' bezeichnet worden ist. Hieraus folgt durch Differentiation

$$(4.)\qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Indem man diese Werte von y und $\frac{dy}{dt}$ in die Gleichung (2.) einsetzt, ergibt sich eine Differential-Gleichung *zweiter* Ordnung zwischen t und x, auf deren Integration man die in dem vorigen Abschnitt gegebenen Regeln anwenden kann. Hat man das allgemeine Integral dieser Differential-Gleichung gefunden, so erhält man den zugehörigen Wert von y unmittelbar aus Gleichung (3.).

Beispiel.

Aufgabe 1. Man soll die beiden simultanen Differential-Gleichungen

$$(5.)\qquad \frac{dx}{dt} - 4x - y + 36t = 0,$$

$$(6.)\qquad \frac{dy}{dt} + 2x - y + 2e^t = 0$$

integrieren.

Auflösung. Aus Gleichung (5.) folgt

$$(7.)\qquad y = \frac{dx}{dt} - 4x + 36t,$$

$$(8.)\qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 36.$$

Setzt man diese Werte in Gleichung (6.) ein, so erhält man

$$(9.)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = 36(t-1) - 2e^t.$$

Wendet man zur Integration dieser Differential-Gleichung die in Formel Nr. 248 der Tabelle ausgesprochene Regel an, so wird

$$(10.)\qquad x = \frac{e^{r_1t}}{F'(r_1)}\left[C_1 + \int_0^t \varphi(t)\,.\,e^{-r_1t}dt\right] + \frac{e^{r_2t}}{F'(r_2)}\left[C_2 + \int_0^t \varphi(t)\,.\,e^{-r_2t}dt\right],$$

wobei in dem vorliegenden Falle die charakteristische Gleichung

(11.) $$F(u) = u^2 - 5u + 6 = 0$$

ist; ihre Wurzeln sind

(12.) $$r_1 = 2, \quad r_2 = 3,$$

folglich wird

(13.) $$F'(u) = 2u - 5, \quad F'(r_1) = -1, \quad F'(r_2) = +1.$$

Ferner ist

(14.) $$\varphi(t) = 36(t - 1) - 2e^t,$$

also

(15.) $$\int_0^t \varphi(t) \,.\, e^{-r_1 t}dt = 36\int_0^t (t-1)e^{-2t}dt - 2\int_0^t e^{-t}dt$$
$$= 9e^{-2t}(-2t + 1) + 2e^{-t} - 11,$$

(16.) $$\int_0^t \varphi(t) \,.\, e^{-r_2 t}dt = 36\int_0^t (t-1)e^{-3t}dt - 2\int_0^t e^{-2t}dt$$
$$= 4e^{-3t}(-3t + 2) + e^{-2t} - 9.$$

Dies gibt

(17.) $$x = -e^{2t}[C_1 + (-18t + 9)e^{-2t} + 2e^{-t} - 11]$$
$$+ e^{3t}[C_2 + (-12t + 8)e^{-3t} + e^{-2t} - 9],$$

oder, wenn man $11 - C_1$ mit A und $C_2 - 9$ mit B bezeichnet,

(18.) $$x = 6t - 1 - e^t + Ae^{2t} + Be^{3t}.$$

Dabei sind A und B zwei beliebige Integrations-Konstante. Daraus folgt dann mit Rücksicht auf Gleichung (7.)

(19.) $$y = 12t + 10 + 3e^t - 2Ae^{2t} - Be^{3t}.$$

Dieses Verfahren kann man zunächst verallgemeinern auf zwei simultane Differential-Gleichungen höherer Ordnung zwischen t, x und y. Setzt man der Kürze wegen

(20.) $$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{d^2x}{dt^2} = x'', \quad \cdots \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = x^{(\alpha)}, \ldots,$$

(21.) $$\frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{d^2y}{dt^2} = y'', \quad \cdots \frac{d^\beta y}{dt^\beta} = y^{(\beta)}, \ldots,$$

so seien die beiden Differential-Gleichungen

(22.) $$F(t, x, x', x'', \ldots x^{(m)}, y, y', y'', \ldots y^{(p)}) = 0,$$

(23.) $$G(t, x, x', x'', \ldots x^{(n)}, y, y', y'', \ldots y^{(q)}) = 0$$

gegeben. Indem man Gleichung (22.) q-mal und Gleichung (23.) p-mal nach t differentiiert, erhält man die q Gleichungen

(24.) $$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}x' + \frac{\partial F}{\partial x'}x'' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}y^{(p+1)} = 0,$$

. . . .

und die p Gleichungen

(25.) $$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}x' + \frac{\partial G}{\partial x'}x'' + \cdots + \frac{\partial G}{\partial y^{(q)}}y^{(q+1)} = 0,$$

. . . .

Im ganzen verfügt man also, wenn man die Gleichungen (22.) und (23.) hinzurechnet, über $p + q + 2$ Gleichungen, aus denen man die $p + q + 1$ Größen $y, y', y'', \ldots y^{(p+q)}$ eliminieren kann. Das Resultat der Elimination ist dann eine Differential-Gleichung $(m + q)^{\text{ter}}$ oder $(n + p)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen t und x, und zwar ist die Ordnung im allgemeinen der größeren von diesen beiden Zahlen $m + q$ und $n + p$ gleich. In besonderen Fällen kann natürlich eine Erniedrigung der Ordnung eintreten.

Beispiel.

Aufgabe 2. Man soll die beiden simultanen Differential-Gleichungen

(26.) $$\frac{d^2x}{dt^2} - 4x + \frac{dy}{dt} + 12 = 0,$$

(27.) $$\frac{d^2y}{dt^2} - y - 10\frac{dx}{dt} + 7 = 0$$

integrieren.

Auflösung. Durch zweimalige Differentiation findet man aus Gleichung (26.) die beiden Gleichungen

(28.) $$\frac{d^3x}{dt^3} - 4\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

(29.) $$\frac{d^4x}{dt^4} - 4\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^3y}{dt^3} = 0;$$

und durch einmalige Differentiation findet man aus Gleichung (27.)

$$\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{dy}{dt} - 10\frac{d^2x}{dt^2} = 0. \tag{30.}$$

Aus den fünf Gleichungen (26.) bis (30.) kann man jetzt die vier Größen $y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3}$ eliminieren. Zieht man nämlich Gleichung (30.) von Gleichung (29.) ab, so bleibt

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 0, \tag{31.}$$

und wenn man hiervon noch Gleichung (26.) abzieht,

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 12. \tag{32.}$$

Indem man auf diese Differential-Gleichung die Bezeichnungen der Formel Nr. 248 der Tabelle anwendet, erhält man die charakteristische Gleichung

$$F(u) = u^4 + 5u^2 + 4 = 0 \tag{33.}$$

mit den Wurzeln

$$r_1 = +i, \quad r_2 = -i, \quad r_3 = +2i, \quad r_4 = -2i, \tag{34.}$$

$$\varphi(t) = 12, \quad F'(u) = 4u^3 + 10u,$$

$$F'(r_1) = +6i, \; F'(r_2) = -6i, \; F'(r_3) = -12i, \; F'(r_4) = +12i,$$

folglich wird

$$\begin{aligned} x = {} & \frac{1}{6i}e^{ti}\Big(C_1 + 12\int_0^t e^{-ti}dt\Big) - \frac{1}{6i}e^{-ti}\Big(C_2 + 12\int_0^t e^{ti}dt\Big) \\ & - \frac{1}{12i}e^{2ti}\Big(C_3 + 12\int_0^t e^{-2ti}dt\Big) + \frac{1}{12i}e^{-2ti}\Big(C_4 + 12\int_0^t e^{2ti}dt\Big), \end{aligned} \tag{35.}$$

oder, wenn man

$$C_1 - 12i = C'_1, \; C_2 + 12i = C'_2, \; C_3 - 6i = C'_3, \; C_4 + 6i = C'_4$$

setzt,

$$x = \frac{i}{6}\Big(-C'_1e^{ti} + C'_2e^{-ti}\Big) + \frac{i}{12}\Big(C'_3e^{2ti} - C'_4e^{-2ti}\Big) + 3. \tag{35a.}$$

Setzt man noch

$$i(-C'_1 + C'_2) = 6A, \qquad C'_1 + C'_2 = 6B,$$

$$i(C'_3 - C'_4) = 12C, \qquad -C'_3 - C'_4 = 12D,$$

so geht Gleichung (35a.) über in

(36.) $x = 3 + A\cos t + B\sin t + C\cos(2t) + D\sin(2t)$,

wobei A, B, C und D die 4 willkürlichen Integrations-Konstanten sind.

Den zugehörigen Wert von y findet man aus den Gleichungen (27.) und (28.). Eliminiert man nämlich aus diesen beiden Gleichungen $\frac{d^2y}{dt^2}$, so erhält man

$$y = -\frac{d^3x}{dt^3} - 6\frac{dx}{dt} + 7, \tag{37.}$$

also mit Rücksicht auf Gleichung (36.)

(38.) $y = 7 + 5A\sin t - 5B\cos t + 4C\sin(2t) - 4D\cos(2t)$.

Sind *drei* simultane Differential-Gleichungen zwischen der unabhängigen Veränderlichen t und den Funktionen x, y, z gegeben, so kann man zunächst das oben angedeutete Verfahren benutzen, um z und die Ableitungen von z zu eliminieren. Dadurch erhält man *zwei* simultane Differential-Gleichungen, welche dieselbe Form haben wie die Gleichungen (22.) und (23.) und deshalb auch in derselben Weise behandelt werden können.

Dieses Verfahren läßt sich noch verallgemeinern auf n simultane Differential-Gleichungen zwischen einer unabhängigen Veränderlichen t und n Funktionen derselben.

Häufig wird man allerdings das entgegengesetzte Verfahren anwenden, indem man Differential-Gleichungen höherer Ordnung auf eine größere Anzahl von Differential-Gleichungen niedrigerer Ordnung zurückführt. Beispiele dafür bieten schon die Angaben in § 87.

§ 117.

Integration linearer simultaner Differential-Gleichungen erster Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 254.)

Zwei simultane Differential-Gleichungen erster Ordnung zwischen t, x und y, welche in bezug auf x, y

$\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ nur vom ersten Grade sind, heißen „*lineare* Differential-Gleichungen erster Ordnung“ und können durch Elimination von $\frac{dy}{dt}$, bezw. von $\frac{dx}{dt}$ auf die Form

$$\frac{dx}{dt} + f_1(t) \,.\, x + g_1(t) \,.\, y = h_1(t), \tag{1.}$$

$$\frac{dy}{dt} + f_2(t) \,.\, x + g_2(t) \,.\, y = h_2(t) \tag{2.}$$

gebracht werden, wobei $f_1(t)$, $f_2(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ noch beliebige Funktionen von t sind.

Die Integration dieser Differential-Gleichungen kann nun nach einem Verfahren, das von *d'Alembert* angegeben und von *Ampère* verbessert ist, in folgender Weise ausgeführt werden. Man setze

$$w = x - vy, \tag{3.}$$

also

$$x = w + vy, \quad \frac{dx}{dt} - v\frac{dy}{dt} = \frac{dw}{dt} + y\frac{dv}{dt}, \tag{4.}$$

wo v eine noch passend zu wählende Funktion von t sein möge. Indem man Gleichung (2.) mit v multipliziert und von Gleichung (1.) abzieht, erhält man

$$\frac{dx}{dt} - v\frac{dy}{dt} + (f_1 - vf_2)x + (g_1 - vg_2)y = h_1 - vh_2, \tag{5.}$$

wobei der Kürze wegen

$$f_1(t) = f_1, \quad g_1(t) = g_1, \quad h_1(t) = h_1,$$
$$f_2(t) = f_2, \quad g_2(t) = g_2, \quad h_2(t) = h_2$$

gesetzt ist. Dies gibt mit Rücksicht auf die Gleichungen (4.)

$$\frac{dw}{dt} + y\frac{dv}{dt} + (f_1 - vf_2)(w + vy) + (g_1 - vg_2)y = h_1 - vh_2,$$

oder

$$\frac{dw}{dt} + (f_1 - vf_2)w + \left[\frac{dv}{dt} - f_2v^2 + (f_1 - g_2)v + g_1\right]y$$
$$= h_1 - vh_2. \tag{6.}$$

Da man über die Funktion v noch willkürlich verfügen darf, so kann man den Koeffizienten von y gleich Null machen, indem man

$$\frac{dv}{dt} = f_2v^2 - (f_1 - g_2)v - g_1 \tag{7.}$$

setzt. Obwohl diese Differential-Gleichung zwischen t und v nur von der ersten Ordnung ist, so kann man doch ihr allgemeines Integral nicht immer finden, weil sie nicht linear ist. Zur vollständigen Lösung der Aufgabe genügt es aber, daß man zwei partikuläre Integrale v_1 und v_2 kennt, denn dann ergeben sich aus Gleichung (6.) die beiden linearen Differential-Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{dw_1}{dt} + (f_1 - v_1f_2)w_1 = h_1 - v_1h_2, \tag{8.}$$

$$\frac{dw_2}{dt} + (f_1 - v_2f_2)w_2 = h_1 - v_2h_2, \tag{9.}$$

die man z. B. nach der *Bernoulli*schen Methode integrieren kann. Da hierbei *zwei* Integrations-Konstante C_1 und C_2 auftreten, so findet man aus den Gleichungen

$$x - v_1y = w_1 \quad \text{und} \quad x - v_2y = w_2 \tag{10.}$$

die *allgemeinen* Werte der Funktionen x und y.

Beispiel.

Aufgabe 1. Man soll die beiden simultanen Differential-Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} - 4x - y = -36t, \tag{11.}$$

$$\frac{dy}{dt} + 2x - y = -2e^t \tag{12.}$$

integrieren.

Auflösung. Indem man Gleichung (12.) mit v multipliziert und von Gleichung (11.) abzieht, erhält man

$$\frac{dx}{dt} - v\frac{dy}{dt} - (4 + 2v)x - (1 - v)y = -36t + 2e^t . v, \tag{13.}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (4.)

$$(14.)\quad \frac{dw}{dt} - (4 + 2v)w + \left(\frac{dv}{dt} - 2v^2 - 3v - 1\right)y$$
$$= -36t + 2e^t . v.$$

Über die willkürliche Funktion v verfüge man jetzt so, daß in Gleichung (14.) der Koeffizient von y verschwindet. Dies gibt

$$(15.)\quad \frac{dv}{dt} = 2v^2 + 3v + 1 = (2v + 1)(v + 1),$$

oder

$$(16.)\quad dt = \frac{dv}{(2v + 1)(v + 1)} = \frac{2dv}{2v + 1} - \frac{dv}{v + 1},$$

folglich wird

$$(17.)\quad t = \ln(2v + 1) - \ln(v + 1) - \ln C,$$

oder

$$(18.)\quad \frac{2v + 1}{v + 1} = Ce^t, \quad v = -\frac{Ce^t - 1}{Ce^t - 2}.$$

In diesem Falle hat man sogar für v das *allgemeine* Integral gefunden; da man aber nur zwei partikuläre Integrale braucht, so nehme man für C die Werte 0 und ∞. Dadurch erhält man

$$(19.)\quad v_1 = -\frac{1}{2}, \quad v_2 = -1,$$

Werte, von denen man ohne weiteres erkennt, daß sie der Gleichung (15.) genügen. Aus Gleichung (14.) ergeben sich deshalb die beiden linearen Gleichungen erster Ordnung

$$(20.)\quad \frac{dw_1}{dt} - 3w_1 = -36t - e^t,$$

$$(21.)\quad \frac{dw_2}{dt} - 2w_2 = -36t - 2e^t.$$

Setzt man jetzt

$$(22.)\quad w_1 = u_1 z_1, \quad w_2 = u_2 z_2,$$

so gehen die Gleichungen (20.) und (21.) über in

$$(23.)\quad u_1 \frac{dz_1}{dt} + z_1\left(\frac{du_1}{dt} - 3u_1\right) = -36t - e^t,$$

$$u_2 \frac{dz_2}{dt} + z_2\left(\frac{du_2}{dt} - 2u_2\right) = -36t - 2e^t, \tag{24.}$$

folglich wird man setzen

$$\frac{du_1}{u_1} = 3dt, \quad \frac{du_2}{u_2} = 2dt, \tag{25.}$$

also

$$u_1 = e^{3t}, \quad u_2 = e^{2t}. \tag{26.}$$

Dadurch gehen die Gleichungen (23.) und (24.) über in

$$\frac{dz_1}{dt} = -36te^{-3t} - e^{-2t}, \tag{27.}$$

$$\frac{dz_2}{dt} = -36te^{-2t} - 2e^{-t}, \tag{28.}$$

folglich wird

$$z_1 = 4(3t + 1)e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + C_1, \tag{29.}$$

$$z_2 = 9(2t + 1)e^{-2t} + 2e^{-t} + C_2. \tag{30.}$$

Dies gibt mit Rücksicht auf Gleichung (3.)

$$w_1 = u_1 z_1 = 12t + 4 + \frac{1}{2}e^t + C_1 e^{3t} = x + \frac{1}{2}y, \tag{31.}$$

$$w_2 = u_2 z_2 = 18t + 9 + 2e^t + C_2 e^{2t} = x + y, \tag{32.}$$

also

$$x = 6t - 1 - e^t + 2C_1 e^{3t} - C_2 e^{2t}, \tag{33.}$$

$$y = 12t + 10 + 3e^t - 2C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{2t}. \tag{34.}$$

Setzt man noch

$$-C_2 = A, \quad 2C_1 = B,$$

so stimmen diese Gleichungen genau mit den Gleichungen (18.) und (19.) in § 116 überein, welche man bei der Lösung derselben Aufgabe fand.

Sind die Koeffizienten f_1, f_2, g_1, g_2 konstant, so darf man für v_1 und v_2 immer, wie es in dem vorhergehenden Beispiele geschehen ist, die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$f_2 v^2 - (f_1 - g_2)v - g_1 = 0$$

setzen, denn in diesem Falle werden v_1 und v_2 Konstante,

deren Ableitung gleich Null ist; sie genügen deshalb der Differential-Gleichung (7.).

Das angegebene Verfahren kann man auch auf drei simultane Differential-Gleichungen von der Form

$$\frac{dx}{dt} + f_1 x + g_1 y + h_1 z = k_1, \tag{35.}$$

$$\frac{dy}{dt} + f_2 x + g_2 y + h_2 z = k_2, \tag{36.}$$

$$\frac{dz}{dt} + f_3 x + g_3 y + h_3 z = k_3 \tag{37.}$$

übertragen, wobei f_α, g_α, h_α, k_α (für $\alpha = 1, 2, 3$) noch Funktionen von t sein dürfen. Zieht man jetzt die Gleichungen (36.) und (37.), nachdem man sie bezw. mit den willkürlichen Funktionen v und w multipliziert hat, von Gleichung (35.) ab, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} - v\frac{dy}{dt} - w\frac{dz}{dt} + (f_1 - vf_2 - wf_3)x + (g_1 - vg_2 - wg_3)y \\ + (h_1 - vh_2 - wh_3)z = k_1 - vk_2 - wk_3.\end{aligned} \tag{38.}$$

Indem man noch

$$x - vy - wz = u, \quad \text{also} \quad x = u + vy + wz \tag{39.}$$

setzt, erhält man

$$\frac{dx}{dt} - v\frac{dy}{dt} - w\frac{dz}{dt} = \frac{du}{dt} + y\frac{dv}{dt} + z\frac{dw}{dt}. \tag{40.}$$

Durch Einsetzen dieser Werte geht Gleichung (38.) über in

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} + y\frac{dv}{dt} + z\frac{dw}{dt} + (f_1 - vf_2 - wf_3)(u + vy + wz) \\ + (g_1 - vg_2 - wg_3)y + (h_1 - vh_2 - wh_3)z = k_1 - vk_2 - wk_3.\end{aligned} \tag{41.}$$

Jetzt kann man über die willkürlichen Funktionen v und w so verfügen, daß in dieser Gleichung die Koeffizienten von y und z verschwinden, indem man

$$\frac{dv}{dt} + (f_1 - vf_2 - wf_3)v + (g_1 - vg_2 - wg_3) = 0, \tag{42.}$$

(43.) $$\frac{dw}{dt} + (f_1 - vf_2 - wf_3)w + (h_1 - vh_2 - wh_3) = 0$$

setzt. Dadurch reduziert sich Gleichung (41.) auf

(44.) $$\frac{du}{dt} + (f_1 - vf_2 - wf_3)u = k_1 - vk_2 - wk_3.$$

Die Gleichungen (42.) und (43.) enthalten nur die Veränderlichen t, v und w: sie sind aber in bezug auf v und w nicht linear, so daß ihre Integration in den meisten Fällen auf Schwierigkeiten stoßen wird. Es genügt aber auch hier, von diesen beiden Differential-Gleichungen drei partikuläre Lösungen v_1 und w_1, v_2 und w_2, v_3 und w_3 zu kennen, denn zu jedem solchen Wertepaare ergibt sich aus Gleichung (44.) eine lineare Differential-Gleichung erster Ordnung, deren Integrale u_1, u_2, u_3 jedesmal eine willkürliche Integrations-Konstante enthalten. Dann findet man aber aus den Gleichungen

(45.) $$\begin{cases} x - v_1 y - w_1 z = u_1, \\ x - v_2 y - w_2 z = u_2, \\ x - v_3 y - w_3 z = u_3 \end{cases}$$

die allgemeinen Werte von x, y, z.

Sind die Koeffizienten f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3 konstant, so genügen den Gleichungen (42.) und (43.) konstante Werte von v und w, die sich aus den Gleichungen

(46.) $$(f_1 - vf_2 - wf_3)v + (g_1 - vg_2 - wg_3) = 0,$$

(47.) $$(f_1 - vf_2 - wf_3)w + (h_1 - vh_2 - wh_3) = 0$$

ergeben. Setzt man zur Auflösung dieser Gleichungen

(48.) $$f_1 - vf_2 - wf_3 = r,$$

so ergeben sich die drei Gleichungen

(48a.) $$(r - f_1) + f_2 v + f_3 w = 0,$$

(49.) $$g_1 + (r - g_2)v - g_3 w = 0,$$

(50.) $$h_1 - h_2 v + (r - h_3)w = 0.$$

Durch Elimination von v und w findet man aus diesen Gleichungen für r die kubische Gleichung

$$(51.)\qquad \begin{vmatrix} r-f_1, & f_2, & f_3 \\ g_1, & r-g_2, & -g_3 \\ h_1, & -h_2, & r-h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(51\text{a.})\qquad (r-f_1)(r-g_2)(r-h_3) - g_3h_2(r-f_1) - h_1f_3(r-g_2)$$
$$- f_2g_1(r-h_3) - f_2g_3h_1 - f_3g_1h_2 = 0.$$

Sind r_1, r_2, r_3 die Wurzeln dieser kubischen Gleichung, so findet man aus den Gleichungen (48a.) bis (50.) die zugehörigen Werte von v und w, und Gleichung (44.) nimmt die Form

$$(52.)\qquad \frac{du_\alpha}{dt} + r_\alpha u_\alpha = k_1 - v_\alpha k_2 - w_\alpha k_3 \qquad (\text{für } \alpha = 1, 2, 3)$$

an, deren allgemeines Integral nach Formel Nr. 218 der Tabelle durch die Gleichung

$$(53.)\qquad u_\alpha = e^{-r_\alpha t}\Big[\int (k_1 - v_\alpha k_2 - w_\alpha k_3)e^{r_\alpha t}dt + C_\alpha\Big]$$

dargestellt wird.

Beispiel.

Aufgabe 2. Man soll die drei simultanen Differential-Gleichungen

$$(54.)\qquad \frac{dx}{dt} - 7x - 34y + 42z = 2e^{4t},$$

$$(55.)\qquad \frac{dy}{dt} + x + 10y - 6z = 5e^{7t},$$

$$(56.)\qquad \frac{dz}{dt} - 4x - 10y + 18z = 8e^{10t}$$

integrieren.

Auflösung. Indem man die Gleichungen (55.) und (56.) bezw. mit den willkürlichen Funktionen v und w multipliziert und dann von Gleichung (54.) abzieht, erhält man

$$(57.)\qquad \frac{dx}{dt} - v\frac{dy}{dt} - w\frac{dz}{dt} + (-7 - v + 4w)x$$
$$+ (-34 - 10v + 10w)y + (42 + 6v - 18w)z$$
$$= 2e^{4t} - 5ve^{7t} - 8we^{10t}.$$

Diese Gleichung reduziert sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (39.) und (40.) auf

$$(58.)\quad \frac{du}{dt} + y\frac{dv}{dt} + z\frac{dw}{dt} + (-7 - v + 4w)(u + vy + wz)$$
$$+(-34-10v+10w)y+(42+6v-18w)z = 2e^{4t}-5ve^{7t}-8we^{10t}.$$

Setzt man jetzt noch

$$(59.)\quad \begin{cases} -7 - v + 4w = r, \quad \text{oder} \quad r + 7 + v - 4w = 0, \\ -34 + (r-10)v + 10w = 0, \\ 42 + 6v + (r-18)w = 0, \end{cases}$$

so werden in Gleichung (58.) die Koeffizienten von y und von z gleich Null, weil für konstante Werte von v und w die Ableitungen $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{dw}{dt}$ verschwinden. Eliminiert man aus den Gleichungen (59.) die Größen v und w, so erhält man

$$(60.)\quad r^3 - 21r^2 + 126r - 216 = (r-3)(r-6)(r-12) = 0,$$

also

$$(61.)\quad r_1 = 3, \quad r_2 = 6, \quad r_3 = 12.$$

Die zugehörigen Werte von v und w findet man dann aus den Gleichungen (59.), welche durch Einsetzen der besonderen Werte von r die Form

$$(62.)\quad \begin{cases} -v_1 + 4w_1 = 10, \quad -v_2 + 4w_2 = 13, \quad -v_3 + 4w_3 = 19, \\ -7v_1 + 10w_1 = 34, \quad -4v_2 + 10w_2 = 34, \quad +2v_3 + 10w_3 = 34 \end{cases}$$

annehmen. Daraus ergibt sich

$$(63.)\quad \begin{cases} v_1 = -2, \ w_1 = +2; \quad v_2 = -1, \ w_2 = +3: \\ \qquad v_3 = -3, \ w_3 = +4. \end{cases}$$

Deshalb erhält man aus Gleichung (58.) die drei linearen Differential-Gleichungen erster Ordnung

$$(64.)\quad \frac{du_1}{dt} + 3u_1 = 2e^{4t} + 10e^{7t} - 16e^{10t},$$

$$(65.)\quad \frac{du_2}{dt} + 6u_2 = 2e^{4t} + 5e^{7t} - 24e^{10t},$$

$$(66.)\quad \frac{du_3}{dt} + 12u_3 = 2e^{4t} + 15e^{7t} - 32e^{10t};$$

folglich ist

(67.) $u_1 = e^{-3t}\left[\int(2e^{4t} + 10e^{7t} - 16e^{10t})e^{3t}dt + C_1\right]$

$= C_1e^{-3t} + \frac{2}{7}e^{4t} + e^{7t} - \frac{16}{13}e^{10t},$

(68.) $u_2 = e^{-6t}\left[\int(2e^{4t} + 5e^{7t} - 24e^{10t})e^{6t}dt + C_2\right]$

$= C_2e^{-6t} + \frac{1}{5}e^{4t} + \frac{5}{13}e^{7t} - \frac{3}{2}e^{10t},$

(69.) $u_3 = e^{-12t}\left[\int(2e^{4t} + 15e^{7t} - 32e^{10t})e^{12t}dt + C_3\right]$

$= C_3e^{-12t} + \frac{1}{8}e^{4t} + \frac{15}{19}e^{7t} - \frac{16}{11}e^{10t}.$

Schließlich findet man aus den Gleichungen

(70.) $x + 2y - 2z = u_1,\quad x + y - 3z = u_2,\quad x + 3y - 4z = u_3$

die Werte der Funktionen x, y, z selbst, nämlich

(71.) $$\begin{cases} 3x = 5u_1 + 2u_2 - 4u_3, \\ 3y = u_1 - 2u_2 + u_3, \\ 3z = 2u_1 - u_2 - u_3, \end{cases}$$

oder

(72.) $$\begin{cases} 3x = 5C_1e^{-3t} + 2C_2e^{-6t} - 4C_3e^{-12t} + \frac{93}{70}e^{4t} + \frac{645}{247}e^{7t} \\ \qquad - \frac{477}{143}e^{10t}, \\ 3y = C_1e^{-3t} - 2C_2e^{-6t} + C_3e^{-12t} + \frac{3}{280}e^{4t} + \frac{252}{247}e^{7t} \\ \qquad + \frac{45}{143}e^{10t}, \\ 3z = 2C_1e^{-3t} - C_2e^{-6t} - C_3e^{-12t} + \frac{69}{280}e^{4t} + \frac{204}{247}e^{7t} \\ \qquad + \frac{141}{286}e^{10t}. \end{cases}$$

XIX. Abschnitt.

Näherungsmethoden zur Integration gewöhnlicher Differential-Gleichungen.

§ 118.

Verallgemeinerung der *Simpson*schen Regel zur Auflösung von Differential-Gleichungen erster Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 255.)

In § 85 wurde ein von *Euler* herrührendes Verfahren erläutert, das näherungsweise die Integration der Differential-Gleichung

(1.) $$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

dadurch herbeiführte, daß man in dem beliebig gewählten Anfangspunkte A mit den Koordinaten

$$x = a, \quad y = b$$

aus Gleichung (1.) die Richtung der Tangente findet, denn es wird

(2.) $$\operatorname{tg} \alpha = \varphi(a, b),$$

wo α der Winkel ist, den die Tangente im Punkte A mit der positiven Richtung der X-Achse bildet. Nimmt man auf dieser Tangente einen benachbarten Punkt A_1 mit den Koordinaten

$$x = a_1, \quad y = b_1,$$

so ist a_1 noch beliebig, während man b_1 aus der Gleichung

(3.) $$b_1 - b = \frac{dy}{dx}(a_1 - a), \quad \text{oder} \quad b_1 = b + (a_1 - a) \cdot \varphi(a, b)$$

findet. Die Richtung der Tangente im Punkte A_1 findet man dann aus der Gleichung

(4.) $$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \varphi(a_1, b_1).$$

Auch auf dieser Tangente kann man einen zu A_1 benachbarten Punkt A_2 mit den Koordinaten

$$x = a_2, \quad y = b_2$$

annehmen und den Wert von b_2 aus der Gleichung

(5.) $$b_2 = b_1 + (a_2 - a_1) \,.\, \varphi(a_1, b_1)$$

ausrechnen. Indem man dieses Verfahren fortsetzt, kann man ein Vieleck $AA_1A_2A_3\ldots$ auffinden, das in eine *Integral-Kurve* übergeht, wenn man die Punkte A, A_1, A_2, $A_3, \ldots$ einander unendlich nahe rücken läßt.

In dieser Erkenntnis liegt der Wert des *Euler*schen Verfahrens; will man aber die aufeinander folgenden Werte b_1, b_2, $b_3, \ldots$ durch die Gleichungen (3.), (5.) usw. berechnen, so wird man nur einen geringen Grad von Genauigkeit erzielen können, auch wenn man die Intervalle

$$a_1 - a, \quad a_2 - a_1, \quad a_3 - a_2, \ldots$$

sehr klein nimmt. Der Fehler, welcher schon bei der Berechnung von b_1 auftritt, wird zwar mit $a_1 - a$ verschwindend klein von der zweiten Ordnung, aber er vergrößert den bei der Berechnung von b_2 begangenen Fehler noch auf zweifache Weise. Erstens liegt der Punkt A_1 nicht genau auf der Integral-Kurve, und zweitens wird auch die Richtung der Tangente in A_1 fehlerhaft, weil in $\varphi(a_1, b_1)$ der Wert von b_1 nicht genau richtig ist. Deshalb wird die Ungenauigkeit mit jedem weiteren Schritte größer, so daß das Verfahren von *Euler* für numerische Rechnungen wenig geeignet erscheint.

Man kann aber durch die von Herrn *Runge* im Jahre 1894 gegebene Verallgemeinerung der *Simpson*schen Regel (Mathematische Annalen, Band 46, Seite 167—178) erreichen, daß der berechnete Näherungswert von y nur einen Fehler aufweist, der mit $a_1 - a$ verschwindend klein wird von der *vierten* Ordnung, und daß die Fehler auch noch hinreichend klein bleiben, wenn man eine größere Anzahl

von Schritten vorwärts macht, d. h. wenn man ein ziemlich langes Bogenstück der Integral-Kurve durchläuft.

Zunächst setze man für die Gleichung der Integral-Kurve

$$(6.)\quad y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$
$$+ \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R$$

und mache

$$(7.)\qquad x - a = h$$

so klein, daß das Restglied R in der Entwickelung für hinreichend große Werte von n beliebig klein wird. Dabei ist, wenn man der Kürze wegen φ statt $\varphi(x, y)$ schreibt (vergl. D.-R., Seite 705, Gleichung (14.) bis (16.)),

$$(8.)\quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = \varphi(x, y) = \varphi,$$

$$(9.)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \varphi',$$

$$(10.)\quad \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = \frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$
$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(2)} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi'',$$

$$(11.)\quad \frac{d^4y}{dx^4} = f^{(4)}(x) = \frac{\partial\varphi''}{\partial x} + \frac{\partial\varphi''}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$
$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} + 3\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi''',$$

. . . .

Ferner ist nach dem *Taylor*schen Lehrsatze für Funktionen von zwei Veränderlichen

$$(12.)\quad \varphi(x+h, y+k) = \varphi(x, y) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}h + \frac{\partial\varphi}{\partial y}k\right)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}h + \frac{\partial\varphi}{\partial y}k\right)^{(2)} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}h + \frac{\partial\varphi}{\partial y}k\right)^{(3)} + \cdots.$$

Jetzt schreibe man x_0 statt a, $y_0 = f(x_0)$ statt b, φ statt $\varphi(x_0, y_0)$ und setze

$$(7\text{a.})\qquad x - x_0 = h,$$

dann geht Gleichung (6.) über in

$$(13.)\quad y = f(x) = y_0 + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}h^4 + \cdots.$$

Nennt man sodann den durch das *Euler*sche Verfahren gefundenen Näherungswert y', so wird

$$(14.)\qquad y' = y_0 + \varphi(x_0, y_0)\,.\,h = y_0 + f'(x_0)\,.\,h.$$

Eine noch bessere Annäherung Y findet man, indem man der Tangente im Punkte A die Richtung gibt, welche sie haben würde, wenn der Anfangspunkt in der Mitte der Geraden AA_1 läge und deshalb die Koordinaten

$$\frac{x_0 + x}{2} = x_0 + \frac{h}{2},\quad \frac{y_0 + y'}{2} = y_0 + \varphi(x_0, y_0)\cdot\frac{h}{2}$$

hätte, und dann so rechnet wie bei dem *Euler*schen Verfahren. Daraus findet man

$$(15.)\qquad Y = y_0 + \varphi\left(\frac{x_0 + x}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}\right)h$$
$$= \varphi_0 + \varphi\left[x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \varphi(x_0, y_0)\frac{h}{2}\right]h.$$

Nun ist nach Gleichung (12.), wenn man $\frac{h}{2}$ statt h, $\varphi\cdot\frac{h}{2}$ statt k schreibt und $\varphi(x_0, y_0)$ mit φ bezeichnet,

$$\varphi\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \varphi\cdot\frac{h}{2}\right) = \varphi(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)\frac{h}{2}$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(2)}\frac{h^2}{4} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(3)}\frac{h^3}{8} + \cdots,$$

also

$$(16.)\quad Y = y_0 + \varphi\,.\,h + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)\frac{h^2}{2} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(2)}\frac{h^3}{8}$$
$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(3)}\frac{h^4}{48} + \cdots$$
$$= y_0 + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(2)}\frac{h^3}{8} + \cdots.$$

Der Wert von Y unterscheidet sich daher von y nur um eine Größe, welche mit h verschwindend klein wird von der dritten Ordnung.

Man kann aber die Annäherung noch weiter treiben. Setzt man nämlich

(17.) $$y'' = y_0 + \varphi(x, y') \,.\, h = y_0 + \varphi[x_0 + h,\; y_0 + \varphi(x_0, y_0)h]h,$$

so findet man aus Gleichung (12.), indem man

$$k = \varphi(x_0, y_0)h$$

setzt,

(18.) $$y'' = y_0 + \varphi(x_0, y_0)h + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)h^2$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(2)} h^3 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(3)} h^4 + \cdots.$$

Daraus folgt

(19.) $$\varphi(x, y'') = \varphi(x_0 + h,\; y_0 + k)$$
$$= \varphi(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}h + \frac{\partial\varphi}{\partial y}k\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}h + \frac{\partial\varphi}{\partial y}k\right)^{(2)}$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}h + \frac{\partial\varphi}{\partial y}k\right)^{(3)} + \cdots,$$

wobei aber nach Gleichung (18.)

(20.) $$k = \varphi h + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)h^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(2)} h^3 + \cdots$$

ist. Deshalb wird

(21.) $$\varphi(x, y'') = \varphi + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)h + \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(2)}\right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)\right]h^2 + \frac{1}{3!}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(3)}\right.$$
$$+ 6\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)$$
$$\left. + 3\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(2)}\right]h^3 + \cdots.$$

Setzt man also

(22.) $$y''' = y_0 + \varphi(x, y'')h,$$

so unterscheidet sich dieser dritte Näherungswert y''' von y

ebenfalls nur um eine Größe, welche mit h zugleich verschwindend klein wird von der dritten Ordnung.

Aus diesen drei Größen y', Y, y''' kann man jetzt aber einen vierten Näherungswert y_1 bilden, der sich von y nur um eine verschwindend kleine Größe *vierter* Ordnung unterscheidet. Setzt man nämlich

$$6y_1 = y' + 4Y + y''', \tag{23.}$$

also

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left[\varphi(x_0, y_0) + 4\varphi\left(\frac{x_0+x}{2}, \frac{y_0+y'}{2}\right) + \varphi(x, y'')\right], \tag{24.}$$

so erhält man nach den Gleichungen (16.) und (21.)

$$\begin{aligned} y_1 = y_0 + \varphi(x_0, y_0)h &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)h^2 \\ &+ \frac{1}{3!}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(2)} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)\right]h^3 \\ &+ \frac{1}{4!}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(3)} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(2)}\right. \\ &\left. + 4\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)\right]h^4 + \cdots. \end{aligned} \tag{25.}$$

Nun ist nach den Gleichungen (9.) bis (11.)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi = f''(x_0), \tag{9a.}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(2)} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right) = f'''(x_0), \tag{10a.}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(3)} &+ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(2)} \\ &+ 3\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right) \\ &+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\right) = f^{(4)}(x_0), \end{aligned} \tag{11a.}$$

folglich geht Gleichung (25.) über in

$$y_1 = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \cdots. \tag{25a.}$$

Deshalb wird nach Gleichung (13.)

$$(26.)\quad y_1 - y = \frac{1}{4!}\left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\varphi\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\varphi\right)^{(2)} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\varphi\right)\right] h^4 + \cdots,$$

also eine Größe, welche mit h zugleich verschwindend klein wird von der *vierten* Ordnung.

Aus Gleichung (24.) erhält man als besonderen Fall die *Simpson*sche Regel, wenn man annimmt, daß $\varphi(x, y)$ von y unabhängig ist. Die vorgelegte Differential-Gleichung geht dann über in

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x);$$

und Gleichung (24.) erhält die Form

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left[\varphi(x_0) + 4\varphi\left(\frac{x_0 + x}{2}\right) + \varphi(x)\right],$$

die mit Formel Nr. 193 der Tabelle, nämlich mit

$$y_1 - y_0 = \int\limits_a^{a+2h} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\right]$$

übereinstimmt, wenn man h mit $2h$, φ mit f, x_0 mit a, also $\frac{x_0 + x}{2}$ mit $a + h$ und x mit $a + 2h$ vertauscht.

Bei Anwendung der in Gleichung (24.) gegebenen Näherungsformel ist es für die zu erzielende Genauigkeit im allgemeinen wesentlich, daß der Wert von

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \varphi(x, y)$$

nicht zu groß wird: namentlich sind die Stellen zu vermeiden, an denen diese Größe unendlich groß wird, damit die benutzte Reihen-Entwickelung konvergent bleibt. Dies wird man erreichen, wenn man x nur so lange als unabhängige Veränderliche beibehält, wie

$$\varphi(x, y) \leqq +1$$

ist. Wird $|\varphi(x, y)| > +1$, so wendet man das beschriebene Verfahren auf die Differential-Gleichung

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\varphi(x, y)}$$

an, bei der man y als die unabhängige Veränderliche ansieht.

§ 119.

Übungs-Beispiel.

Aufgabe. Gegeben ist die Differential-Gleichung

(1.) $$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x};$$

man soll diejenige Integralkurve aufsuchen, welche den Punkt mit den Koordinaten $x = 0$, $y = 1$ zum Anfangspunkt hat.

Auflösung. Die Aufgabe ist so gewählt, daß man die Integration auch in geschlossener Form ausführen kann, damit man für die Genauigkeit des Verfahrens eine Kontrolle hat. Bringt man nämlich die Gleichung (1.) auf die Form

(2.) $$(x - y)dx + (y + x)dy = 0,$$

oder

(2a.) $$(xdx + ydy) + (xdy - ydx) = 0,$$

so erkennt man, daß die Koeffizienten von dx und dy homogene Funktionen gleich hohen Grades sind, und daß deshalb die Substitution $y = xz$ zur Trennung der Variablen führt.

Noch einfacher findet man die Integration durch Einführung von Polarkoordinaten. Setzt man

(3.) $$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

also

(4.) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

so wird

(5.) $$xdy - ydx = r^2 d\varphi, \quad xdx + ydy = rdr,$$

folglich geht Gleichung (2a.) über in

(6.) $$rdr + r^2 d\varphi = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{dr}{r} + d\varphi = 0.$$

Dies gibt

(7.) $$\ln r = C - \varphi, \quad \text{oder} \quad r = e^{C-\varphi}.$$

Dabei ist die Integrationskonstante C so zu bestimmen, daß r gleich 1 wird für φ gleich $\frac{\pi}{2}$, folglich ist

(8.) $$r = e^{\frac{\pi}{2} - \varphi}$$

die Gleichung der gesuchten Integralkurve, die demnach eine *logarithmische Spirale* ist.

Bei Prüfung, ob das angegebene Verfahren genaue Resultate liefert, genügt es natürlich nicht, zwei oder drei Schritte auszuführen; man muß vielmehr eine größere Anzahl von Punkten der Integralkurve durch die Näherungsmethode bestimmen, um den Verlauf eines längeren Bogenabschnittes zur Vergleichung heranzuziehen. Da liegt es bei dem vorliegenden Beispiele nahe, den Winkel φ zwischen 90^0 und 45^0 $\left(\text{oder } \frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{\pi}{4}\right)$ in eine Anzahl gleicher Teile, z. B. in 12 gleiche Teile zu zerlegen und zunächst aus Gleichung (8.) die rechtwinkligen Koordinaten der zugehörigen Punkte zu berechnen. Dies gibt die folgende Tabelle:*)

φ	r	x	y
90⁰	1,000 000 0	0,000 000 0	1,000 000 0
86⁰ 15′	1,067 639 2	0,069 826 9	1,065 353 2
82⁰ 30′	1,139 853 3	0,148 780 7	1,130 101 9
78⁰ 45′	1,216 952 2	0,237 415 6	1,193 568 7
75⁰	1,299 265 9	0,336 274 8	1,254 994 6
71⁰ 15′	1,387 147 1	0,445 883 9	1,313 531 3
67⁰ 30′	1,480 972 6	0,566 743 7	1,368 240 2
63⁰ 45′	1,581 144 5	0,699 322 3	1,418 085 2
60⁰	1,688 091 7	0,844 045 9	1,461 930 2

*) Die Berechnung ist mit siebenstelligen Logarithmen ausgeführt; die beiden letzten Stellen sind daher nicht mehr unbedingt sicher.

φ	r	x	y
56° 15'	1,802 272 9	1,001 289 3	1,498 535 4
52° 30'	1,924 177 3	1,171 364 9	1,526 552 5
48° 45'	2,054 326 9	1,354 512 1	1,544 524 8
45°	2,193 280 2	1,550 883 2	1,550 883 2

Zu den gefundenen Werten von x berechnet man sodann Schritt für Schritt die zugehörigen Näherungswerte von y. Man setze daher zuerst

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad x = 0{,}069\,826\,9, \quad \text{also} \quad h = 0{,}069\,826\,9;$$

dies gibt

$$\varphi(x_0, y_0) = \frac{y_0 - x_0}{y_0 + x_0} = 1, \; y' = y_0 + \varphi(x_0, y_0) \, . \, h = 1{,}069\,826\,9;$$

$$y'' = y_0 + \varphi(x, y') \, . \, h = y_0 + \frac{y' - x}{y' + x} h$$

$$= 1 + \frac{0{,}069\,826\,9}{1{,}139\,653\,8} = 1{,}061\,270\,3;$$

$$\varphi\left(\frac{x_0 + x}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}\right) = \frac{y_0 + y' - x_0 - x}{y_0 + y' + x_0 + x}$$

$$= \frac{2}{2{,}139\,653\,8} = 0{,}934\,730\,7;$$

$$\varphi(x, y'') = \frac{y'' - x}{y'' + x} = \frac{0{,}991\,443\,4}{1{,}131\,097\,2} = 0{,}876\,532\,5.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left[\varphi(x_0, y_0) + 4\varphi\left(\frac{x_0 + x}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}\right) + \varphi(x, y'')\right]$$

ein, so erhält man

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(1 + 3{,}738\,922\,8 + 0{,}876\,532\,5)$$

$$= 1 + \frac{h}{6} \cdot 5{,}615\,455\,3 = 1{,}065\,351\,6.$$

Der Fehler beträgt also nur

$$-\,0{,}000\,001\,6.$$

Rechnet man mit diesem fehlerhaften Werte von y weiter und entnimmt den nächsten Wert von x der oben aufgestellten Tabelle, so hat man zu setzen

$x_0 = 0{,}069\,826\,9;\quad y_0 = 1{,}065\,351\,6;\quad x = 0{,}148\,780\,7,$

also

$$h = 0{,}078\,953\,8,$$

so erhält man

$$\varphi(x_0, y_0) = \frac{y_0 - x_0}{y_0 + x_0} = \frac{0{,}995\,524\,7}{1{,}135\,178\,5} = 0{,}876\,976\,4,$$

$$y' = y_0 + \varphi(x_0, y_0) \,.\, h = y_0 + 0{,}876\,976\,4 \,.\, 0{,}078\,953\,8$$
$$= y_0 + 0{,}069\,240\,6 = 1{,}134\,592\,2;$$

$$y'' = y_0 + \varphi(x, y') \,.\, h = y_0 + \frac{0{,}985\,811\,5}{1{,}283\,372\,9} \cdot 0{,}078\,953\,8$$
$$= y_0 + 0{,}060\,647\,7 = 1{,}125\,999\,3;$$

$$\varphi\left(\frac{x_0 + x}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}\right) = \frac{1{,}981\,336\,2}{2{,}418\,551\,4} = 0{,}819\,224\,4;$$

$$\varphi(x, y'') = \frac{y'' - x}{y'' + x} = \frac{0{,}977\,218\,6}{1{,}274\,780\,0} = 0{,}766\,578\,2.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left[\varphi(x_0, y_0) + 4\varphi\left(\frac{x_0 + x}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}\right) + \varphi(x, y'')\right]$$

ein, so erhält man

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\,(0{,}876\,976\,4 + 3{,}276\,897\,6 + 0{,}766\,578\,2)$$
$$= 1{,}130\,099\,7.$$

Der Fehler beträgt also nur

$$-\,0{,}000\,002\,2.$$

Indem man so weiter fortfährt, findet man die folgende Tabelle:

x	Wahrer Wert von y	Näherungswert von y	Fehler
0,000 000 0	1,000 000 0	1,000 000 0	0,000 000 0
0,069 826 9	1,065 353 2	1,065 351 6	— 0,000 001 6
0,148 780 7	1,130 101 9	1,130 099 7	— 0,000 002 2
0,237 415 6	1,193 568 7	1,193 567 1	— 0,000 001 6
0,336 274 8	1,254 994 6	1,254 994 0	— 0,000 000 6
0,445 883 9	1,313 531 3	1,313 533 0	+ 0,000 001 7
0,566 743 7	1,368 240 2	1,368 244 7	+ 0,000 004 5
0,699 322 3	1,418 085 2	1,418 093 3	+ 0,000 008 1

x	Wahrer Wert von y	Näherungswert von y	Fehler
0,844 045 9	1,461 930 2	1,461 942 7	+ 0,000 012 5
1,001 289 3	1,498 535 4	1,498 552 8	+ 0,000 017 4
1,171 364 9	1,526 552 5	1,526 576 3	+ 0,000 023 8
1,354 512 1	1,544 524 8	1,544 556 2	+ 0,000 031 4
1,550 883 2	1,550 883 2	1,550 923 3	+ 0,000 040 1

Die Genauigkeit ist also bis zum 12. Schritte noch eine durchaus befriedigende, obgleich der Zuwachs von x bei jedem Schritte größer geworden ist und zuletzt nahezu 0,2 beträgt. Macht man die Intervalle der aufeinander folgenden Werte von x noch kleiner, macht man sie z. B. sämtlich gleich 0,08, so kann man die Genauigkeit bedeutend weiter treiben, wie man aus der folgenden Tabelle ersieht. Dabei sind zur Kontrolle noch einige von den oben aus der Gleichung

$$r = e^{\frac{\pi}{2} - \varphi}$$

berechneten Wertepaaren von x und y eingeschaltet.

x	Wahrer Wert von y	Näherungswert von y	Fehler
0,000 000 0	1,000 000 0	1,000 000 0	0,000 000 0
0,08		1,074 192 6	
0,16		1,138 630 4	
0,24		1,195 289 7	
0,32		1,245 484 1	
0,336 274 8	1,254 994 6	1,254 992 4	— 0,000 002 2
0,40		1,290 142 0	
0,48		1,329 949 8	
0,56		1,365 432 6	
0,64		1,397 003 1	
0,72		1,424 992 8	
0,80		1,449 672 7	
0,844 045 9	1,461 930 2	1,461 931 0	+ 0,000 000 8
0,88		1,471 267 5	
0,96		1,489 965 8	

x	Wahrer Wert von y	Näherungswert von y	Fehler
1,04		1,505 927 7	
1,12		1,519 290 0	
1,20		1,530 170 6	
1,28		1,538 671 6	
1,36		1,544 882 0	
1,44		1,548 879 5	
1,52		1,550 732 2	
1,550 883 2	1,550 883 2	1,550 886 5	+ 0,000 003 3

Die Genauigkeit, welche auf diesem Wege erzielt wird, ist eine überraschend große; doch ist damit noch nicht gesagt, daß bei anderen Aufgaben das Endresultat in gleichem Maße befriedigen wird. Es wäre vielmehr zu erstreben, die angegebene Methode noch durch ein Verfahren zu ergänzen, das für die einzelnen aufeinander folgenden Schritte eine zuverlässige Fehlergrenze liefert, damit man sich bei jeder Stelle der Rechnung darüber Rechenschaft geben kann, wie groß die Genauigkeit ist.

In ähnlicher Weise, wie die *Simpson*sche Regel zur Erzielung von stärkerer Annäherung verallgemeinert worden ist, läßt sich auch die vorstehende Methode noch weiterführen; namentlich läßt sich auch die *Gauß*sche Quadratur auf die Integration der Differential-Gleichungen übertragen. Die Genauigkeit wird dadurch zwar noch gesteigert, trotzdem mögen diese Verallgemeinerungen hier übergangen werden, weil es für die Erzielung größerer Genauigkeit im allgemeinen zweckmäßiger sein wird, unter Beibehaltung der vorstehenden Methode die Intervalle zwischen den aufeinander folgenden Werten von x zu verkleinern; denn die Einführung der verallgemeinerten Methoden würde für jeden einzelnen Schritt erheblich umständlichere Rechnungen erfordern.

§ 120.

Integration von simultanen Differential-Gleichungen und Differential-Gleichungen höherer Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 256.)

Man kann das angegebene Verfahren ohne Schwierigkeit auch auf Differential-Gleichungen höherer Ordnung übertragen. Hier mögen der Kürze wegen nur Differential-Gleichungen zweiter Ordnung berücksichtigt werden, die man nach den Ausführungen in § 87 durch zwei simultane Differential-Gleichungen erster Ordnung von der Form

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z) \tag{1.}$$

ersetzen kann. Die Integration ergibt dann, wenn man $x - x_0$ wieder mit h bezeichnet,

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \cdots, \tag{2.}$$

$$z = g(x) = g(x_0) + \frac{g'(x_0)}{1!}h + \frac{g''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{g'''(x_0)}{3!}h^3 + \cdots, \tag{3.}$$

wobei

$$y_0 = f(x_0), \quad z_0 = g(x_0) \tag{4.}$$

die willkürlichen Integrationskonstanten sind.

In § 86 war bereits angegeben, wie man die Größen $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots, g'(x), g''(x), g'''(x), \ldots$ ausrechnet. Es ist nämlich

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f'(x) = \varphi(x, y, z) = \varphi, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= f''(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx} \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi = \varphi', \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= f'''(x) = \frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\varphi'}{\partial z}\psi \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi\right)^{(2)} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi\right) \\ &\qquad + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\psi\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = g'(x) = \psi(x, y, z) = \psi, \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} = g''(x) = \dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\varphi + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\psi = \psi', \\ \dfrac{d^3z}{dx^3} = g'''(x) = \dfrac{\partial\psi'}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi'}{\partial y}\varphi + \dfrac{\partial\psi'}{\partial z}\psi \\ \quad = \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\varphi + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\psi\right)^{(2)} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\psi\right) \\ \qquad + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\varphi + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\psi\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\psi = U_1, \quad \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\psi\right)^{(2)} = U_2, \dots \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\varphi + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\psi = V_1, \quad \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\varphi + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\psi\right)^{(2)} = V_2, \dots \end{cases}$$

setzt,

$$(8.)\quad f'(x) = \varphi, \quad f''(x) = U_1, \quad f'''(x) = U_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}U_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}V_1, \dots,$$

$$(9.)\quad g'(x) = \psi, \quad g''(x) = V_1, \quad g'''(x) = V_2 + \frac{\partial\psi}{\partial y}U_1 + \frac{\partial\psi}{\partial z}V_1, \dots .$$

Ferner wird nach dem *Taylor*schen Lehrsatze für Funktionen von drei Veränderlichen

$$(10.)\quad \varphi(x+h, y+k, z+l) = \varphi + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}h + \frac{\partial\varphi}{\partial y}k + \frac{\partial\varphi}{\partial z}l\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}h + \frac{\partial\varphi}{\partial y}k + \frac{\partial\varphi}{\partial z}l\right)^{(2)} + \cdots,$$

$$(11.)\quad \psi(x+h, y+k, z+l) = \psi + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}h + \frac{\partial\psi}{\partial y}k + \frac{\partial\psi}{\partial z}l\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}h + \frac{\partial\psi}{\partial y}k + \frac{\partial\psi}{\partial z}l\right)^{(2)} + \cdots .$$

Vertauscht man in den vorstehenden Gleichungen x mit x_0, y mit y_0, z mit z_0, bezeichnet man also $\varphi(x_0, y_0, z_0)$ mit φ, $\psi(x_0, y_0, z_0)$ mit ψ, so sind ähnlich wie in § 118

$$(12.)\quad y' = y_0 + \varphi(x_0, y_0, z_0) . h = y_0 + \varphi . h,$$

$$(13.)\quad z' = z_0 + \psi(x_0, y_0, z_0) . h = z_0 + \psi . h$$

Näherungswerte von y und z, deren Unterschied von den wahren Werten mit h zugleich verschwindend klein wird von der *zweiten* Ordnung. Dagegen unterscheiden sich

$$(14.)\qquad Y = y_0 + \varphi\left(\frac{x_0 + x}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}, \frac{z_0 + z'}{z}\right)\cdot h$$

$$= y_0 + \varphi\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \varphi\cdot\frac{h}{2}, z_0 + \psi\cdot\frac{h}{2}\right)\cdot h$$

und

$$(15.)\qquad Z = z_0 + \psi\left(\frac{x_0 + x}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}, \frac{z_0 + z'}{2}\right)\cdot h$$

$$= z_0 + \psi\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \varphi\cdot\frac{h}{2}, z_0 + \psi\cdot\frac{h}{2}\right)\cdot h$$

von y und z nur um Größen, welche mit h zugleich verschwindend klein werden von der *dritten* Ordnung, denn es ist nach den Gleichungen (10.) und (11.)

$$Y = y_0 + \varphi\,.\,h + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi\right)\cdot\frac{h^2}{2}$$

$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi\right)^{(2)}\cdot\frac{h^3}{8} + \cdots,$$

oder

$$(16.)\qquad Y = y_0 + \varphi\,.\,h + U_1\cdot\frac{h^2}{2} + U_2\cdot\frac{h^3}{8} + \cdots$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + U_2\cdot\frac{h^3}{8} + \cdots;$$

$$Z = z_0 + \psi\,.\,h + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\psi\right)\cdot\frac{h^2}{2}$$

$$+ \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\psi\right)^{(2)}\cdot\frac{h^3}{8} + \cdots,$$

oder

$$(17.)\qquad Z = z_0 + \psi\,.\,h + V_1\cdot\frac{h^2}{2} + V_2\cdot\frac{h^3}{8} + \cdots$$

$$= g(x_0) + \frac{g'(x_0)}{1!}h + \frac{g''(x_0)}{2!}h^2 + V_2\cdot\frac{h^3}{8} + \cdots.$$

Setzt man jetzt noch

$$(18.)\qquad y'' = y_0 + \varphi(x, y', z')\,.\,h$$

$$= y_0 + \varphi(x_0 + h, y_0 + \varphi\,.\,h, z_0 + \psi\,.\,h)\,.\,h.$$

$$(19.)\quad z'' = z_0 + \psi(x, y', z').h$$
$$= z_0 + \psi(x_0 + h, y_0 + \varphi.h, z_0 + \psi.h).h,$$

so wird nach den Gleichungen (10.) und (11.)

$$(20.)\quad y'' = y_0 + \varphi.h + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi\right)\cdot h^2$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi\right)^{(2)}.h^3 + \cdots$$
$$= y_0 + \varphi.h + U_1.h^2 + U_2\cdot\frac{h^3}{2} + \cdots,$$

$$(21.)\quad z'' = z_0 + \psi.h + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\psi\right)\cdot h^2$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\psi\right)^{(2)}.h^3 + \cdots$$
$$= z_0 + \psi.h + V_1.h^2 + V_2\cdot\frac{h^3}{2} + \cdots.$$

Daraus folgt

$$\varphi(x, y'', z'') = \varphi + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}h + \frac{\partial\varphi}{\partial y}k + \frac{\partial\varphi}{\partial z}l\right)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}h + \frac{\partial\varphi}{\partial y}k + \frac{\partial\varphi}{\partial z}l\right)^{(2)} + \cdots,$$

$$\psi(x, y'', z'') = \psi + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}h + \frac{\partial\psi}{\partial y}k + \frac{\partial\psi}{\partial z}l\right)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}h + \frac{\partial\psi}{\partial y}k + \frac{\partial\psi}{\partial z}l\right)^{(2)} + \cdots,$$

wobei nach den Gleichungen (20.) und (21.)

$$(22.)\quad k = \varphi.h + U_1.h^2 + \cdots,\quad l = \psi.h + V_1.h^2 + \cdots$$

zu setzen ist; folglich wird

$$(23.)\quad \varphi(x, y'', z'') = \varphi + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi\right)\cdot h$$
$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}U_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}V_1\right)h^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi\right)^{(2)}h^3 + \cdots$$
$$= \varphi + U_1.h + \frac{1}{2!}\left(U_2 + 2U_1\frac{\partial\varphi}{\partial y} + 2V_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)h^2 + \cdots,$$

$$(24.)\quad \psi(x, y'', z'') = \psi + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\psi\right)\cdot h$$
$$+ \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}U_1 + \frac{\partial\psi}{\partial z}V_1\right)h^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\psi\right)^{(2)}.h^2 + \cdots$$
$$= \psi + V_1 . h + \frac{1}{2!}\left(V_2 + 2U_1\frac{\partial\psi}{\partial y} + 2V_1\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)h^2 + \cdots.$$

Hieraus findet man, daß auch die Näherungswerte

$$(25.)\quad y''' = y_0 + \varphi(x, y'', z'') . h,$$
$$(26.)\quad z''' = z_0 + \psi(x, y'', z'') . h$$

sich von y und z nur um Größen unterscheiden, die mit h zugleich verschwindend klein werden von der *dritten* Ordnung.

Setzt man schließlich

$$(27.)\quad y_1 = \frac{1}{6}(y' + 4Y + y''')$$
$$= y_0 + \frac{h}{6}\left[\varphi(x_0, y_0, z_0) + 4\varphi\left(\frac{x_0 + x}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}, \frac{z_0 + z'}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \varphi(x, y'', z'')\right],$$

$$(28.)\quad z_1 = \frac{1}{6}(z' + 4Z + z''')$$
$$= z_0 + \frac{h}{6}\left[\psi(x_0, y_0, z_0) + 4\psi\left(\frac{x_0 + x}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}, \frac{z_0 + z'}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \psi(x, y'', z'')\right],$$

so erhält man durch Entwickelung nach steigenden Potenzen von h

$$(29.)\quad y_1 = y_0 + \varphi . h + U_1 . \frac{h^2}{2} + \left(U_2 + U_1\frac{\partial\varphi}{\partial y} + V_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{h^3}{6} + \cdots$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \cdots,$$

$$(30.)\quad z_1 = z_0 + \psi . h + V_1 . \frac{h^2}{2} + \left(V_2 + U_1\frac{\partial\psi}{\partial y} + V_1\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\frac{h^3}{6} + \cdots$$
$$= g(x_0) + \frac{g'(x_0)}{1!}h + \frac{g''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{g'''(x_0)}{3!}h^3 + \cdots;$$

d. h. die durch die Gleichungen (27.) und (28.) gegebenen

Näherungswerte y_1 und z_1 unterscheiden sich von y und z nur um Größen, die mit h zugleich verschwindend klein werden von der *vierten* Ordnung.

Bei den praktischen Anwendungen wird man von den drei Größen x, y, z diejenige zur unabhängigen Veränderlichen machen, für welche die Reihenentwickelungen am stärksten konvergieren.

§ 121.

Übungs-Beispiel.

Aufgabe. Die Oberfläche eines Tropfens oder einer Blase ist eine Fläche, die durch Rotation einer Kurve

$$y = f(x)$$

um die X-Achse entsteht. Für diese Kurve gilt, wie sich zeigen läßt, die Differential-Gleichung

$$(1.)\qquad 2y = a^2\left(\frac{\sin\alpha}{x} + \frac{d\alpha}{ds}\right),$$

wobei ds das Bogenelement und α der Winkel ist, den die Tangente im Kurvenpunkte P mit der positiven Richtung der X-Achse bildet. Man soll die Gestalt der Kurve ermitteln.

Auflösung. Die Differential-Gleichung (1.) ist von der zweiten Ordnung, denn es ist

$$(2.)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx},\quad \cos\alpha = \frac{dx}{ds},\quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds},$$

also

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2,\quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx}\,\frac{dx}{ds} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^3,$$

folglich geht Gleichung (1.) über in

$$(1\text{a.})\qquad 2y = a^2\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\left(\frac{dx}{ds}\right)^3\right].$$

Man kann aber diese Gleichung, wenn der Kürze wegen $\sin\alpha$ mit z bezeichnet, durch zwei simultane Differential-Gleichungen erster Ordnung zwischen x, y und z ersetzen. Aus den Gleichungen (2.) folgt nämlich

$$\frac{d(\sin\alpha)}{dx} = \cos\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\alpha}{ds}, \quad \frac{d(\cos\alpha)}{dy} = -\sin\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dy} = -\frac{d\alpha}{ds};$$

deshalb läßt sich Gleichung (1.), wenn man $a = 1$ setzt, auf die Form

$$(3.) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \varphi(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - \dfrac{z}{x} = \psi(x, y, z) \end{cases}$$

bringen. Man wird auch von der Form

$$(4.) \qquad \frac{dx}{dy} = \operatorname{ctg}\alpha, \quad \frac{d(\cos\alpha)}{dy} = -2y + \frac{\sin\alpha}{x}$$

Gebrauch machen, wenn $\operatorname{tg}\alpha$ größer als 1 wird.

Da alle Tropfen und Blasen in der Rotationsachse eine horizontale Tangential-Ebene haben, so kann man sich auf den Fall beschränken, daß für $x = 0$ auch $\alpha = 0$ wird. Zunächst kommen also die Differential-Gleichungen (3.) in Betracht. Der zugehörige Anfangswert von y sei 1.

In dem Anfangspunkte nimmt dann $\frac{z}{x}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Zur Bestimmung des wahren Wertes differenziere man Zähler und Nenner einzeln. Dadurch erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (3.)

$$\lim_{x=0}\left(\frac{z}{x}\right) = \lim_{x=0} \frac{\frac{dz}{dx}}{1} = \lim\left(2y - \frac{z}{x}\right),$$

also

$$\lim_{x=0}\left(\frac{z}{x}\right) = \lim_{x=0} y = 1.$$

Man erhält daher, wenn man zunächst

$$x_0 = 0, \; y_0 = 1, \; z_0 = 0; \; x = 0{,}1: \quad \text{also} \quad h = 0{,}1$$

setzt,

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \psi(x_0, y_0, z_0) \doteq 2 - 1 = 1,$$
$$y' = y_0 + \varphi(x_0, y_0, z_0) \,.\, h = 1,$$
$$z' = z_0 + \psi(x_0, y_0, z_0) \,.\, h = 0{,}1.$$

Dies gibt

$$\frac{x_0 + x}{2} = 0{,}05; \quad \frac{y_0 + y'}{2} = 1, \quad \frac{z_0 + z'}{2} = 0{,}05;$$

also

$$\varphi\left(\frac{x_0 + x}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}, \frac{z_0 + z'}{2}\right) = \frac{0{,}05}{\sqrt{0{,}9975}} = \frac{1}{\sqrt{399}}$$

$$= \frac{1}{19{,}974\,984} = 0{,}050\,062\,6;$$

$$\psi\left(\frac{x_0 + x}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}, \frac{z_0 + z'}{2}\right) = 2 - 1 = 1.$$

Ferner wird

$$y'' = y_0 + \varphi(x, y', z') . h = 1 + \frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}99}} \cdot 0{,}1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{9900}}$$

$$= 1 + 1 : 99{,}498\,74 = 1{,}010\,050\,4;$$

$$z'' = z_0 + \psi(x, y', z') . h = \left(2 - \frac{0{,}1}{0{,}1}\right) \cdot 0{,}1 = 0{,}1;$$

$$\varphi(x, y'', z'') = \frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = 0{,}100\,503\,8;$$

$$\psi(x, y'', z'') = 2{,}020\,100\,8 - \frac{0{,}1}{0{,}1} = 1{,}020\,100\,8.$$

Daraus folgt nach Formel Nr. 256 der Tabelle

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(0 + 0{,}200\,250\,4 + 0{,}100\,503\,8)$$

$$= 1 + 0{,}300\,754\,2 : 60 = 1{,}005\,012\,6;$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{6}(1 + 4 + 1{,}020\,100\,8)$$

$$= 6{,}020\,100\,8 : 60 = 0{,}100\,335\,0.$$

Für den zweiten Schritt hat man daher zu setzen:

$$x_0 = 0{,}1; \quad y_0 = 1{,}005\,012\,6; \quad z_0 = 0{,}100\,335\,0;$$

$$x = 0{,}2; \quad \text{also} \quad h = 0{,}1.$$

Dies gibt

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{\sqrt{1 - z_0^2}} = \frac{0{,}100\,335\,0}{\sqrt{0{,}989\,932\,9}} = \frac{0{,}100\,335\,0}{0{,}994\,953\,7}$$

$$= 0{,}100\,843\,9;$$

$$\psi(x_0, y_0, z_0) = 2{,}010\,025\,2 - 1{,}003\,350\,0 = 1{,}006\,675\,2;$$

$$y' = y_0 + \varphi(x_0, y_0, z_0)\,.\,h = y_0 + 0{,}010\,084\,4 = 1{,}015\,097\,0;$$

$$z' = z_0 + \psi(x_0, y_0, z_0)\,.\,h = z_0 + 0{,}100\,667\,5 = 0{,}201\,002\,5;$$

$$\frac{x_0 + x}{2} = 0{,}15; \quad \frac{y_0 + y'}{2} = 1{,}010\,054\,8; \quad \frac{z_0 + z'}{2} = 0{,}150\,668\,75;$$

$$\varphi\left(\frac{x_0 + x}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}, \frac{z_0 + z'}{2}\right) = \frac{0{,}150\,668\,75}{\sqrt{0{,}977\,298\,9}} = \frac{0{,}150\,668\,75}{0{,}988\,584\,3}$$
$$= 0{,}152\,408\,6;$$

$$\psi\left(\frac{x_0 + x}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}, \frac{z_0 + z'}{2}\right) = 2{,}020\,109\,6 - \frac{0{,}301\,337\,5}{0{,}30}$$
$$= 1{,}015\,651\,3.$$

Ferner ist

$$y'' = y_0 + \varphi(x, y', z')\,.\,h = y_0 + \frac{0{,}201\,002\,5}{\sqrt{0{,}959\,598\,0}} \cdot 0{,}1$$
$$= y_0 + \frac{0{,}020\,100\,25}{0{,}979\,590\,7} = y_0 + 0{,}020\,519\,0 = 1{,}025\,531\,6;$$

$$z'' = z_0 + \psi(x, y', z')\,.\,h = z_0 + (2{,}030\,194\,0 - 1{,}005\,012\,5)\,.\,0{,}1$$
$$= z_0 + 0{,}102\,518\,2 = 0{,}202\,853\,2.$$

Daraus folgt

$$\varphi(x, y'', z'') = \frac{0{,}202\,853\,2}{\sqrt{0{,}958\,850\,6}} = \frac{0{,}202\,853\,2}{0{,}979\,209\,2} = 0{,}207\,160\,2;$$

$$\psi(x, y'', z'') = 2{,}051\,063\,2 - \frac{0{,}202\,853\,2}{0{,}2} = 1{,}036\,797\,2;$$

folglich findet man nach Formel Nr. 256 der Tabelle

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(0{,}100\,843\,9 + 0{,}609\,634\,4 + 0{,}207\,160\,2)$$
$$= 1{,}005\,012\,6 + 0{,}917\,638\,5 : 60 = 1{,}020\,306\,6;$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{6}(1{,}006\,675\,2 + 4{,}062\,605\,2 + 1{,}036\,797\,2)$$
$$= 0{,}100\,335\,0 + 6{,}106\,077\,6 : 60 = 0{,}202\,103\,0.$$

Indem man so weiter fortfährt, findet man die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Näherungswerte:

x	y	$z = \sin\alpha$	$u = \cos\alpha$
0	1	0	1
0,1	1,005 012 6	0,100 335 0	0,994 953 7
0,2	1,020 306 6	0,202 103 0	0,979 364 3
0,3	1,046 631 6	0,306 993 6	0,951 711 6
0,4	1,085 470 0	0,416 796 4	0,908 999 9
0,5	1,139 538 9	0,533 648 1	0,845 706 6
0,6	1,214 153 1	0,660 360 4	0,750 948 8
0,678 009 4	1,294 153 1	0,768 696 6	0,639 613 6
0,735 151 0	1,374 153 1	0,855 363 3	0,518 028 6
0,775 915 5	1,454 153 1	0,922 552 3	0,385 872 1
0,802 565 0	1,534 153 1	0,970 091 0	0,242 741 5
0,816 098 1	1,614 153 1	0,996 112 0	0,088 095 7
0,818 007 4	1,657 137 4	1,000 000 0	0,000 000 0

Dabei ist noch ein Wechsel in den unabhängigen Veränderlichen eingetreten. Sobald nämlich der Winkel α größer als 45° und deshalb $\operatorname{tg}\alpha$ größer als 1 wird, ist es ratsamer, y zur unabhängigen Veränderlichen zu machen. Zu diesem Zwecke lege man der Rechnung die Differential-Gleichungen (4.) zugrunde. Setzt man dabei der Kürze wegen

(5.) $$\cos\alpha = \sqrt{1 - z^2} = u,$$

so nehmen diese Gleichungen die Form

(6.) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{u}{\sqrt{1 - u^2}} = \varphi(x, y, u), \\[2ex] \dfrac{du}{dy} = -2y + \dfrac{\sqrt{1 - u^2}}{x} = \psi(x, y, u) \end{cases}$$

an, wobei die Funktionszeichen $\varphi(x, y, u)$ und $\psi(x, y, u)$ natürlich eine andere Bedeutung haben wie in den Gleichungen (3.). Zur Ausführung der Rechnung setze man

dann zunächst, den Werten in Zeile 7 der Tabelle entsprechend,

$$x_0 = 0{,}6;\ y_0 = 1{,}214\,153\,1;\ z_0 = 0{,}660\,360\,4;\ u_0 = 0{,}750\,948\,8$$
$$y = 1{,}294\,153\,1;\ \text{also } h = 0{,}08.$$

Der Zuwachs von y, nämlich h, ist dabei nur mit 0,08 angesetzt, damit die Intervalle von u nicht zu groß werden. Man findet dann

$$\varphi(x_0, y_0, u_0) = \frac{u_0}{z_0} = \frac{0{,}750\,948\,8}{0{,}660\,360\,4} = 1{,}137\,180\,2;$$

$$\psi(x_0, y_0, u_0) = -2{,}428\,306\,2 + \frac{0{,}660\,360\,4}{0{,}6} = -1{,}327\,705\,5;$$

$$x' = x_0 + \varphi(x_0, y_0, u_0)\,.\,h = 0{,}690\,974\,4;$$
$$u' = u_0 + \psi(x_0, y_0, u_0)\,.\,h = 0{,}644\,732\,4;$$

$$\frac{x_0 + x'}{2} = 0{,}645\,487\,2;\quad \frac{y_0 + y}{2} = 1{,}254\,153\,1;$$

$$\frac{u_0 + u'}{2} = 0{,}697\,840\,6;\quad \sqrt{1 - \left(\frac{u_0 + u'}{2}\right)^2} = 0{,}716\,253\,1.$$

Dies gibt

$$\varphi\left(\frac{x_0 + x'}{2}, \frac{y_0 + y}{2}, \frac{u_0 + u'}{2}\right) = \frac{0{,}697\,840\,6}{0{,}716\,253\,1} = 0{,}974\,293\,3;$$

$$\psi\left(\frac{x_0 + x'}{2}, \frac{y_0 + y}{2}, \frac{u_0 + u'}{2}\right) = -2{,}508\,306\,2 + \frac{0{,}716\,253\,1}{0{,}645\,487\,2}$$
$$= -1{,}398\,674\,4.$$

Ferner wird

$$x'' = x_0 + \varphi(x', y, u')\,.\,h = x_0 + \frac{0{,}644\,732\,4}{0{,}764\,408\,3}\,h = 0{,}667\,475\,2;$$

$$u'' = u_0 + \psi(x', y, u')\,.\,h = u_0 + \left(-2{,}588\,306\,2 + \frac{0{,}764\,408\,3}{0{,}690\,974\,4}\right)h$$
$$= u_0 - 1{,}482\,030\,3\,.\,h = 0{,}632\,386\,4;$$

$$z'' = \sqrt{1 - u''^2} = 0{,}774\,653\,1;$$

$$\varphi(x'', y, u'') = \frac{0{,}632\,386\,4}{0{,}774\,653\,1} = 0{,}816\,347\,9;$$

$$\psi(x'', y, u'') = -2{,}588\,306\,2 + \frac{0{,}774\,653\,1}{0{,}667\,475\,2} = -1{,}427\,734\,1:$$

folglich findet man nach Formel Nr. 256 der Tabelle die Näherungswerte

$$x_1 = x_0 + \frac{h}{6}(1{,}137\,180\,2 + 3{,}897\,173\,2 + 0{,}816\,347\,9)$$
$$= 0{,}678\,009\,4;$$

$$u_1 = u_0 - \frac{h}{6}(1{,}327\,705\,5 + 5{,}594\,697\,6 + 1{,}427\,734\,1)$$
$$= 0{,}639\,613\,6.$$

Bei dem letzten Schritt ist nochmals ein Wechsel der unabhängigen Veränderlichen vorgenommen, damit man die Koordinaten desjenigen Punktes findet, in welchem die Tangente zur Y-Achse parallel wird, in welchem also α gleich 90^0, $z = \sin\alpha$ gleich 1 und $u = \cos\alpha$ gleich 0 wird. Indem man zu diesem Zwecke u zur unabhängigen Veränderlichen macht, findet man aus den Gleichungen (6.)

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{du} = \dfrac{x}{z - 2xy} = \psi(x, y, u), \text{ also } \dfrac{1}{\psi(x, y, u)} = \dfrac{z}{x} - 2y, \\[2ex] \dfrac{dx}{du} = \dfrac{dx}{dy} \cdot \dfrac{dy}{du} = \dfrac{u}{z} \cdot \psi(x, y, u) = \varphi(x, y, u), \end{cases}$$

wobei die Funktionszeichen $\varphi(x, y, u)$ und $\psi(x, y, u)$ mit Rücksicht darauf, daß Formel Nr. 256 zur Verwendung kommen soll, gewählt sind, aber wiederum eine andere Bedeutung haben als in den Gleichungen (3.) und in den Gleichungen (6.). Zur Ausführung der Rechnung hat man dann, der Zeile 12 in der Tabelle entsprechend, zu setzen:

$$x_0 = 0{,}816\,098\,1;\; y_0 = 1{,}614\,153\,1;\; z_0 = 0{,}996\,112\,0;$$
$$u_0 = 0{,}088\,095\,7;\; z = 1,\; u = 0, \text{ also } h = -0{,}088\,095\,7.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{\psi(x_0, y_0, u_0)} = \frac{0{,}996\,112\,0}{0{,}816\,098\,1} - 3{,}228\,306\,2 = -2{,}007\,727\,4:$$

$$\psi(x_0, y_0, u_0) = -0{,}498\,075\,6; \quad \frac{u_0}{z_0} = \frac{0{,}088\,095\,7}{0{,}996\,112\,0} = 0{,}088\,439\,6;$$

$$\varphi(x_0, y_0, u_0) = \frac{u_0}{z_0} \cdot \psi(x_0, y_0, u_0) = -0{,}044\,049\,6;$$

$$x' = x_0 + \varphi(x_0, y_0, u_0)\,.\,h = 0{,}819\,978\,7;$$

$$y' = y_0 + \psi(x_0, y_0, u_0)\,.\,h = 1{,}658\,031\,4;$$

$$\frac{x_0 + x'}{2} = 0{,}818\,038\,4; \quad \frac{y_0 + y'}{2} = 1{,}636\,092\,25;$$

$$\frac{u_0 + u}{2} = 0{,}044\,047\,85; \quad \sqrt{1 - \left(\frac{u_0 + u}{2}\right)^2} = 0{,}999\,029\,4;$$

$$\frac{1}{\psi\left(\frac{x_0 + x'}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}, \frac{u_0 + u}{2}\right)} = \frac{0{,}999\,029\,4}{0{,}818\,038\,4} - 3{,}272\,184\,5$$
$$= -2{,}050\,934\,5;$$

$$\psi\left(\frac{x_0 + x'}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}, \frac{u_0 + u}{2}\right) = -0{,}487\,582\,6;$$

$$\varphi\left(\frac{x_0 + x'}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}, \frac{u_0 + u}{2}\right) = -\frac{0{,}044\,047\,85}{0{,}999\,029\,4} \cdot 0{,}487\,582\,6$$
$$= -0{,}021\,497\,8.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\psi(x', y', u)} = \frac{1}{0{,}819\,978\,7} - 3{,}316\,062\,8 = -2{,}096\,518\,9;$$

$$\psi(x', y', u) = -0{,}476\,981\,2; \quad \frac{u}{z} = 0, \text{ also } \varphi(x', y', u) = 0;$$

$$x'' = x_0 + \varphi(x', y', u)\,.\,h = 0{,}816\,098\,1;$$

$$y'' = y_0 + \psi(x', y', u)\,.\,h = 1{,}656\,173\,1.$$

$$\frac{1}{\psi(x'', y'', u)} = \frac{1}{0{,}816\,098\,1} - 3{,}312\,346\,2 = -2{,}087\,003\,3;$$

$$\psi(x'', y'', u) = -0{,}479\,155\,9; \quad \varphi(x'', y'', u) = 0;$$

folglich findet man nach Formel Nr. 256 der Tabelle die Näherungswerte

$$x_1 = x_0 - \frac{h}{6}(0{,}044\,049\,6 + 0{,}085\,991\,2) = 0{,}818\,007\,4;$$

$$y_1 = y_0 - \frac{h}{6}(0{,}498\,075\,6 + 1{,}950\,330\,4 + 0{,}479\,155\,9)$$
$$= 1{,}657\,137\,4.$$

Obwohl die Rechnungen in § 119 und § 121 mit Hilfe der Rechenmaschine ausgeführt sind, erfordern sie doch recht viel Zeit und Mühe, zumal da sie der Sicherheit wegen zu wiederholten Malen auszuführen sind. Wenn man aber nicht mit 7, sondern nur mit 3 oder 4 Dezimalstellen rechnet, so kann man den Rechenschieber benutzen und kommt dann sehr viel schneller zum Ziele.

Tabelle der wichtigsten Formeln

aus der

Integral-Rechnung.

Anhang

zu

Kiepert's Grundriß der Integral-Rechnung.

Neunte verbesserte und vermehrte Auflage
des gleichnamigen Leitfadens von

weil. **Dr. Max Stegemann.**



Hannover 1908.
Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

Tafel für das elliptische Integral $K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, wo $k = \sin\alpha$ *).

Grad α	0′	12′	24′	36′	48′	Grad α	0′	12′	24′	36′	48′
0	1,57080	1,57080	1,57082	1,57084	1,57087	45	1,85407	1,85704	1,86003	1,86305	1,86609
1	1,57092	1,57097	1,57103	1,57110	1,57118	46	1,86915	1,87223	1,87534	1,87817	1,88163
2	1,57127	1,57138	1,57149	1,57161	1,57173	47	1,88481	1,88801	1,89124	1,89450	1,89778
3	1,57187	1,57202	1,57218	1,57235	1,57253	48	1,90108	1,90441	1,90777	1,91115	1,91456
4	1,57271	1,57291	1,57312	1,57333	1,57356	49	1,91800	1,92146	1,92495	1,92847	1,93201
5	1,57379	1,57404	1,57429	1,57456	1,57483	50	1,93558	1,93918	1,94281	1,94646	1,95015
6	1,57511	1,57541	1,57571	1,57602	1,57635	51	1,95386	1,95761	1,96138	1,96518	1,96902
7	1,57668	1,57702	1,57737	1,57773	1,57811	52	1,97288	1,97678	1,98070	1,98466	1,98865
8	1,57849	1,57888	1,57928	1,57969	1,58011	53	1,99267	1,99672	2,00081	2,00493	2,00908
9	1,58054	1,58098	1,58143	1,58189	1,58236	54	2,01327	2,01749	2,02174	2,02603	2,03036
10	1,58284	1,58333	1,58383	1,58434	1,58486	55	2,03472	2,03911	2,04354	2,04801	2,05252
11	1,58539	1,58593	1,58648	1,58705	1,58762	56	2,05706	2,06164	2,06626	2,07092	2,07562
12	1,58820	1,58879	1,58939	1,59000	1,59062	57	2,08036	2,08514	2,08995	2,09481	2,09971
13	1,59125	1,59190	1,59255	1,59321	1,59388	58	2,10466	2,10964	2,11467	2,11974	2,12486
14	1,59457	1,59526	1,59597	1,59668	1,59741	59	2,13002	2,13523	2,14048	2,14578	2,15112
15	1,59814	1,59889	1,59964	1,60041	1,60119	60	2,15652	2,16196	2,16745	2,17298	2,17857
16	1,60198	1,60278	1,60359	1,60441	1,60524	61	2,18421	2,18990	2,19565	2,20144	2,20729
17	1,60608	1,60693	1,60780	1,60867	1,60956	62	2,21319	2,21915	2,22517	2,23124	2,23736
18	1,61045	1,61136	1,61228	1,61321	1,61415	63	2,24355	2,24979	2,25610	2,26246	2,26889
19	1,61510	1,61606	1,61704	1,61802	1,61902	64	2,27538	2,28193	2,28854	2,29523	2,30197
20	1,62003	1,62104	1,62207	1,62311	1,62417	65	2,30879	2,31567	2,32262	2,32964	2,33674
21	1,62523	1,62631	1,62740	1,62850	1,62961	66	2,34390	2,35115	2,35846	2,36585	2,37332
22	1,63073	1,63186	1,63301	1,63417	1,63534	67	2,38087	2,38850	2,39621	2,40400	2,41188
23	1,63652	1,63771	1,63892	1,64013	1,64136	68	2,41984	2,42789	2,43603	2,44426	2,45258
24	1,64260	1,64386	1,64512	1,64640	1,64769	69	2,46100	2,46951	2,47812	2,48683	2,49564
25	1,64900	1,65031	1,65164	1,65298	1,65433	70	2,50455	2,51357	2,52269	2,53193	2,54127
26	1,65570	1,65708	1,65847	1,65987	1,66129	71	2,55073	2,56030	2,57000	2,57982	2,58975
27	1,66272	1,66416	1,66561	1,66708	1,66856	72	2,59982	2,61001	2,62034	2,63080	2,64140
28	1,67006	1,67157	1,67309	1,67462	1,67617	73	2,65214	2,66302	2,67405	2,68524	2,69657
29	1,67773	1,67931	1,68090	1,68250	1,68412	74	2,70807	2,71973	2,73155	2,74354	2,75571
30	1,68575	1,68740	1,68905	1,69073	1,69241	75	2,76806	2,78060	2,79332	2,80624	2,81935
31	1,69411	1,69583	1,69756	1,69930	1,70106	76	2,83267	2,84620	2,85995	2,87392	2,88813
32	1,70284	1,70462	1,70643	1,70824	1,71008	77	2,90256	2,91725	2,93218	2,94737	2,96283
33	1,71192	1,71379	1,71567	1,71756	1,71947	78	2,97857	2,99459	3,01091	3,02753	3,04446
34	1,72139	1,72333	1,72529	1,72726	1,72924	79	3,06173	3,07933	3,09728	3,11560	3,13430
35	1,73125	1,73326	1,73530	1,73735	1,73942	80	3,15339	3,17288	3,19280	3,21317	3,23400
36	1,74150	1,74360	1,74572	1,74785	1,75000	81	3,25530	3,27711	3,29945	3,32234	3,34580
37	1,75217	1,75435	1,75655	1,75877	1,76100	82	3,36987	3,39457	3,41994	3,44601	3,47283
38	1,76326	1,76553	1,76781	1,77012	1,77244	83	3,50042	3,52885	3,55814	3,58837	3,61959
39	1,77479	1,77715	1,77952	1,78192	1,78434	84	3,65186	3,68525	3,71984	3,75572	3,79298
40	1,78677	1,78922	1,79169	1,79418	1,79669	85	3,83174	3,87211	3,91423	3,95826	4,00437
41	1,79922	1,80177	1,80434	1,80693	1,80953	86	4,05276	4,10367	4,15736	4,21416	4,27444
42	1,81216	1,81481	1,81748	1,82016	1,82287	87	4,33865	4,40733	4,48115	4,56091	4,64765
43	1,82560	1,82835	1,83112	1,83392	1,83673	88	4,74272	4,84784	4,96542	5,09876	5,25274
44	1,83957	1,84242	1,84530	1,84820	1,85113	89	5,43491	5,65792	5,94550	6,35089	7,04398
45	1,85407	1,85704	1,86003	1,86305	1,86609	90	∞				

*) Bei der Berechnung dieser Tafeln ist das Werk von *Legendre*, Traité des fonctions elliptiques, benutzt worden.

Tafel für das elliptische Integral $E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, wo $k = \sin\alpha$.

Grad α	0′	12′	24′	36′	48′	Grad α	0′	12′	24′	36′	48′
0	1,57080	1,57079	1,57078	1,57075	1,57072	**45**	1,35064	1,34888	1,34712	1,34535	1,34358
1	1,57068	1,57062	1,57056	1,57049	1,57041	46	1,34181	1,34003	1,33824	1,33646	1,33466
2	1,57032	1,57022	1,57011	1,56999	1,56986	47	1,33287	1,33107	1,32927	1,32746	1,32565
3	1,56972	1,56957	1,56941	1,56925	1,56907	48	1,32384	1,32203	1,32021	1,31838	1,31656
4	1,56888	1,56869	1,56848	1,56827	1,56804	49	1,31473	1,31290	1,31106	1,30922	1,30739
5	1,56781	1,56757	1,56731	1,56705	1,56678	**50**	1,30554	1,30369	1,30184	1,29999	1,29814
6	1,56650	1,56621	1,56591	1,56560	1,56528	51	1,29628	1,29442	1,29256	1,29069	1,28882
7	1,56495	1,56461	1,56426	1,56390	1,56354	52	1,28695	1,28508	1,28321	1,28133	1,27945
8	1,56316	1,56278	1,56238	1,56198	1,56156	53	1,27757	1,27569	1,27381	1,27192	1,27004
9	1,56114	1,56071	1,56027	1,55982	1,55936	54	1,26815	1,26626	1,26436	1,26247	1,26058
10	1,55889	1,55841	1,55792	1,55742	1,55692	**55**	1,25868	1,25678	1,25488	1,25298	1,25108
11	1,55640	1,55587	1,55534	1,55480	1,55424	56	1,24918	1,24728	1,24538	1,24347	1,24157
12	1,55368	1,55311	1,55253	1,55194	1,55134	57	1,23966	1,23776	1,23585	1,23394	1,23203
13	1,55073	1,55011	1,54949	1,54885	1,54821	58	1,23013	1,22822	1,22631	1,22440	1,22250
14	1,54755	1,54689	1,54622	1,54554	1,54485	59	1,22059	1,21868	1,21677	1,21487	1,21296
15	1,54415	1,54344	1,54273	1,54200	1,54127	**60**	1,21106	1,20915	1,20725	1,20534	1,20344
16	1,54052	1,53977	1,53901	1,53824	1,53746	61	1,20154	1,19964	1,19774	1,19584	1,19394
17	1,53667	1,53587	1,53507	1,53425	1,53343	62	1,19205	1,19015	1,18826	1,18637	1,18448
18	1,53260	1,53176	1,53091	1,53005	1,52918	63	1,18259	1,18070	1,17882	1,17694	1,17506
19	1,52831	1,52742	1,52653	1,52563	1,52472	64	1,17318	1,17130	1,16843	1,16756	1,16569
20	1,52380	1,52287	1,52194	1,52099	1,52004	**65**	1,16383	1,16197	1,16011	1,15825	1,15640
21	1,51908	1,51811	1,51713	1,51614	1,51515	66	1,15455	1,15270	1,15086	1,14902	1,14718
22	1,51415	1,51314	1,51212	1,51109	1,51005	67	1,14535	1,14352	1,14169	1,13987	1,13806
23	1,50901	1,50795	1,50689	1,50582	1,50475	68	1,13624	1,13444	1,13263	1,13083	1,12904
24	1,50366	1,50257	1,50147	1,50036	1,49924	69	1,12725	1,12546	1,12369	1,12191	1,12014
25	1,49811	1,49698	1,49584	1,49469	1,49353	**70**	1,11838	1,11662	1,11487	1,11312	1,11138
26	1,49237	1,49120	1,49002	1,48883	1,48763	71	1,10964	1,10791	1,10619	1,10448	1,10277
27	1,48643	1,48522	1,48400	1,48277	1,48153	72	1,10106	1,09937	1,09768	1,09599	1,09432
28	1,48029	1,47904	1,47779	1,47652	1,47525	73	1,09265	1,09099	1,08934	1,08769	1,08605
29	1,47397	1,47268	1,47139	1,47009	1,46878	74	1,08443	1,08280	1,08119	1,07959	1,07799
30	1,46746	1,46614	1,46481	1,46347	1,46213	**75**	1,07641	1,07483	1,07326	1,07170	1,07015
31	1,46077	1,45941	1,45805	1,45668	1,45529	76	1,06861	1,06708	1,06556	1,06405	1,06255
32	1,45391	1,45251	1,45111	1,44971	1,44829	77	1,06106	1,05958	1,05811	1,05666	1,05521
33	1,44687	1,44544	1,44401	1,44257	1,44112	78	1,05378	1,05235	1,05094	1,04955	1,04816
34	1,43966	1,43820	1,43673	1,43526	1,43378	79	1,04679	1,04543	1,04408	1,04274	1,04142
35	1,43229	1,43080	1,42930	1,42779	1,42628	**80**	1,04011	1,03882	1,03754	1,03628	1,03503
36	1,42476	1,42324	1,42170	1,42017	1,41862	81	1,03379	1,03257	1,03136	1,03017	1,02900
37	1,41707	1,41552	1,41396	1,41239	1,41082	82	1,02784	1,02670	1,02558	1,02447	1,02338
38	1,40924	1,40766	1,40606	1,40447	1,40287	83	1,02231	1,02126	1,02023	1,01921	1,01821
39	1,40126	1,39965	1,39803	1,39640	1,39478	84	1,01724	1,01628	1,01534	1,01443	1,01354
40	1,39314	1,39150	1,38985	1,38820	1,38655	**85**	1,01266	1,01181	1,01099	1,01018	1,00940
41	1,38489	1,38322	1,38155	1,37987	1,37819	86	1,00865	1,00792	1,00721	1,00653	1,00588
42	1,37650	1,37481	1,37312	1,37142	1,36971	87	1,00526	1,00466	1,00410	1,00356	1,00306
43	1,36800	1,36628	1,36456	1,36284	1,36111	88	1,00258	1,00215	1,00174	1,00137	1,00104
44	1,35938	1,35764	1,35590	1,35415	1,35240	89	1,00075	1,00050	1,00030	1,00014	1,00004
45	1,35064	1,34888	1,34712	1,34535	1,34358	**90**	1,00000				

Tafel für das elliptische Integral $F(k, \varphi)$, wo $k = \sin \alpha$.

Grad α	$F(k, 5^0)$	$F(k, 10^0)$	$F(k, 15^0)$	$F(k, 20^0)$	$F(k, 25^0)$	$F(k, 30^0)$	$F(k, 35^0)$	$F(k, 40^0)$	$F(k, 45^0)$
0	0,08727	0,17453	0,26180	0,34907	0,43633	0,52360	0,61087	0,69813	0,78540
5	0,08727	0,17454	0,26182	0,34912	0,43643	0,52377	0,61113	0,69852	0,78594
10	0,08727	0,17456	0,26189	0,34927	0,43674	0,52428	0,61193	0,69969	0,78756
15	0,08727	0,17459	0,26200	0,34953	0,43723	0,52513	0,61325	0,70162	0,79025
20	0,08728	0,17464	0,26215	0,34988	0,43791	0,52628	0,61506	0,70429	0,79308
25	0,08729	0,17469	0,26233	0,35031	0,43875	0,52773	0,61734	0,70765	0,79871
30	0,08729	0,17475	0,26254	0,35082	0,43973	0,52943	0,62003	0,71165	0,80437
35	0,08730	0,17482	0,26278	0,35138	0,44084	0,53134	0,62308	0,71622	0,81088
40	0,08731	0,17490	0,26303	0,35199	0,44203	0,53343	0,62643	0,72126	0,81815
45	0,08732	0,17498	0,26330	0,35262	0,44328	0,53562	0,62998	0,72667	0,82602
50	0,08733	0,17505	0,26356	0,35326	0,44455	0,53787	0,63364	0,73231	0,83431
55	0,08734	0,17513	0,26382	0,35388	0,44580	0,54009	0,63730	0,73801	0,84281
60	0,08735	0,17520	0,26406	0,35447	0,44699	0,54223	0,64085	0,74358	0,85122
65	0,08736	0,17526	0,26428	0,35501	0,44808	0,54420	0,64415	0,74882	0,85925
70	0,08736	0,17532	0,26448	0,35548	0,44904	0,54593	0,64707	0,75352	0,86653
75	0,08737	0,17537	0,26463	0,35586	0,44982	0,54736	0,64950	0,75745	0,87270
80	0,08737	0,17540	0,26475	0,35615	0,45040	0,54843	0,65132	0,76043	0,87741
85	0,08738	0,17542	0,26482	0,35632	0,45075	0,54908	0,65245	0,76228	0,88037
90	0,08738	0,17543	0,26484	0,35638	0,45088	0,54931	0,65284	0,76291	0,88137

Grad α	$F(k, 50^0)$	$F(k, 55^0)$	$F(k, 60^0)$	$F(k, 65^0)$	$F(k, 70^0)$	$F(k, 75^0)$	$F(k, 80^0)$	$F(k, 85^0)$	$F(k, 90^0)$
0	0,87266	0,95993	1,04720	1,13446	1,22173	1,30900	1,39626	1,48353	1,57080
5	0,87339	0,96086	1,04837	1,13590	1,22345	1,31102	1,39860	1,48619	1,57379
10	0,87556	0,96366	1,05188	1,14020	1,22861	1,31710	1,40565	1,49423	1,58284
15	0,87915	0,96832	1,05774	1,14740	1,23727	1,32733	1,41752	1,50781	1,59814
20	0,88416	0,97483	1,06597	1,15755	1,24953	1,34184	1,43442	1,52717	1,62003
25	0,89054	0,98317	1,07657	1,17070	1,26548	1,36083	1,45663	1,55273	1,64900
30	0,89825	0,99331	1,08955	1,18691	1,28530	1,38157	1,48455	1,58503	1,68575
35	0,90719	1,00519	1,10490	1,20626	1,30915	1,41339	1,51870	1,62478	1,73125
40	0,91725	1,01871	1,12256	1,22877	1,33723	1,44767	1,55973	1,67295	1,78677
45	0,92829	1,03371	1,14243	1,25447	1,36972	1,48788	1,60848	1,73082	1,85407
50	0,94008	1,04998	1,16432	1,28326	1,40677	1,53455	1,66597	1,80006	1,93558
55	0,95232	1,06716	1,18788	1,31491	1,44840	1,58817	1,73347	1,88296	2,03472
60	0,96465	1,08479	1,21254	1,34893	1,49441	1,64918	1,81253	1,98264	2,15652
65	0,97660	1,10223	1,23764	1,38443	1,54410	1,71763	1,90484	2,10348	2,30879
70	0,98762	1,11865	1,26186	1,41994	1,59591	1,79269	2,01193	2,25178	2,50455
75	0,99711	1,13307	1,28371	1,45316	1,64684	1,87145	2,13390	2,43658	2,76806
80	1,00444	1,14442	1,30135	1,48098	1,69181	1,94682	2,26527	2,66935	3,15339
85	1,00909	1,15171	1,31292	1,49977	1,72372	2,00499	2,38365	2,94869	3,83174
90	1,01068	1,15423	1,31696	1,50645	1,73542	2,02759	2,43625	3,13130	∞

Tafel für das elliptische Integral $E(k, \varphi)$, wo $k = \sin \alpha$.

Grad α	$E(k, 5^0)$	$E(k, 10^0)$	$E(k, 15^0)$	$E(k, 20^0)$	$E(k, 25^0)$	$E(k, 30^0)$	$E(k, 35^0)$	$E(k, 40^0)$	$E(k, 45^0)$
0	0,08727	0,17453	0,26180	0,34907	0,43633	0,52360	0,61087	0,69813	0,78540
5	0,08727	0,17453	0,26178	0,34901	0,43623	0,52343	0,61060	0,69774	0,78486
10	0,08726	0,17451	0,26171	0,34886	0,43593	0,52292	0,60980	0,69658	0,78324
15	0,08726	0,17447	0,26160	0,34860	0,43544	0,52208	0,60850	0,69467	0,78059
20	0,08725	0,17443	0,26145	0,34825	0,43477	0,52094	0,60672	0,69207	0,77607
25	0,08725	0,17438	0,26127	0,34783	0,43394	0,51953	0,60451	0,68884	0,77247
30	0,08724	0,17431	0,26106	0,34733	0,43298	0,51788	0,60194	0,68506	0,76720
35	0,08723	0,17424	0,26083	0,34678	0,43191	0,51605	0,59907	0,68084	0,76128
40	0,08722	0,17417	0,26058	0,34619	0,43076	0,51409	0,59598	0,67628	0,75480
45	0,08721	0,17409	0,26032	0,34558	0,42958	0,51205	0,59276	0,67153	0,74810
50	0,08720	0,17401	0,26006	0,34496	0,42838	0,51000	0,58952	0,66671	0,74137
55	0,08719	0,17394	0,25981	0,34437	0,42722	0,50799	0,58634	0,66197	0,73465
60	0,08718	0,17387	0,25957	0,34381	0,42612	0,50609	0,58332	0,65746	0,728[illegible]
65	0,08718	0,17381	0,25936	0,34330	0,42513	0,50437	0,58057	0,65334	0,72232
70	0,08717	0,17375	0,25917	0,34286	0,42426	0,50287	0,57818	0,64974	0,71715
75	0,08716	0,17371	0,25902	0,34250	0,42356	0,50165	0,57622	0,64679	0,71280
80	0,08716	0,17367	0,25891	0,34224	0,42304	0,50074	0,57477	0,64459	0,70972
85	0,08716	0,17365	0,25884	0,34207	0,42273	0,50019	0,57388	0,64324	0,70777
90	0,08716	0,17365	0,25882	0,34202	0,42262	0,50000	0,57358	0,64279	0,70711

Grad α	$E(k, 50^0)$	$E(k, 55^0)$	$E(k, 60^0)$	$E(k, 65^0)$	$E(k, 70^0)$	$E(k, 75^0)$	$E(k, 80^0)$	$E(k, 85^0)$	$E(k, 90^0)$
0	0,87266	0,95993	1,04720	1,13446	1,22173	1,30900	1,39626	1,48353	1,57080
5	0,87194	0,95900	1,04603	1,13304	1,22002	1,30608	1,39393	1,48087	1,56781
10	0,86979	0,95622	1,04255	1,12878	1,21491	1,30097	1,38698	1,47294	1,55889
15	0,86626	0,95166	1,03683	1,12176	1,20650	1,29107	1,37550	1,45985	1,54415
20	0,86142	0,94541	1,02897	1,11213	1,19493	1,27742	1,35968	1,44178	1,52380
25	0,85539	0,93761	1,01915	1,10005	1,18040	1,26026	1,33976	1,41900	1,49811
30	0,84832	0,92843	1,00756	1,08577	1,16318	1,23989	1,31606	1,39186	1,46746
35	0,84036	0,91807	0,99445	1,06958	1,14360	1,21666	1,28897	1,36076	1,43229
40	0,83173	0,90680	0,98013	1,05183	1,12205	1,19101	1,25897	1,32623	1,39314
45	0,82265	0,89490	0,96495	1,03293	1,09901	1,16346	1,22661	1,28886	1,35064
50	0,81338	0,88269	0,94930	1,01333	1,07500	1,13460	1,19255	1,24934	1,30554
55	0,80419	0,87052	0,93362	0,99358	1,05064	1,10513	1,15755	1,20850	1,25868
60	0,79538	0,85879	0,91839	0,97427	1,02664	1,07586	1,12249	1,16726	1,21106
65	0,78724	0,84788	0,90415	0,95606	1,00379	1,04769	1,08839	1,12673	1,16383
70	0,78007	0,83822	0,89144	0,93965	0,98298	1,02172	1,05648	1,08825	1,11838
75	0,77414	0,83020	0,88080	0,92580	0,96519	0,99916	1,02823	1,05343	1,07641
80	0,76971	0,82417	0,87276	0,91523	0,95144	0,98141	1,00543	1,02436	1,04011
85	0,76697	0,82042	0,86773	0,90858	0,94270	0,96992	0,99023	1,00394	1,01266
90	0,76604	0,81915	0,86603	0,90631	0,93969	0,96593	0,98481	0,99619	1,00000

Tabelle

der wichtigsten Formeln aus der Integral-Rechnung.*)

1.) $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x).$ [§ 1, Gl. (3.) und (4.)]

2.) $d\int F'(x)dx = F'(x)dx.$ [§ 1, Gl. (5.)]

3.) Ist a der Wert von x, für welchen das Integral von $F'(x)dx$ verschwindet, so ist

$$\int_a F'(x)dx = F(x) - F(a).$$ [§ 2, Gl. (3.)]

4.) Der Flächeninhalt einer ebenen Figur, welche begrenzt wird

1.) von der Kurve $y = f(x)$,
2.) von der X-Achse,
3.) von den beiden Ordinaten $x = a$ und $x = b$,

ist gleich

$$F = \int_a^b y dx = \int_a^b F'(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a),$$

wobei $F'(x) = f(x)$ sein soll. [§ 2, Gl. (5.) und (8a.)]

5.) $\int_a^b F'(x)dx = -\int_b^a F'(x)dx.$ [§ 2, Gl. (29.)]

*) Die Integrations-Konstante ist überall der Kürze wegen fortgelassen.

6.) $\int\limits_a^b F'(x)dx = \int\limits_a^c F'(x)dx + \int\limits_c^b F'(x)dx.$ [§ 2. Gl. (30.)]

7.) $\int AF'(x)dx = A\int F'(x)dx.$ [§ 3. Gl. (5.)]

8.) $\int [F'(x) \pm G'(x)]dx = \int F'(x)dx \pm \int G'(x)dx.$ [§ 3. Gl. (11.) und (13.)]

9.) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$ [§ 4, Gl. (2.)]

10.) $\int dx = x.$ [§ 4. Gl. (2a.)]

11.) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad \int e^x dx = e^x.$ [§ 4. Gl. (3.) und (3a.)]

12.) $\int \frac{dx}{x} = \ln x.$ [§ 4, Gl. (4.)]

13.) $\int \cos x dx = \sin x.$ [§ 4, Gl. (12.)]

14.) $\int \sin x dx = -\cos x.$ [§ 4, Gl. (13.)]

15.) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x.$ [§ 4, Gl. (14.)]

16.) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x.$ [§ 4, Gl. (15.)]

17.) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$ [§ 4. Gl. (16.) und (28.)]

18.) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\, x.$ [§ 4. Gl. (17.) und (32.)]

19.) $\int \mathfrak{Cos}\, x dx = \mathfrak{Sin}\, x.$ [§ 4. Gl. (18.)]

20.) $\int \mathfrak{Sin}\, x dx = \mathfrak{Cos}\, x.$ [§ 4, Gl. (19.)]

21.) $\int \frac{dx}{\mathfrak{Cos}^2 x} = \mathfrak{Tg}\, x.$ [§ 4. Gl. (20.)]

22.) $\int \frac{dx}{\mathfrak{Sin}^2 x} = -\mathfrak{Ctg}\, x.$ [§ 4. Gl. (21.)]

23.) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$ [§ 4. Gl. (22.)]

24.) $\pm\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\, x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$

$= \pm \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. [§ 4, Gl. (23.)]

25.) $\int\frac{dx}{1-x^2} = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, wenn $x < +1$.
[§ 4, Gl. (24.) und (36.)]

25a.) $\int\frac{dx}{1-x^2} = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Ctg}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, wenn $x > +1$.
[§ 4, Gl. (25.) und (37.)]

26.) Setzt man

$$x = \varphi(t), \quad \text{also} \quad dx = \varphi'(t)dt,$$

so wird

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt. \quad \text{[§ 7, Gl. (1.) und (5.)]}$$

27.) $\int\frac{dx}{x \pm a} = \ln(x \pm a)$. [§ 8, Gl. (2.), (3.) und § 37, Gl. (2.)]

28.) $\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$. [§ 8, Gl. (22.)]

29.) $\int\frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{a}\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right)$, wenn $x < a$.
[§ 8, Gl. (23.)]

29a.) $\int\frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{a}\mathfrak{Ar}\mathfrak{Ctg}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$,

wenn $x > a > 0$.
[§ 8, Gl. (24.), § 13, Gl. (1.) und (7.), § 37, Gl. (4.)]

30.) $\int\frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2 \pm a^2)$. [§ 8, Gl. (26.) und (27.)]

31.) $\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$. [§ 9, Gl. (2.)]

32.) $\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}} = +\sqrt{a^2+x^2}$. [§ 9, Gl. (4.)]

33.) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} = +\sqrt{x^2-a^2}$. [§ 9, Gl. (5.)]

34.) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$. [§ 9, Gl. (7.)]

35.) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right).$*) [§ 9, Gl. (8.)]

36.) $\pm \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left(\frac{x \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)$

$= \pm \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right).$**) [§ 9, Gl. (9.)]

37.) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a}\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right).$ [§ 9, Gl. (12.)]

38.) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x}.$ [§ 9, Gl. (14.) und § 18, Gl. (28.)]

39.) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{1}{a}\mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x}\right).$ [§ 9, Gl. (17.)]

40.) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a^2 x}.$ [§ 9, Gl. (19.) und § 18, Gl. (55.)]

41.) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a}\arcsin\left(\frac{a}{x}\right).$ [§ 9, Gl. (21.)]

42.) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}} = +\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x}.$ [§ 9, Gl. (23.) und § 18, Gl. (58.)]

43.) $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln[f(x)].$ [§ 10, Gl. (8.)]

44.) $\int \mathrm{tg}\, x dx = -\ln(\cos x).$ [§ 10, Gl. (10.)]

45.) $\int \mathrm{ctg}\, x dx = +\ln(\sin x).$ [§ 10, Gl. (11.)]

*) Man kann auch unter Weglassung der Integrations-Konstanten $-\ln a$ schreiben:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}).$$

**) Man kann auch unter Weglassung der Integrations-Konstanten $-\ln a$ schreiben:

$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - a^2}) = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}).$$

46.) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln(\mathrm{tg}\, x) = -\ln(\mathrm{ctg}\, x).$

[§ 10, Gl. (13.) und § 14, Gl. (2.)]

47.) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left[\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right] = -\ln\left[\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$ [§ 10, Gl. (15.)]

48.) $\int \frac{dx}{\cos x} = -\ln\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right] = +\ln\left[\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right]$

$= +\ln\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right] = -\ln\left[\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right].$ [§ 10, Gl. (17.)]

49.) $\int \mathfrak{Tg}\, x dx = \ln(\mathfrak{Cof}\, x).$ [§ 10, Gl. (19.)]

50.) $\int \mathfrak{Ctg}\, x dx = \ln(\mathfrak{Sin}\, x).$ [§ 10, Gl. (20.)]

51.) $\int \frac{dx}{\mathfrak{Sin}\, x\, \mathfrak{Cof}\, x} = \ln(\mathfrak{Tg}\, x) = -\ln(\mathfrak{Ctg}\, x).$ [§ 10, Gl. (21.)]

52.) $\int \frac{dx}{\mathfrak{Sin}\, x} = \ln\left[\mathfrak{Tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right] = -\ln\left[\mathfrak{Ctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$ [§ 10, Gl. (24.)]

53.) $\int F'(\sin x)\cos x dx = \int F'(t)dt = F(t),$ wo $t = \sin x.$

[§ 11, Gl. (3.)]

54.) $\int \cos^{2n+1} x dx = \int (1 - \sin^2 x)^n \,.\, d(\sin x).$ [§ 11, Gl. (7.)]

55.) $\int F'(\cos x) \,.\, \sin x dx = -\int F'(t)dt = -F(t),$ wo $t = \cos x.$

[§ 11, Gl. (10.)]

56.) $\int \sin^{2n+1} x dx = -\int (1 - \cos^2 x)^n \,.\, d(\cos x).$ [§ 11, Gl. (13.)]

57.) $\int \sin^m x \cos^{2n+1} x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^n \,.\, d(\sin x).$

[§ 11, Gl. (15.)]

58.) $\int \cos^m x \sin^{2n+1} x dx = -\int \cos^m x (1 - \cos^2 x)^n \,.\, d(\cos x).$

[§ 11, Gl. (17.)]

59.) $\int F'(\mathrm{tg}\, x) \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int F'(\mathrm{tg}\, x) \,.\, d(\mathrm{tg}\, x) = F(\mathrm{tg}\, x).$

[§ 11, Gl. (21.)]

60.) $\int f(\mathrm{tg}\, x) \,.\, dx = \int \frac{f(\mathrm{tg}\, x)}{\mathrm{tg}^2 x + 1} \cdot d(\mathrm{tg}\, x).$ [§ 11, Gl. (28.)]

60a.) $\int \mathrm{tg}^n x dx = \int \frac{\mathrm{tg}^n x}{\mathrm{tg}^2 x + 1} \cdot d(\mathrm{tg}\, x).$ [§ 11, Gl. (29.)]

61.) $\int \frac{dx}{\cos^{2m} x} = \int (1 + \mathrm{tg}^2 x)^{m-1} d(\mathrm{tg}\, x).$ [§ 11, Gl. (36.)]

62.) $\int F'(\operatorname{ctg} x) \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int F'(\operatorname{ctg} x) \, . \, d(\operatorname{ctg} x) = - F(\operatorname{ctg} x).$ [§ 11, Gl. (39.)]

63.) $\int f(\operatorname{ctg} x) \, . \, dx = -\int \frac{f(\operatorname{ctg} x)}{\operatorname{ctg}^2 x + 1} \cdot d(\operatorname{ctg} x).$ [§ 11, Gl. (43.)]

63a.) $\int \operatorname{ctg}^n x \, . \, dx = -\int \frac{\operatorname{ctg}^n x}{\operatorname{ctg}^2 x + 1} \cdot d(\operatorname{ctg} x).$ [§ 11, Gl. (44.)]

64.) $\int \frac{dx}{\sin^{2m} x} = -\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^{m-1} d(\operatorname{ctg} x).$ [§ 11, Gl. (45.)]

65.) $\int F'(\mathfrak{Sin}\, x) \mathfrak{Cos}\, x dx = \int F'(\mathfrak{Sin}\, x) \, . \, d(\mathfrak{Sin}\, x) = F(\mathfrak{Sin}\, x).$ [§ 11, Gl. (46.)]

66.) $\int \mathfrak{Cos}^{2n+1} x dx = \int (1 + \mathfrak{Sin}^2 x)^n \, . \, d(\mathfrak{Sin}\, x).$ [§ 11, Gl. (47.)]

67.) $\int F'(\mathfrak{Cos}\, x) \mathfrak{Sin}\, x dx = \int F'(\mathfrak{Cos}\, x) \, . \, d(\mathfrak{Cos}\, x) = F(\mathfrak{Cos}\, x).$ [§ 11, Gl. (48.)]

68.) $\int \mathfrak{Sin}^{2n+1} x dx = \int (\mathfrak{Cos}^2 x - 1)^n \, . \, d(\mathfrak{Cos}\, x).$ [§ 11, Gl. (49.)]

69.) $\int F'(\mathfrak{Tg}\, x) \cdot \frac{dx}{\mathfrak{Cos}^2 x} = \int F'(\mathfrak{Tg}\, x) \, . \, d(\mathfrak{Tg}\, x) = F(\mathfrak{Tg}\, x).$ [§ 11, Gl. (50.)]

70.) $\int f(\mathfrak{Tg}\, x) dx = \int \frac{f(\mathfrak{Tg}\, x)}{1 - \mathfrak{Tg}^2 x} \cdot d(\mathfrak{Tg}\, x).$ [§ 11, Gl. (51.)]

71.) $\int \frac{dx}{\mathfrak{Cos}^{2m} x} = \int (1 - \mathfrak{Tg}^2 x)^{m-1} \, . \, d(\mathfrak{Tg}\, x).$ [§ 11, Gl. (52.)]

72.) $\int F'(\mathfrak{Ctg}\, x) \cdot \frac{dx}{\mathfrak{Sin}^2 x} = -\int F'(\mathfrak{Ctg}\, x) \, . \, d(\mathfrak{Ctg}\, x) = - F(\mathfrak{Ctg}\, x).$ [§ 11, Gl. (53.)]

73.) $\int f(\mathfrak{Ctg}\, x) dx = \int \frac{f(\mathfrak{Ctg}\, x)}{1 - \mathfrak{Ctg}^2 x} \cdot d(\mathfrak{Ctg}\, x).$ [§ 11, Gl. (54.)]

74.) $\int \frac{dx}{\mathfrak{Sin}^{2m} x} = -\int (\mathfrak{Ctg}^2 x - 1)^{m-1} \, . \, d(\mathfrak{Ctg}\, x).$ [§ 11, Gl. (55.)]

75.) $\int F'[f(x)] \, . \, f'(x) dx = \int F'(t) dt = F(t) = F[f(x)].$ [§ 11, Gl. (56.)]

76.) $\int F'(a^x) \, . \, a^x dx = \frac{1}{\ln a} \int F'(a^x) \, . \, d(a^x) = \frac{1}{\ln a} F(a^x).$ [§ 11, Gl. (57.)]

76a.) $\int F'(e^x) \, . \, e^x dx = \int F'(e^x) \, . \, d(e^x) = F(e^x),$ [§ 11, Gl. (58.)]

77.) $\int F'(\ln x) \cdot \frac{dx}{x} = \int F'(\ln x) \,.\, d(\ln x) = F(\ln x).$

[§ 11, Gl. (59.)]

78.) $\int F'(\arcsin x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int F'(\arcsin x) \,.\, d(\arcsin x)$

$= F(\arcsin x).$ [§ 11, Gl. (60.)]

79.) $\int F'(\arccos x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int F'(\arccos x) \,.\, d(\arccos x)$

$= -F(\arccos x).$ [§ 11, Gl. (61.)]

80.) $\int F'(\operatorname{arctg} x) \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \int F'(\operatorname{arctg} x) \,.\, d(\operatorname{arctg} x) = F(\operatorname{arctg} x).$

(§ 11, Gl. (62.)]

81.) $\int F'(\operatorname{arcctg} x) \cdot \frac{dx}{1+x^2} = -\int F'(\operatorname{arcctg} x) \,.\, d(\operatorname{arcctg} x)$

$= -F(\operatorname{arcctg} x).$ [§ 11, Gl. (63.)]

82.) $\int f(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x) dx =$

$$\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1-t^2},\ \frac{1-t^2}{2t}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2},$$

wobei

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$$ [§ 11, Gl. (68.) bis (73.)]

82a.) $\int f(\mathfrak{Sin}\, x,\ \mathfrak{Cof}\, x,\ \mathfrak{Tg}\, x,\ \mathfrak{Ctg}\, x) dx =$

$$\int f\left(\frac{2t}{1-t^2},\ \frac{1+t^2}{1-t^2},\ \frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1+t^2}{2t}\right) \cdot \frac{2dt}{1-t^2},$$

wobei

$$t = \mathfrak{Tg}\left(\frac{x}{2}\right).$$ [§ 11, Gl. (77.) bis (81.)]

83.) $\int \frac{dx}{\mathfrak{Cof}\, x} = 2 \operatorname{arctg}(e^x).$ [§ 11, Gl. (76.)]

84.) $\int f(x,\ \sqrt{a^2-x^2}) dx = \int f(a \sin t,\ a \cos t) \,.\, a \cos t\, dt,$

wobei

$$\sin t = \frac{x}{a},\quad \cos t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},\quad \operatorname{tg} t = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$ [§ 12, Gl. (3.) und (4.)]

84a.) $$\int f(x,\ \sqrt{a^2-x^2})dx = \int f\left(a\,\mathfrak{Tg}\,t,\ \frac{a}{\mathfrak{Cof}\,t}\right)\cdot\frac{a\,dt}{\mathfrak{Cof}^2 t},$$

wobei

$$\mathfrak{Sin}\,t = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad \mathfrak{Cof}\,t = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad \mathfrak{Tg}\,t = \frac{x}{a},\quad \mathfrak{Ctg}\,t = \frac{a}{x}.$$

[§ 12, Gl. (7.) und (8.)]

85.) $$\int f(x,\ \sqrt{a^2+x^2})dx = \int f\left(a\operatorname{tg}t,\ \frac{a}{\cos t}\right)\cdot\frac{a\,dt}{\cos^2 t},$$

wobei

$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},\ \cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}},\ \operatorname{tg}t = \frac{x}{a},\ \operatorname{ctg}t = \frac{a}{x}.$$

[§ 12, Gl. (11.) und (12.)]

85a.) $$\int f(x,\ \sqrt{a^2+x^2})dx = \int f(a\,\mathfrak{Sin}\,t,\ a\,\mathfrak{Cof}\,t)\,.\,a\,\mathfrak{Cof}\,t\,.\,dt,$$

wobei

$$\mathfrak{Sin}\,t = \frac{x}{a},\quad \mathfrak{Cof}\,t = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a},\quad \mathfrak{Tg}\,t = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$\mathfrak{Ctg}\,t = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}.$$ [§ 12, Gl. (15.) und (16.)]

86.) $$\int f(x,\ \sqrt{x^2-a^2})dx = \int f\left(\frac{a}{\cos t},\ a\operatorname{tg}t\right)\cdot\frac{a\sin t\,dt}{\cos^2 t},$$

wobei

$$\sin t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x},\quad \cos t = \frac{a}{x},\quad \operatorname{tg}t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a},$$

$$\operatorname{ctg}t = \frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$ [§ 12, Gl. (25.) und (26.)]

86a.) $$\int f(x,\ \sqrt{x^2-a^2})dx = \int f(a\,\mathfrak{Cof}\,t,\ a\,\mathfrak{Sin}\,t)\,.\,a\,\mathfrak{Sin}\,t\,.\,dt,$$

wobei

$$\mathfrak{Sin}\,t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a},\quad \mathfrak{Cof}\,t = \frac{x}{a},\quad \mathfrak{Tg}\,t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x},$$

$$\mathfrak{Ctg}\,t = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$ [§ 12, Gl. (29.) und (30.)]

87.) $$\int\frac{dx}{x^2+2bx+c} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-c}}\ln\left(\frac{x+b-\sqrt{b^2-c}}{x+b+\sqrt{b^2-c}}\right).$$

[§ 13, Gl. (18.) und § 37, Gl. (9.)

88.) $$\int\frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{x_1-x_2}\ln\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right).$$
[§ 13, Gl. (18a.) und § 37, Gl. (5.)]

89.) $$\int\frac{dx}{x^2+2bx+c}=\frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right).$$
[§ 13, Gl. (25.) und § 38, Gl. (3.)]

90.) $$\int\frac{dx}{x^2+2bx+b^2}=\int\frac{dx}{(x+b)^2}=-\frac{1}{x+b}.$$
[§ 13, Gl. (30.) und § 37, Gl. (3a.)]

91.) $$\int\frac{(Px+Q)dx}{x^2+2bx+c}=\frac{P}{2}\ln(x^2+2bx+c)+(Q-Pb)\int\frac{dx}{x^2+2bx+c}.$$
[§ 13, Gl. (31.)]

92.) $$\int\frac{(Px+Q)dx}{(x-x_1)(x-x_2)}$$
$$=\frac{1}{x_1-x_2}\left[(Px_1+Q)\ln(x-x_1)-(Px_2+Q)\ln(x-x_2)\right].$$
[§ 13, Gl. (32.) und § 37, Gl. (10.)]

93.) $$\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x=-2\operatorname{ctg}(2x).$$ [§ 14, Gl. (1.)]

94.) $$2^{2n}\int\cos^{2n}x\,dx=\frac{2}{2n}\sin(2nx)+\binom{2n}{1}\frac{2}{2n-2}\sin(2n-2)x$$
$$+\binom{2n}{2}\frac{2}{2n-4}\sin(2n-4)x+\cdots+\binom{2n}{n-1}\sin(2x)+\binom{2n}{n}x.$$
[§ 14, Gl. (5.)]

95.) $$2^{2n+1}\int\cos^{2n+1}x\,dx=\frac{2}{2n+1}\sin(2n+1)x$$
$$+\binom{2n+1}{1}\frac{2}{2n-1}\sin(2n-1)x$$
$$+\binom{2n+1}{2}\frac{2}{2n-3}\sin(2n-3)x+\cdots$$
$$+\binom{2n+1}{n-1}\frac{2}{3}\sin(3x)+\binom{2n+1}{n}2\sin x.$$
[§ 14, Gl. (8.)]

96.) $$(-1)^n 2^{2n}\int \sin^{2n}x\,dx = \frac{2}{2n}\sin(2nx) - \binom{2n}{1}\frac{2}{2n-2}\sin(2n-2)x + \binom{2n}{2}\frac{2}{2n-4}\sin(2n-4)x - \cdots + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}\sin(2x) + (-1)^n\binom{2n}{n}x.$$ [§ 14, Gl. (12.)]

97.) $$(-1)^n 2^{2n+1}\int \sin^{2n+1}x\,dx = -\frac{2}{2n+1}\cos(2n+1)x + \binom{2n+1}{1}\frac{2}{2n-1}\cos(2n-1)x - \binom{2n+1}{2}\frac{2}{2n-3}\cos(2n-3)x + - \cdots - (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{n-1}\frac{2}{3}\cos(3x) - (-1)^n\binom{2n+1}{n}2\cos x.$$ [§ 14, Gl. (15.)]

98.) $$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$ [§ 15, Gl. (2.)]

99.) $$\int \cos^2 x\,.\,dx = \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{x}{2}\,.$$ [§ 17, Gl. (4.)]

100.) $$\int \sin^2 x\,.\,dx = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{x}{2}\,.$$ [§ 17, Gl. (8.)]

101.) $$\int \cos^m x\,.\,dx = \frac{1}{m}\cos^{m-1}x\sin x + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2}x\,.\,dx.$$ [§ 17, Gl. (16.)]

102.) $$\int \cos^{2n}x\,.\,dx = \sin x\left[\frac{1}{2n}\cos^{2n-1}x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)}\cos^{2n-3}x + \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n\,.\,(2n-2)(2n-4)}\cos^{2n-5}x + \cdots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\,.\,3}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4\,.\,2}\cos x\right] + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\,.\,3\,.\,1}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4\,.\,2}x.$$ [§ 17, Gl. (24.)]

103.) $$\int \frac{dx}{\cos^n x} = + \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2}x}.$$
[§ 17, Gl. (26.)]

104.) $$\int \sin^m x \,.\, dx = -\frac{1}{m}\sin^{m-1}x\cos x + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}x \,.\, dx.$$
[§ 17, Gl. (38.)]

105.) $$\int \sin^{2n}x \,.\, dx = -\cos x\Big[\frac{1}{2n}\sin^{2n-1}x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)}\sin^{2n-3}x + \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)(2n-4)}\sin^{2n-5}x + \cdots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\,.\,3}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4\,.\,2}\sin x\Big] + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\,.\,3\,.\,1}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4\,.\,2}x.$$
[§ 17, Gl. (46.)]

106.) $$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2}x}.$$
[§ 17, Gl. (48.)]

107.) $$\int \operatorname{tg}^m x\, dx = \frac{1}{m-1}\operatorname{tg}^{m-1}x - \int \operatorname{tg}^{m-2}x\, dx.$$ [§ 17, Gl. (57.)]

108.) $$\int \sin^m x\cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x\cos^n x\, dx.$$
[§ 17, Gl. (58.)]

109.) $$\int \frac{\cos^n x dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos^{n+1}x}{(m-1)\sin^{m-1}x} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n x dx}{\sin^{m-2}x}.$$
[§ 17, Gl. (59.)]

110.) $$\int \operatorname{ctg}^m x dx = -\frac{1}{m-1}\operatorname{ctg}^{m-1}x - \int \operatorname{ctg}^{m-2}x dx.$$
[§ 17, Gl. (63.)]

111.) $$\int \sin^m x\cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2}x\, dx.$$ [§ 17, Gl. (64.]

112.) $$\int \frac{\sin^m x\, dx}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m+1}x}{(n-1)\cos^{n-1}x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\sin^m x\, dx}{\cos^{n-2}x}.$$
[§ 17, Gl. (65.)]

113.) $$\int \mathfrak{Cos}^m x\,.\,dx = \frac{1}{m}\,\mathfrak{Cos}^{m-1}x\,\mathfrak{Sin}\,x + \frac{m-1}{m}\int \mathfrak{Cos}^{m-2}x\,.\,dx.$$
[§ 17, Gl. (66.)]

114.) $$\int \mathfrak{Sin}^m x\,.\,dx = \frac{1}{m}\,\mathfrak{Sin}^{m-1}x\,\mathfrak{Cos}\,x - \frac{m-1}{m}\int \mathfrak{Sin}^{m-2}x\,.\,dx.$$
[§ 17, Gl. (67.)]

115.) $$\int \mathfrak{Tg}^m x\,.\,dx = -\frac{1}{m-1}\,\mathfrak{Tg}^{m-1}x + \int \mathfrak{Tg}^{m-2}x\,.\,dx.$$
[§ 17, Gl. (68.)]

116.) $$\int \mathfrak{Ctg}^m x\,.\,dx = -\frac{1}{m-1}\,\mathfrak{Ctg}^{m-1}x + \int \mathfrak{Ctg}^{m-2}x\,.\,dx.$$
[§ 17, Gl. (69.)]

117.) $$\int e^{ax}\cos(bx)dx = e^{ax}\,.\,\frac{a\cos(bx)+b\sin(bx)}{a^2+b^2}.$$ [§ 17, Gl. (76.)]

118.) $$\int e^{ax}\sin(bx)dx = e^{ax}\,.\,\frac{a\sin(bx)-b\cos(bx)}{a^2+b^2}.$$ [§ 17, Gl. (77.)]

119.) $$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{(m-1)a^2}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$
[§ 18, Gl. (4.)]

120.) $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$
[§ 18, Gl. (7.) und (8.)]

121.) $$\int \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = c_n\,.\,a^{2n}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-x^2}\,.\,G_n(x),$$

wobei

$$c_n = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-3)(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n-2)(2n)},$$

$$G_n(x) = \frac{x^{2n-1}}{2n} + \frac{(2n-1)a^2x^{2n-3}}{(2n-2)2n} + \cdots + \frac{3\,.\,5\ldots(2n-1)a^{2n-2}x}{2\,.\,4\ldots(2n-2)2n}.$$
[§ 18, Gl. (14.), (16.) und (19.)]

122.) $$\int x^m dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{m+2}\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$
[§ 18, Gl. (24.)]

123.) $$\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$ [§ 18, Gl. (25.)]

124.) $\int x\,dx\sqrt{a^2-x^2} = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}$. [§ 18, Gl. (26.)]

125.) $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(n-1)a^2x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)a^2}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}}$.

[§ 18, Gl. (27.)]

126.) $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{(m-1)a^2}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

[§ 18, Gl. (34.)]

126 a.) $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{(m-1)a^2}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

[§ 18, Gl. (42.)]

127.) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right)$

$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right)$.

[§ 18, Gl. (37.) und (38.)]

127 a.) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$

$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right)$. [§ 18, Gl. (43.)]

128.) $\int x^m dx\sqrt{a^2+x^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{m+2}\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

[§ 18, Gl. (47.)]

128 a.) $\int x^m dx\sqrt{x^2-a^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{m+2}\int \frac{x^m dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

[§ 18, Gl. (50.)]

129.) $\int dx\sqrt{a^2+x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right)$

$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right)$. [§ 18, Gl. (48.)]

129 a.) $\int dx\sqrt{x^2-a^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$

$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right)$. [§ 18, Gl. (51.)]

130.) $\int x dx \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{1}{3}(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}$. [§ 18, Gl. (49.)]

130a.) $\int x dx \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{1}{3}(x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2}$. [§ 18, Gl. (52.)]

131.) $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{(n-1)a^2x^{n-1}} - \frac{n-2}{(n-1)a^2}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2 + x^2}}$. [§ 18, Gl. (54.)]

131a.) $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2 - a^2}} = +\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{(n-1)a^2x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)a^2}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{x^2 - a^2}}$. [§ 18, Gl. (57.)]

132.) Bilden die Koordinaten-Achsen den Winkel γ miteinander, so ist

$$F = \sin\gamma \int_a^b y dx$$

der Flächeninhalt der ebenen Figur A_1B_1BA, welche oben von der Kurve AB mit der Gleichung $y = f(x)$, unten von dem Abschnitte A_1B_1 auf der X-Achse und links und rechts von den Ordinaten A_1A und B_1B mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. [§ 20, Gl. (2.)]

133.) Der Flächeninhalt einer ebenen, von zwei Kurvenbögen

$$y' = f(x) \quad \text{und} \quad y'' = g(x)$$

und von den beiden Ordinaten mit den Gleichungen

$$x = a \quad \text{und} \quad x = b$$

begrenzten Figur ist für rechtwinklige Koordinaten

$$F = \int_a^b (y' - y'')dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$ [§ 21, Gl. (6.)]

134.) Der Flächeninhalt eines Sektors AOB, welcher von zwei beliebigen Radii vectores OA und OB und von einer Kurve mit der Gleichung $r = f(\varphi)$ begrenzt wird, ist

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\varphi.$$ [§ 22, Gl. (6.)]

135.) Ist die begrenzende Kurve durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

gegeben, so wird der Flächeninhalt des Sektors AOB

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{(\alpha)}^{(\beta)}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int\limits_{(\alpha)}^{(\beta)}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt.$$

[§ 23, Gl. (6.)]

136.) Das Volumen eines Rotationskörpers, welcher die X-Achse zur Rotations-Achse hat, ist

$$V = \pi\int\limits_{x_1}^{x_2} y^2 dx.$$

[§ 24, Gl. (10.)]

137.) Das Volumen eines Rotationskörpers, welcher die Y-Achse zur Rotations-Achse hat, ist

$$V = \pi\int\limits_{y_1}^{y_2} x^2 dy.$$

[§ 24, Gl. (11.)]

138.) Das Volumen eines Rotationskörpers, welcher die Gerade $x = a$ zur Rotations-Achse hat, ist

$$V = \pi\int\limits_{y_1}^{y_2}(x - a)^2 dy.$$

[§ 24, Gl. (12.)]

139.) Die Länge eines Kurvenbogens ist bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten

$$s = \int\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

[§ 26, Gl. (4a.), (6.) und (8.)]

140.) Die Länge eines Kurvenbogens ist bei Anwendung von Polarkoordinaten

$$s = \int\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} = \int\limits_{r_1}^{r_2} dr\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}.$$

[§ 28, Gl. (3.), (4.) und (7.)]

141.) Die Oberfläche eines Rotationskörpers, welcher die X-Achse zur Rotations-Achse hat, ist

$$O = 2\pi\int\limits_{x_1}^{x_2} y ds.$$

[§ 30, Gl. (4.)]

142.) Die Oberfläche eines Rotationskörpers, welcher die Y-Achse zur Rotations-Achse hat, ist

$$O = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x ds. \qquad \text{[§ 30, Gl. (5.)]}$$

143.) Die Länge des Bogens einer Raumkurve ist

$$s = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

[§ 32, Gl. (7.) und (8.)]

144.) $\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{K}{x-k} + \frac{L}{x-l},$

wenn in

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l)$$

die Wurzeln $a, b, c, \ldots k, l$ sämtlich voneinander verschieden sind, und wenn der Grad von $\varphi(x)$ niedriger ist als der von $f(x)$. Dabei ist

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \quad B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)}, \ldots K = \frac{\varphi(k)}{f'(k)}, \quad L = \frac{\varphi(l)}{f'(l)}.$$

Am einfachsten findet man die Zähler $A, B, C, \ldots K, L$ der Partialbrüche, indem man in der Gleichung

$$\varphi(x) = A\frac{f(x)}{x-a} + B\frac{f(x)}{x-b} + \cdots + K\frac{f(x)}{x-k} + L\frac{f(x)}{x-l}$$

der Reihe nach $x = a$, $x = b$, $x = c, \ldots x = k$, $x = l$ setzt.

Ist

$$b = g + hi, \quad c = g - hi,$$

und sind die Koeffizienten in $\varphi(x)$ und $f(x)$ sämtlich reell, so wird

$$\frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} = \frac{Px + Q}{(x-g)^2 + h^2}.$$

[§ 35, Gl. (3.), (4.), (12.), (15.), (16.), (18.), (18a.), (77.) und (80.)]

145.)
$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = &\frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a} \\ &+ \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{L_1}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_\lambda}{x-l},\end{aligned}$$

wenn in

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda$$

die Wurzeln $a, b, \ldots l$ sämtlich voneinander verschieden sind, und wenn der Grad von $\varphi(x)$ niedriger ist als der von $f(x)$. Ist

$$b = g + hi, \quad c = g - hi,$$

und sind die Koeffizienten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ sämtlich reell, so wird β gleich γ, und man kann setzen

$$\frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b}$$

$$+ \frac{C_1}{(x-c)^\beta} + \frac{C_2}{(x-c)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{C_\beta}{x-c} =$$

$$\frac{P_1 x + Q_1}{[(x-g)^2+h^2]^\beta} + \frac{P_2 x + Q_2}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-1}} + \cdots + \frac{P_\beta x + Q_\beta}{(x-g)^2+h^2}.$$

[§ 36, Gl. (1.), (11.) und (36.)]

146.) $$\int \frac{A dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}, \text{ wenn } n > 1.$$

[§ 37, Gl. (3.)]

147.) $$\int \frac{dx}{(x-g)^2 + h^2} = \frac{1}{h} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-g}{h}\right).$$ (Vergl. Formel Nr. 89 d. T.)

[§ 38, Gl. (4.) und (7.)]

148.) $$\int \frac{dx}{[(x-g)^2 + h^2]^n} = \frac{1}{h^{2n-1}} \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}, \text{ wobei } x - g = ht.$$

[§ 38, Gl. (8.)]

149.) $$\int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{(2n-2)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}.$$

[§ 38, Gl. (12.)]

150.) $$\int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int \cos^{2n-2} z dz,$$

wobei

$$\cos z = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin z = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin z \cos z = \frac{t}{1+t^2},$$

$$\operatorname{tg} z = t, \quad z = \operatorname{arctg} t.$$

[§ 38, Gl. (13.), (15.) und (16.)]

151.) $$\int \frac{(Px+Q)dx}{(x-g)^2+h^2} = \frac{P}{2} \ln[(x-g)^2 + h^2]$$

$$+ \frac{Pg+Q}{h} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-g}{h}\right).$$

[§ 39, Gl. (3.)]

$$O = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x ds. \qquad \text{[§ 30, Gl. (5.)]}$$

143.) Die Länge des Bogens einer Raumkurve ist

$$s = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

[§ 32, Gl. (7.) und (8.)]

144.) $\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{K}{x-k} + \frac{L}{x-l},$

wenn in

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l)$$

die Wurzeln $a, b, c, \ldots k, l$ sämtlich voneinander verschieden sind, und wenn der Grad von $\varphi(x)$ niedriger ist als der von $f(x)$. Dabei ist

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \; B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \; C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)}, \cdots K = \frac{\varphi(k)}{f'(k)}, \; L = \frac{\varphi(l)}{f'(l)}.$$

Am einfachsten findet man die Zähler $A, B, C, \ldots K, L$ der Partialbrüche, indem man in der Gleichung

$$\varphi(x) = A\frac{f(x)}{x-a} + B\frac{f(x)}{x-b} + \cdots + K\frac{f(x)}{x-k} + L\frac{f(x)}{x-l}$$

der Reihe nach $x = a, \; x = b, \; x = c, \ldots x = k, \; x = l$ setzt.

Ist

$$b = g + hi, \quad c = g - hi,$$

und sind die Koeffizienten in $\varphi(x)$ und $f(x)$ sämtlich reell, so wird

$$\frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} = \frac{Px + Q}{(x-g)^2 + h^2}.$$

[§ 35, Gl. (3.), (4.), (12.), (15.), (16.), (18.), (18a.), (77.) und (80.)]

145.)
$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = &\frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a} \\ &+ \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{L_1}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_\lambda}{x-l},\end{aligned}$$

wenn in

$$f(x) = (x - a)^{\alpha} (x - b)^{\beta} \ldots (x - l)^{\lambda}$$

die Wurzeln $a, b, \ldots l$ sämtlich voneinander verschieden sind, und wenn der Grad von $\varphi(x)$ niedriger ist als der von $f(x)$. Ist

$$b = g + hi, \quad c = g - hi,$$

und sind die Koeffizienten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ sämtlich reell, so wird β gleich γ, und man kann setzen

$$\frac{B_1}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta}}{x-b}$$

$$+ \frac{C_1}{(x-c)^{\beta}} + \frac{C_2}{(x-c)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{C_{\beta}}{x-c} =$$

$$\frac{P_1 x + Q_1}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta}} + \frac{P_2 x + Q_2}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-1}} + \cdots + \frac{P_{\beta} x + Q_{\beta}}{(x-g)^2+h^2}.$$

[§ 36, Gl. (1.), (11.) und (36.)]

146.) $$\int \frac{A dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}, \text{ wenn } n > 1.$$

[§ 37, Gl. (3.)]

147.) $$\int \frac{dx}{(x-g)^2 + h^2} = \frac{1}{h} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-g}{h}\right).$$ (Vergl. Formel Nr. 89 d. T.)

[§ 38, Gl. (4.) und (7.)]

148.) $$\int \frac{dx}{[(x-g)^2 + h^2]^n} = \frac{1}{h^{2n-1}} \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}, \text{ wobei } x - g = ht.$$

[§ 38, Gl. (8.)]

149.) $$\int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{(2n-2)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}.$$

[§ 38, Gl. (12.)]

150.) $$\int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int \cos^{2n-2} z dz,$$

wobei

$$\cos z = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin z = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin z \cos z = \frac{t}{1+t^2},$$

$$\operatorname{tg} z = t, \quad z = \operatorname{arc\,tg} t.$$

[§ 38, Gl. (13.), (15.) und (16.)]

151.) $$\int \frac{(Px + Q) dx}{(x-g)^2 + h^2} = \frac{P}{2} \ln[(x-g)^2 + h^2]$$

$$+ \frac{Pg + Q}{h} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-g}{h}\right).$$ [§ 39, Gl. (3.)]

152.) $$\int\frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}=-\frac{P}{(2n-2)[(x-g)^2+h^2]^{n-1}}+\frac{Pg+Q}{h^{2n-1}}\int\frac{dt}{(1+t^2)^n},$$

wobei

$$x-g=ht \quad \text{und} \quad n>1. \qquad \text{[§ 39, Gl. (7.)]}$$

153.) $$\int f(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}},\ldots)dx=\int f(t^{\varkappa}, t^{\frac{\varkappa m}{n}}, t^{\frac{\varkappa p}{q}}\ldots)\varkappa t^{\varkappa-1}dt,$$

wobei $\varkappa$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen n, $q,\ldots$ ist. [§ 42, Gl. (8.)]

154.) $$\int f\left[x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p}{q}},\ldots\right]dx=$$

$$\int f\left(-\frac{\delta y-\beta}{\gamma y-\alpha}, y^{\frac{m}{n}}, y^{\frac{p}{q}},\ldots\right)\cdot\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)dy}{(\gamma y-\alpha)^2}.$$

[§ 42, Gl. (11.)]

155.) $$\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx=$$

$$\int F\left(\frac{y\sqrt{A}-B}{A}, \sqrt{y^2\mp a^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{A}},$$

wobei

$$y=\frac{Ax+B}{\sqrt{A}}, \quad \sqrt{y^2\mp a^2}=\sqrt{Ax^2+2Bx+C}, \quad \pm a^2=\frac{B^2-AC}{A}.$$

[§ 44, Gl. (1.), (3.), (4.), (5.) und (6.)]

156.) $$\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$$

$$=-\int F\left(\frac{y\sqrt{-A}-B}{A}, \sqrt{\pm a^2-y^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{-A}},$$

wobei

$$y=\frac{Ax+B}{\sqrt{-A}}, \quad \sqrt{\pm a^2-y^2}=\sqrt{Ax^2+2Bx+C},$$

$$\pm a^2=\frac{AC-B^2}{A}=\frac{B^2-AC}{-A}.$$

[§ 44, Gl. (7.) bis (12.)]

157.) $$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left(\frac{Ax+B}{\sqrt{A}}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right)$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = -\frac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\left(\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\left(-\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}}\right).$$

[§ 45, Gl. (1a.) und (4a.)]

158.) $$\int dx\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = \frac{1}{2\sqrt{A}}\left[\frac{Ax+B}{\sqrt{A}}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right.$$
$$\left. + \frac{AC-B^2}{A}\ln\left(\frac{Ax+B}{\sqrt{A}} + \sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right)\right],$$

oder

$$\int dx\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = \frac{1}{2\sqrt{-A}}\left[-\frac{Ax+B}{\sqrt{-A}}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right.$$
$$\left. + \frac{B^2-AC}{-A}\arcsin\left(-\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}}\right)\right].$$

[§ 45, Gl. (9a.) und (13.)]

159.) $$\int f(x, \sqrt{x^2+c})dx = \int f\left(\frac{t^2-c}{2t}, \frac{t^2+c}{2t}\right)\cdot\frac{(t^2+c)dt}{2t^2},$$

wobei

$$t = x + \sqrt{x^2+c}.$$ [§ 46, Gl. (1.) und (5.)]

160.) $$\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx =$$

$$\int F\left(\frac{t^2-C}{2(t\sqrt{A}+B)}, \frac{t^2\sqrt{A}+2Bt+C\sqrt{A}}{2(t\sqrt{A}+B)}\right)\cdot\frac{(t^2\sqrt{A}+2Bt+C\sqrt{A})dt}{2(t\sqrt{A}+B)^2},$$

wobei

$$t = x\sqrt{A} + \sqrt{Ax^2+2Bx+C}.$$ [§ 46, Gl. (10.) und (11.)]

161.) $$\int f(x, \sqrt{a^2 \pm x^2})dx = \int f\left(\frac{2at}{t^2 \mp 1}, \frac{a(t^2 \pm 1)}{t^2 \mp 1}\right)\cdot\frac{-2a(t^2 \pm 1)dt}{(t^2 \mp 1)^2},$$

wobei

$$t = \frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}.$$ [§ 47, Gl. (1.) und (5.)]

162.) $$\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx =$$

$$\int F\left(\frac{2(t\sqrt{C}+B)}{t^2-A}, \frac{t^2\sqrt{C}+2Bt+A\sqrt{C}}{t^2-A}\right)\cdot\frac{-2(t^2\sqrt{C}+2Bt+A\sqrt{C})dt}{(t^2-A)^2},$$

wobei

$$t = \frac{1}{x}(\sqrt{C} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}).$$ [§ 47, Gl. (11.) und (12.)]

163.) $$\int F\left(x,\ \sqrt{(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)}\right)dx$$
$$= \int F\left(\frac{\beta t^2 - \delta}{\gamma - \alpha t^2},\ \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)t}{\gamma - \alpha t^2}\right)\frac{2(\beta\gamma - \alpha\delta)tdt}{(\gamma - \alpha t^2)^2},$$
wobei
$$t = \sqrt{\frac{\gamma x + \delta}{\alpha x + \beta}}.$$ [§ 48, Gl. (9.) und (10.)]

164.) $$\int_a^\infty F'(x)dx = \lim_{b=\infty}\int_a^b F'(x)dx = \lim_{b=\infty} F(b) - F(a).$$
[§ 51, Gl. (2.)]

165.) $$\int_{-\infty}^b F'(x)dx = \lim_{a=-\infty}\int_a^b F'(x)dx = F(b) - \lim_{a=-\infty} F(a).$$
[§ 51, Gl. (3.)]

166.) Ist $F'(b) = \pm\infty$, $F'(x)$ aber stetig für $a \leqq x < b$, so ist
$$\int_a^b F'(x)dx = \lim_{\beta=0}\int_a^{b-\beta} F'(x)dx = \lim_{\beta=0} F(b-\beta) - F(a).$$
[§ 52, Gl. (2.) und (3.)]

167.) Ist $F'(a) = \pm\infty$, $F'(x)$ aber stetig für $a < x \leqq b$, so ist
$$\int_a^b F'(x)dx = \lim_{\alpha=0}\int_{a+\alpha}^b F'(x)dx = F(b) - \lim_{\alpha=0} F(a+\alpha).$$
[§ 52, Gl. (4.) und (5.)]

168.) Ist $F'(a) = \pm\infty$, $F'(b) = \pm\infty$, $F'(x)$ aber stetig für $a < x < b$, so ist
$$\int_a^b F'(x)dx = \lim_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}\int_{a+\alpha}^{b-\beta} F'(x)dx = \lim_{\beta=0} F(b-\beta) - \lim_{\alpha=0} F(a+\alpha).$$
[§ 52, Gl. (6.) und (7.)]

169.) Ist $F'(c) = \pm\infty$, $F'(x)$ aber stetig für $a \leqq x < c$ und $c < x \leqq b$, so ist
$$\int_a^b F'(x)dx = \lim_{\gamma=0}\int_a^{c-\gamma} F'(x)dx + \lim_{\delta=0}\int_{c+\delta}^b F'(x)dx$$
$$= F(b) - F(a) + \lim_{\gamma=0} F(c-\gamma) - \lim_{\delta=0} F(c+\delta),$$
[§ 53, Gl. (1.)]

170.) Liegt die Funktion $f(x)$ für alle Werte von x innerhalb des Intervalles von a bis b der Größe nach beständig zwischen den Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, ist also

$$\varphi(x) \leqq f(x) \leqq \psi(x),$$

so ist

$$\int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b \psi(x)dx.$$

[§ 54, Gl. (3.) und (4.)]

171.) $\int_a^b g(x) . h(x)dx = g[a + \Theta(b - a)]\int_a^b h(x)dx,$

wenn $h(x)$ in dem Intervalle von a bis b das Vorzeichen nicht wechselt. [§ 55, Gl. (12.) und (12a.)]

171a.) $\int_0^x g(x) . h(x)dx = g(\Theta x)\int_0^x h(x)dx.$ [§ 55, Gl. (13.)]

172.) $\int_a^b f(x)dx = (b - a)f[a + \Theta(b - a)].$ [§ 55, Gl. (15a.)]

173.) Ist für alle Werte von x zwischen a und b

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

eine gleichmäßig konvergente Reihe, deren Glieder u_0, u_1, $u_2, \ldots$ in dem betrachteten Intervalle stetige Funktionen von x sind, so ist auch

$$\int_a^b u_0 dx + \int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \cdots$$

eine gleichmäßig konvergente Reihe, deren Summe gleich

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ist, wenn man $F'(x) = f(x)$ setzt. Dabei darf man noch die obere Grenze mit x bezeichnen. [§ 57, Gl. (4.) bis (7.)]

174.) $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} = \left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n^2 k^{2n}\right)\arcsin x$$
$$- \sqrt{1 - x^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n k^{2n} G_n(x),$$

wobei

$$c_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)},$$

$$G_n(x) = \frac{x^{2n-1}}{2n} + \frac{(2n-1)x^{2n-3}}{(2n)(2n-2)} + \cdots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.x}{(2n)(2n-2)\ldots 4.2}$$

$$= c_n\left(\frac{1}{c_{n-1}}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{1}{c_{n-2}}\cdot\frac{x^{2n-3}}{2n-3} + \cdots + \frac{1}{c_1}\frac{x^3}{3} + \frac{x}{1}\right).$$

[§ 58, Gl. (2.), (7.) und (8.)]

175.) $$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n^2 k^{2n}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \cdots\right].$$

[§ 58, Gl. (9.) und (10.)]

176.) $$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left(1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n^2 k^{2n}}{2n-1}\right)\arcsin x$$

$$+ \sqrt{1-x^2}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n k^{2n}}{2n-1} G_n(x).$$ [§ 58, Gl. (15.)]

177.) $$E = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n^2 k^{2n}}{2n-1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - c_1^2k^2 - \frac{1}{3}c_2^2k^4 - \frac{1}{5}c_3^2k^6 - \cdots\right).$$

[§ 58, Gl. (15a.)]

178.) $$F(k, \varphi) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}}$$

$$= a_0\varphi - \frac{a_1}{1}\sin(2\varphi) + \frac{a_2}{2}\sin(4\varphi) - \frac{a_3}{3}\sin(6\varphi) + - \cdots,$$

wobei

$$x = \sin\varphi,\ k = \sin\alpha = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2},\ \varepsilon = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k},$$

$$a_0 = (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n^2 . \varepsilon^{4n},\ a_1 = (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{n+1} . \varepsilon^{2+4n}, \ldots,$$

$$a_\nu = (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{n+\nu} . \varepsilon^{2\nu+4n},$$

oder, wenn man $\frac{2-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1+\varepsilon^4}{2\varepsilon^2}$ mit ζ bezeichnet,

$$(2n-1)a_n = 4(n-1)a_{n-1}\zeta - (2n-3)a_{n-2}.$$

[§ 59, Gl. (1.), (3.), (16.), (17.), (18.), (20.), (24.) und (28.)]

179.) $$E(k,\varphi) = \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^\varphi \sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi$$

$$= b_0\varphi + \frac{k^2}{2}[B_1\sin(2\varphi) - B_2\sin(4\varphi) + B_3\sin(6\varphi) - + \cdots],$$

wobei

$$2b_0 = (2-k^2)a_0 - k^2a_1,\ 4B_1 = a_0 - a_2,\ 16B_2 = a_1 - a_3,$$
$$36B_3 = a_2 - a_4, \ldots (2n)^2B_n = a_{n-1} - a_{n+1}.$$

[§ 59, Gl. (4.), (41.), (45.) und (47.)]

180.) $$K = F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}} = \frac{a_0\pi}{2}.$$ [§ 59, Gl. (48.)]

181.) $$E = E\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi} = \frac{b_0\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4}[(2-k^2)a_0 - k^2a_1].$$ [§ 59, Gl. (49.)]

182.) $$d\int_a^b f(x)dx = -f(a)da + f(b)db.$$ [§ 60, Gl. (3a.)]

183.) $$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx.$$ [§ 60, Gl. (8.)]

184.) $$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = -f(a,t)\cdot\frac{da}{dt} + f(b,t)\cdot\frac{db}{dt}$$

$$+ \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx.$$ [§ 60, Gl. (10.)]

185.) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\cdot\frac{1}{a^{2n-1}}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

[§ 61, Gl. (6a.)]

186.) $$\int_0^\infty e^{-tx}\,.\,x^n dx = \frac{n!}{t^{n+1}}.$$ [§ 61, Gl. (12.)]

187.) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x\,dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

[§ 62, Gl. (3.) und (5.)]

188.) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x\,dx$$

$$= \frac{2n(2n-2)\ldots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5 \cdot 3 \cdot 1}.$$ [§ 62, Gl. (19.) und (20.)]

189.) $$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}.$$

[Formel von *Wallis*, § 62, Gl. (33.)]

190.) In jeder trigonometrischen Reihe

$$f(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

welche in dem Intervalle von 0 bis 2π gleichmäßig konvergent ist, haben die Koeffizienten a_n und b_n die Werte

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

[§ 63, Gl. (22.)]

191.) Der Flächeninhalt einer ebenen Figur, welche oben (oder unten) begrenzt ist durch die Kurve $y = f(x)$, unten (oder oben) durch die X-Achse, links und rechts durch die Ordinaten $x = a$ und $x = b$, ist *näherungsweise*

$$F = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 2f(b-h) + f(b)],$$

wobei

$$nh = b - a,\ y_0 = f(a),\ y_1 = f(a+h), \ldots y_{n-1} = f(b-h),$$
$$y_n = f(b)$$

ist. [§ 66, Gl. (4.) und (6.)]

192.) Der Flächeninhalt der in Formel Nr. 191 beschriebenen Figur ist *näherungsweise*

$$F = \int_a^b f(x)dx = 2h[f(a+h) + f(a+3h) + \cdots + f(b-h)]$$
$$= 2h(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{2n-1}),$$
wobei aber
$$2nh = b - a, \quad y_1 = f(a+h), \quad y_3 = f(a+3h), \quad \ldots y_{2n-1} = f(b-h)$$
ist. [§ 66, Gl. (11.)]

193.) Der Flächeninhalt der in Formel Nr. 191 beschriebenen Figur ist *näherungsweise*

$$F = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h)$$
$$+ 2f(a+4h) + \cdots + 2f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)]$$
$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}),$$
wobei
$$2nh = b - a, \; y_0 = f(a), \; y_1 = f(a+h), \; y_2 = f(a+2h), \ldots$$
$$y_3 = f(a+3h), \ldots y_{2n-1} = f(b-h), \; y_{2n} = f(b)$$
ist. (*Simpson*sche Regel.) [§ 67, Gl. (10.) und (11.)]

194.) Der Flächeninhalt der in Formel Nr. 191 beschriebenen Figur ist *näherungsweise*

$$F = \int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{45}[(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4)$$
$$+ (7y_4 + 32y_5 + 12y_6 + 32y_7 + 7y_8)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (7y_{4n-4} + 32y_{4n-3} + 12y_{4n-2} + 32y_{4n-1} + 7y_{4n})],$$
wobei
$$4nh = b - a, \; y_0 = f(a), \; y_1 = f(a+h), \; y_2 = f(a+2h),$$
$$y_3 = f(a+3h), \ldots y_{4n-1} = f(b-h), \; y_{4n} = f(b)$$
ist. [§ 67, Gl. (23.)]

195.) Der Flächeninhalt der in Formel Nr. 191 beschriebenen Figur ist *näherungsweise*

$$F = \int_a^b f(x)dx = h\Big[f\Big(a + \frac{3 - \sqrt{3}}{3}h\Big) + f\Big(a + \frac{3 + \sqrt{3}}{3}h\Big)$$
$$+ f\Big(a + \frac{9 - \sqrt{3}}{3}h\Big) + f\Big(a + \frac{9 + \sqrt{3}}{3}h\Big)$$
$$+ f\Big(a + \frac{15 - \sqrt{3}}{3}h\Big) + f\Big(a + \frac{15 + \sqrt{3}}{3}h\Big)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ f\Big(b - \frac{3 + \sqrt{3}}{3}h\Big) + f\Big(b - \frac{3 - \sqrt{3}}{3}h\Big)\Big],$$

wobei

$$2nh = b - a.$$ [§ 69, Gl. (15.)]

196.) Der Flächeninhalt der in Formel Nr. 191 beschriebenen Figur ist *näherungsweise*

$$F = hc_1[(y_{1,1} + y_{1,2}) + (y_{2,1} + y_{2,2}) + \cdots + (y_{n,1} + y_{n,2})]$$
$$+ hc_2[y_{1,3} + y_{1,4}) + (y_{2,3} + y_{2,4}) + \cdots + (y_{n,3} + y_{n,4})],$$

wobei

$$y_{m,1} = f[a + (4m - 2 - \alpha)h],$$
$$y_{m,2} = f[a + (4m - 2 + \alpha)h],$$
$$y_{m,3} = f[a + (4m - 2 - \beta)h],$$
$$y_{m,4} = f[a + (4m - 2 + \beta)h],$$
$$\alpha^2 = \frac{4}{7}(3 - 0{,}4\sqrt{30}),\quad \beta^2 = \frac{4}{7}(3 + 0{,}4\sqrt{30}),$$
$$c_1 = \frac{2(3\beta^2 - 4)}{3(\beta^2 - \alpha^2)} = 1 + \frac{1}{18}\sqrt{30},$$
$$c_2 = \frac{2(3\alpha^2 - 4)}{3(\alpha^2 - \beta^2)} = 1 - \frac{1}{18}\sqrt{30},$$
$$4nh = b - a.$$ [§ 69, Gl. (30.) bis (35.)]

197.) Das Volumen eines Körpers ist

$$V = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx,$$

wobei $F(x)$ der Flächeninhalt eines Schnittes, senkrecht zur X-Achse, im Abstande x von der YZ-Ebene ist.

[§ 71, Gl. (9.)]

198.) Ist der Körper oben begrenzt durch die Fläche

$$z' = g(x, y),$$

unten durch die Fläche

$$z'' = h(x, y),$$

vorn und rückwärts durch die Zylinder

$$y_1 = \varphi(x), \quad y_2 = \psi(x),$$

links und rechts durch die Ebenen

$$x = x_1, \quad x = x_2,$$

so ist das Volumen

$$V = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} (z' - z'')dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy,$$

wobei

$$f(x, y) = z' - z'' = g(x, y) - h(x, y)$$

ist. [§ 73, Gl. (6.) und (10.)]

199.) Es ist $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx,$

wenn die Integrationsgrenzen a und b, c und d konstant sind. [§ 74, Gl. (15.)]

200.) $$\int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dxdy = \pm \int_\alpha^\beta \int_{g(u)}^{h(u)} f(x, y) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) dudv,$$

wobei

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v)$$

ist. [§ 75, Gl. (2.) und (14.)]

201.) $$\int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(r\cos\varphi, \quad r\sin\varphi) \,.\, rd\varphi dr.$$

[§ 75, Gl. (19.)]

202.) $$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$ [§ 75, Gl. (38.)]

203.) Der Flächeninhalt einer krummen Oberfläche ist

$$O = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{dy}{F_3}\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

[§ 76, Gl. (13.)]

204.) Der Flächeninhalt einer krummen Oberfläche ist

$$O = \iint dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \pm \iint du dv \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

wobei

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v),$$

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$B = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$C = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

[§ 78, Gl. (4.), (8.) und (11.)]

205.) Führt man räumliche Polarkoordinaten durch die Gleichungen

$$x = r\cos\lambda\cos\varphi, \quad y = r\cos\lambda\sin\varphi, \quad z = r\sin\lambda$$

ein, so wird

$$O = \iint r \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2\right]\cos^2\lambda + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2} d\lambda d\varphi.$$

[§ 79, Gl. (1.) und (5.)]

206.) $$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

ist ein vollständiges Differential, wenn

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

ist. Man erhält dann

$$u = v + \int\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + C, \quad \text{wobei} \quad v = \int M(x, y)dx.$$

[§ 80, Gl. (2a.), (4a.), (15.) und (16.)]

207.) $$du = F(x, y, z)dx + G(x, y, z)dy + H(x, y, z)dz$$

ist ein vollständiges Differential, wenn

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y}$$

ist. Man erhält dann

$$u = v + w + \int\left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz + C,$$

wobei

$$v = \int F dx, \quad w = \int\left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy.$$

[§ 82, Gl. (2a.), (4a.), (8.), (17.), (22.) und (23.)]

208.) Die Differential-Gleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

kann integriert werden durch die Reihe

$$y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots$$

wobei $f(a) = b$ eine ganz beliebige Größe ist. Die Koeffizienten findet man für $x = a$ aus den Gleichungen

$$f'(x) = \varphi(x, y),$$

$$f''(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \varphi'(x, y),$$

$$f'''(x) = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi'}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \varphi''(x, y),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

es wird also

$$f'(a) = \varphi(a, b), \quad f''(a) = \varphi'(a, b), \quad f'''(a) = \varphi''(a, b), \ldots.$$

[§ 85, Gl. (17.) bis (22.)]

209.) Die simultanen Differential-Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z)$$

können integriert werden durch die Reihen

$$y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots,$$

$$z = g(x) = g(a) + \frac{g'(a)}{1!}(x - a) + \frac{g''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots,$$

wobei $f(a) = b$ und $g(a) = c$ ganz beliebige Größen sind. Die Koeffizienten findet man für $x = a$, $y = b$, $z = c$ aus den Gleichungen

$$f'(x) = \varphi(x, y, z),$$

$$f''(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \varphi'(x, y, z),$$

$$f'''(x) = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi'}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi'}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \varphi''(x, y, z),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g'(x) = \psi(x, y, z),$$

$$g''(x) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \psi'(x, y, z),$$

$$g'''(x) = \frac{\partial \psi'}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \psi'}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \psi''(x, y, z),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

es wird also

$$f'(a) = \varphi(a, b, c), \; f''(a) = \varphi'(a, b, c), \; f'''(a) = \varphi''(a, b, c), \ldots$$

$$g'(a) = \psi(a, b, c), \; g''(a) = \psi'(a, b, c), \; g'''(a) = \psi''(a, b, c), \ldots$$

[§ 86, Gl. (1.), (7.) bis (16.)]

210.) Die m simultanen Differential-Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{dy_1}{dx} = \varphi_1(x;\; y_1, y_2, \ldots y_m),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \varphi_2(x;\; y_1, y_2, \ldots y_m),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_m}{dx} = \varphi_m(x;\; y_1, y_2, \ldots y_m)$$

können integriert werden durch die Reihen

$$y_\alpha = f_\alpha(x) = f_\alpha(a) + \frac{f_\alpha'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f_\alpha''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots,$$

wo $\alpha = 1, 2, \ldots m$ zu setzen ist, und wo

$$f_1(a) = b_1, \quad f_2(a) = b_2, \quad \ldots f_m(a) = b_m$$

noch ganz beliebige Größen sind. Dabei ist

$$f_\alpha'(x) = \varphi_\alpha(x;\; y_1, y_2, \ldots y_m),$$

$$f_\alpha''(x) = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_m}\frac{dy_m}{dx},$$

$$= \varphi_\alpha'(x;\; y_1, y_2, \ldots y_m),$$

$$f_\alpha'''(x) = \frac{\partial \varphi_\alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_\alpha'}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial \varphi_\alpha'}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial \varphi_\alpha'}{\partial y_m}\frac{dy_m}{dx}$$

$$= \varphi_\alpha''(x;\; y_1, y_2, \ldots y_m),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

also

$$f_\alpha'(a) = \varphi_\alpha(a;\ b_1,\ b_2, \ldots b_m),$$
$$f_\alpha''(a) = \varphi_\alpha'(a;\ b_1,\ b_2, \ldots b_m),$$
$$f_\alpha'''(a) = \varphi_\alpha''(a;\ b_1,\ b_2, \ldots b_m),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

[§ 86, Gl. (23.) bis (29.)]

211.) Die Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)$$

kann integriert werden durch die Reihe

$$y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots,$$

wobei

$$f(a) = b,\quad f'(a) = b_1, \ldots f^{(m-1)}(a) = b_{m-1}$$

ganz beliebige Größen sind. Die höheren Ableitungen findet man aus den Gleichungen

$$f^{(m)}(a) = \varphi(a;\ b,\ b_1, \ldots b_{m-1}),$$
$$f^{(m+1)}(a) = \varphi'(a;\ b,\ b_1, \ldots b_{m-1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

[§ 87, Gl. (2.) bis (7.)]

212.) Ist $M(x, y) = X_1 Y_1$, $N(x, y) = X_2 Y_2$, wo X_1 und X_2 Funktionen der einzigen Veränderlichen x, Y_1 und Y_2 Funktionen der einzigen Veränderlichen y sind, so kann die Differential-Gleichung erster Ordnung

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

durch *Trennung der Variabeln* auf die Form

$$\frac{X_1}{X_2}dx + \frac{Y_2}{Y_1}dy = 0$$

gebracht und ohne weiteres integriert werden.

[§ 89, Gl. (2a.) bis (7.)]

213.) Sind $M(x, y)$ und $N(x, y)$ homogene Funktionen m^{ten} Grades, so führt die Substitution $y = xz$, oder $x = yz$ in der Differential-Gleichung

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

zur Trennung der Variabeln. [§ 90, Gl. (1.) bis (9.)]

$$c_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)},$$

$$G_n(x) = \frac{x^{2n-1}}{2n} + \frac{(2n-1)x^{2n-3}}{(2n)(2n-2)} + \cdots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots3.x}{(2n)(2n-2)\ldots4.2}$$

$$= c_n\left(\frac{1}{c_{n-1}}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{1}{c_{n-2}}\cdot\frac{x^{2n-3}}{2n-3} + \cdots + \frac{1}{c_1}\frac{x^3}{3} + \frac{x}{1}\right).$$

[§ 58, Gl. (2.), (7.) und (8.)]

175.) $$K = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n^2 k^{2n}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \cdots\right].$$

[§ 58, Gl. (9.) und (10.)]

176.) $$\int\limits_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left(1 - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{c_n^2 k^{2n}}{2n-1}\right)\arcsin x$$

$$+ \sqrt{1-x^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{c_n k^{2n}}{2n-1}G_n(x).$$ [§ 58, Gl. (15.)]

177.) $$E = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{c_n^2 k^{2n}}{2n-1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - c_1^2k^2 - \frac{1}{3}c_2^2k^4 - \frac{1}{5}c_3^2k^6 - \cdots\right).$$

[§ 58, Gl. (15a.)]

178.) $$F(k, \varphi) = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}}$$

$$= a_0\varphi - \frac{a_1}{1}\sin(2\varphi) + \frac{a_2}{2}\sin(4\varphi) - \frac{a_3}{3}\sin(6\varphi) + - \cdots,$$

wobei

$$x = \sin\varphi,\ k = \sin\alpha = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2},\ \varepsilon = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k},$$

$$a_0 = (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n^2 . \varepsilon^{4n},\ a_1 = (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{n+1} . \varepsilon^{2+4n}, \ldots,$$

$$a_\nu = (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{n+\nu} . \varepsilon^{2\nu+4n},$$

oder, wenn man $\frac{2-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1+\varepsilon^4}{2\varepsilon^2}$ mit ζ bezeichnet,

$$(2n-1)a_n = 4(n-1)a_{n-1}\zeta - (2n-3)a_{n-2}.$$

[§ 59, Gl. (1.), (3.), (16.), (17.), (18.), (20.), (24.) und (28.)]

179.) $$E(k,\varphi) = \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^\varphi \sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi$$

$$= b_0\varphi + \frac{k^2}{2}[B_1\sin(2\varphi) - B_2\sin(4\varphi) + B_3\sin(6\varphi) - + \cdots],$$

wobei

$$2b_0 = (2-k^2)a_0 - k^2a_1,\ 4B_1 = a_0 - a_2,\ 16B_2 = a_1 - a_3,$$
$$36B_3 = a_2 - a_4, \ldots (2n)^2B_n = a_{n-1} - a_{n+1}.$$

[§ 59, Gl. (4.), (41.), (45.) und (47.)]

180.) $$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}} = \frac{a_0\pi}{2}.$$ [§ 59, Gl. (48.)]

181.) $$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi} = \frac{b_0\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4}[(2-k^2)a_0 - k^2a_1].$$ [§ 59, Gl. (49.)]

182.) $$d\int_a^b f(x)dx = -f(a)da + f(b)db.$$ [§ 60, Gl. (3a.)]

183.) $$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx.$$ [§ 60, Gl. (8.)]

184.) $$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = -f(a,t)\cdot\frac{da}{dt} + f(b,t)\cdot\frac{db}{dt}$$

$$+\int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx.$$ [§ 60, Gl. (10.)]

185.) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\cdot\frac{1}{a^{2n-1}}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

[§ 61, Gl. (6a.)]

186.) $$\int_0^\infty e^{-tx}\,.\,x^n dx = \frac{n!}{t^{n+1}}.$$ [§ 61, Gl. (12.)]

$$x = \varphi(p)$$

durch Ermittelung von

$$y = \int \varphi'(p) \, . \, p dp + C$$

ausgeführt. [§ 98, Gl. (2.) und (5.)]

223.) Die Integration der Differential-Gleichung

$$y = \varphi(p)$$

wird durch die Ermittelung von

$$x = \int \frac{\varphi'(p) dp}{p} + C$$

ausgeführt. [§ 98, Gl. (15.) und (18.)]

224.) Die Integration der Differential-Gleichung

$$x = f(y, p)$$

wird auf die Integration der Differential-Gleichung

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dy - \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0$$

zurückgeführt. [§ 98, Gl. (29.) und (30.)]

225.) Die Integration der Differential-Gleichung

$$y = f(x, p)$$

wird auf die Integration der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial p} dp + \left(\frac{\partial f}{\partial x} - p\right) dx = 0$$

zurückgeführt. [§ 98, Gl. (40.) und (41.)]

225a.) So kann man z. B. die Differential-Gleichung

$$y = x \, . \, f(p) + \varphi(p)$$

auf die Integration der *linearen Differential-Gleichung erster Ordnung*

$$[p - f(p)] \frac{dx}{dp} - x \, . \, f'(p) = \varphi'(p)$$

zurückführen. [§ 98, Gl. (43.) und (45.)]

226.) Aus der *allgemeinen* Lösung

$$G(x, y, C) = 0$$

einer Differential-Gleichung findet man die *singuläre* Lösung

$$S(x, y) = 0$$

durch Elimination von C aus den beiden Gleichungen

$$G(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = 0,$$

wobei allerdings die Diskriminante $D(x, y)$ der Gleichungen

$$G(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

mitunter außer $S(x, y)$ noch andere Faktoren $H(x, y)$ enthalten kann. [§ 99, Gl. (3.) und (6.)]

227.) Die Differential-Gleichung der *isogonalen* Trajektorien, welche die sämtlichen Kurven der Kurvenschar

$$F(x, y, u) = 0$$

unter dem konstanten Winkel ϑ schneiden, findet man durch Elimination von u aus den Gleichungen

$$F(x, y, u) = 0$$

und

$$(F_1 \cos\vartheta - F_2 \sin\vartheta)dx + (F_1 \sin\vartheta + F_2 \cos\vartheta)dy = 0.$$

[§ 102, Gl. (1.) und (8.)]

228.) Die Differential-Gleichung der *orthogonalen* Trajektorien, welche die sämtlichen Kurven der Kurvenschar

$$F(x, y, u) = 0$$

unter rechtem Winkel schneiden, findet man durch Elimination von u aus den Gleichungen

$$F(x, y, u) = 0 \quad \text{und} \quad -F_2 dx + F_1 dy = 0.$$

[§ 102, Gl. (1.) und (11.)]

229.) Die orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar

$$F(x, y, u) = f(x) + g(y) - u = 0$$

genügen der Differential-Gleichung

$$\frac{dx}{f'(x)} = \frac{dy}{g'(y)}.$$ [§ 103, Gl. (55.) und (57.)]

230.) Die orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar

$$f(x) \,.\, g(y) = u$$

genügen der Differential-Gleichung

$$\frac{f(x)dx}{f'(x)} = \frac{g(y)dy}{g'(y)}.$$ [§ 103, Gl. (67.) und (70.)]

231.) Die orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar

$$F(r, \varphi, u) = 0$$

genügen einer Differential-Gleichung, die man durch Elimination von u aus den Gleichungen

$$F(r, \varphi, u) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial F}{\partial r} \cdot r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dr} = 0$$

findet. [§ 103, Gl. (75.) und (83.)]

232.) Die orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar

$$F(r, \varphi, u) = f(r) + g(\varphi) - u = 0,$$

genügen der Differential-Gleichung

$$\frac{dr}{r^2 \cdot f'(r)} = \frac{d\varphi}{g'(\varphi)} \cdot$$ [§ 103. Gl. (101.) und (103a.)]

233.) Die orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar

$$f(r) \cdot g(\varphi) = u$$

genügen der Differential-Gleichung

$$\frac{f(r)dr}{r^2 \cdot f'(r)} = \frac{g(\varphi)d\varphi}{g'(\varphi)}.$$

[§ 103, Gl. (104.) und (105a.)]

234.) Die Differential-Gleichung für die Evolventen der Kurve

$$y = f(x)$$

findet man, indem man den Parameter u aus den Gleichungen

$$y - f(u) - f'(u)(x - u) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f'(u)}$$

eliminiert. [§ 104, Gl. (2a.) und (4.)]

235.) Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi(x)$$

kann auf die Form

$$y = \frac{1}{(m-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-z)^{m-1}\varphi(z)dz + \frac{C_1 x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{C_2 x^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + \frac{C_{m-1}x}{1!} + C_m$$

gebracht werden. [§ 107, Gl. (1.) und (33.)]

236.) Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{f}\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad \text{oder} \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{f}(\mathfrak{p})$$

findet man durch Elimination von p aus den Gleichungen

$$x = \int \frac{dp}{f(p)} + C_1 \quad \text{und} \quad y = \int \frac{pdp}{f(p)} + C_2.$$

[§ 108, Gl. (1.), (3.) und (5.)]

237.) Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \quad \text{oder} \quad p = \varphi(q)$$

findet man durch Elimination von q aus den Gleichungen

$$x = \int \frac{\varphi'(q)dq}{q} + C_1 \quad \text{und} \quad y = \int \frac{\varphi(q)\varphi'(q)dq}{q} + C_2.$$

[§ 108, Gl. (22.) und (25.)]

238.) Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

ist

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 + 2\int f(y)dy}} + C_2.$$

[§ 109, Gl. (1.) und (7.)]

239.) Die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{a^2}$$

hat die Lösung

$$y = A \,.\, e^{\frac{x}{a}} + B \,.\, e^{-\frac{x}{a}}.$$

[§ 109, Gl. (8.) und (16.)]

240.) Die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{a^2}$$

hat die Lösung

$$y = A \sin\left(\frac{x}{a}\right) + B \cos\left(\frac{x}{a}\right).$$

[§ 109, Gl. (19.) und (26.)]

241.) Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(u), \quad \text{wo} \quad u = \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}},$$

findet man, indem man die Gleichung

$$x = \pm \int \frac{du}{\sqrt{C_1 + 2\int f(u)du}} + C_2$$

nach u auflöst und das in Formel Nr. 235 angegebene Verfahren anwendet. [§ 109, Gl. (29.), (33.) und (34.)]

242.) Die Differential-Gleichung

$$F\left(x, \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$$

reduziert sich auf die Form

$$F\left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m-n}u}{dx^{m-n}}\right) = 0,$$

wenn man $\frac{d^n y}{dx^n}$ mit u bezeichnet. [§ 110, Gl. (1.) bis (3.)]

243.) Die Ordnung der Differential-Gleichung

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$$

wird um eine Einheit erniedrigt, wenn man $\frac{dy}{dx} = p$ setzt und y zur unabhängigen Veränderlichen macht.
[§ 110, Gl. (16.) bis (19.)]

244.) Die Ordnung der Differential-Gleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$$

wird um eine Einheit erniedrigt, wenn die Gleichung in bezug auf die Größen $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}$ homogen ist, indem man durch die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = yu$$

u als abhängige Veränderliche einführt.
[§ 110. Gl. (81.) bis (86.)]

245.) Das allgemeine Integral der homogenen linearen Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1 \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + f_2 \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + f_{m-1}\frac{dy}{dx} + f_m y = 0,$$

in welcher die Koeffizienten $f_1, f_2, \ldots f_m$ konstante Größen sind, ist

$$y = C_1 . e^{r_1 x} + C_2 . e^{r_2 x} + \cdots + C_m . e^{r_m x},$$

wobei $r_1, r_2, \ldots r_m$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$F(u) = u^m + f_1 u^{m-1} + f_2 u^{m-2} + \cdots + f_{m-1} u + f_m = 0$$

sind, vorausgesetzt, daß $r_1, r_2, \ldots r_m$ sämtlich voneinander verschieden sind. [§ 112, Gl. (1.), (15.) und (17.)]

246.) Ist

$$r_1 = a + bi, \quad r_2 = a - bi,$$

so kann man $C_1 . e^{r_1 x} + C_2 . e^{r_2 x}$ ersetzen durch

$$e^{ax}[A\cos(bx) + B\sin(bx)].$$

[§ 112, Gl. (29.) bis (31.)]

247.) Sind unter den Wurzeln $r_1, r_2, \ldots r_m$ der charakteristischen Gleichung $F(u) = 0$ gleiche vorhanden, ist z. B.

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_\alpha,$$

so gibt Formel Nr. 245 nicht mehr das allgemeine Integral; dieses hat in diesem Falle vielmehr die Form

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_\alpha x^{\alpha-1}) e^{r_1 x} + C_{\alpha+1} . e^{r_{\alpha+1} x} + \\ \cdots + C_m . e^{r_m x}.$$

[§ 112, Gl. (47.), (54.) und (64.)]

248.) Das allgemeine Integral der nicht homogenen linearen Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1} \frac{dy}{dx} + f_m y = \varphi(x)$$

ist, wenn die Wurzeln $r_1, r_2, \ldots r_m$ der charakteristischen Gleichung $F(u) = 0$ sämtlich voneinander verschieden sind,

$$y = \frac{e^{r_1 x}}{F'(r_1)}\left[C_1 + \int_0^x \varphi(t) . e^{-r_1 t} dt\right] + \frac{e^{r_2 x}}{F'(r_2)}\left[C_2 + \int_0^x \varphi(t) . e^{-r_2 t} dt\right]$$

$$+ \cdots + \frac{e^{r_m x}}{F'(r_m)}\left[C_m + \int_0^x \varphi(t) . e^{-r_m t} dt\right].$$ [§ 113, Gl. (1.) und (23.)]

249.) Ist y_1 ein partikuläres Integral der homogenen Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x) \cdot y = 0,$$

so läßt sich die *nicht* homogene Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x) \cdot y = \varphi(x),$$

durch die Substitution

$$y = y_1\left(\int u dx + A\right), \quad \text{oder} \quad u = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)$$

auf eine nicht homogene Differential-Gleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von der Form

$$y_1 \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + g_1(x)\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots + g_{m-1}(x) \cdot u = \varphi(x)$$

zurückführen. [§ 114, Gl. (1.) bis (8.)]

250.) Sind n partikuläre Integrale $y_1, y_2, \ldots y_n$ der homogenen Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x) \cdot y = 0$$

bekannt, so läßt sich die *nicht* homogene Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x) \cdot y = \varphi(x)$$

auf eine andere nicht homogene Differential-Gleichung $(m-n)^{\text{ter}}$ Ordnung von der Form

$$L_0(x)\frac{d^{m-n}v}{dx^{m-n}} + L_1(x)\frac{d^{m-n-1}v}{dx^{m-n-1}} + \cdots + L_{m-n}(x) \cdot v = \varphi(x)$$

zurückführen, wobei

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

und

$$C_1 = \int v dx + A_1, \quad C_2 = \int \varphi_1(x) \cdot v dx + A_2, \ldots$$

$$C_n = \int \varphi_{n-1}(x) \cdot v dx + A_n.$$

Die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_{n-1}(x)$ sind durch die Gleichungen

$$y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}+\cdots+y_n\frac{dC_n}{dx}=0,$$

$$\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx}+\cdots+\frac{dy_n}{dx}\frac{dC_n}{dx}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\frac{dC_2}{dx}+\cdots+\frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\frac{dC_n}{dx}=0,$$

oder

$$\frac{dC_2}{dx}=\varphi_1(x)\cdot\frac{dC_1}{dx},\quad\frac{dC_3}{dx}=\varphi_2(x)\cdot\frac{dC_1}{dx},\ldots\frac{dC_n}{dx}=\varphi_{n-1}(x)\cdot\frac{dC_1}{dx}$$

erklärt. [§ 114, Gl. (17.) bis (31.)]

251.) Sind in der Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung

$$(ax+b)^m\frac{d^my}{dx^m}+(ax+b)^{m-1}f_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+(ax+b)^{m-2}f_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}$$
$$+\cdots+(ax+b)f_{m-1}\frac{dy}{dx}+f_my=0$$

die Koeffizienten $f_1, f_2, \ldots f_m$ konstant, so hat das allgemeine Integral die Form

$$y=C_1(ax+b)^{r_1}+C_2(ax+b)^{r_2}+\cdots+C_m(ax+b)^{r_m},$$

wobei $r_1, r_2, \ldots r_m$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$a^mr(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)+a^{m-1}r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+2)f_1$$
$$+\cdots+a^2r(r-1)f_{m-2}+arf_{m-1}+f_m=0$$

sind, und wobei $C_1, C_2, \ldots C_m$ noch beliebige Konstante sind. [§ 115, Gl. (1.) bis (6.)]

252.) Sind

$$r_1=\alpha+\beta i \quad\text{und}\quad r_2=\alpha-\beta i$$

zwei konjugiert komplexe Wurzeln der charakteristischen Gleichung, so wird

$$C_1(ax+b)^{r_1}+C_2(ax+b)^{r_2}=(ax+b)^\alpha[A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t)],$$

wobei man

$$\ln(ax+b)=t$$

gesetzt und mit A und B zwei beliebige Konstante bezeichnet hat. [§ 115, Gl. (12.) und (13.)]

253.) Sind in der charakteristischen Gleichung die Wurzeln r_1 und r_2 einander gleich, so hat man in dem allgemeinen Integral für die in Formel Nr. 251 gelöste Differential-Gleichung

$C_1(ax+b)^{r_1} + C_2(ax+b)^{r_2}$ mit $(ax+b)^{r_1}[A_1 + A_2\ln(ax+b)]$ zu vertauschen.

Sind in der charakteristischen Gleichung drei Wurzeln r_1, r_2, r_3 einander gleich, so hat man in dem allgemeinen Integral

$$C_1(ax+b)^{r_1} + C_2(ax+b)^{r_2} + C_3(ax+b)^{r_3}$$

mit

$$(ax+b)^{r_1}\left[A_1 + A_2\ln(ax+b) + A_3\{\ln(ax+b)\}^2\right]$$

zu vertauschen. Usw. [§ 115, Gl. (25.) und (36.)]

254.) Das allgemeine Integral der beiden linearen simultanen Differential-Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{dx}{dt} + f_1x + g_1y = h_1, \quad \frac{dy}{dt} + f_2x + g_2y = h_2,$$

bei denen f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2 noch beliebige Funktionen von t sind, findet man, indem man die zweite Gleichung mit v multipliziert, von der ersten abzieht und für die noch willkürliche Funktion v zwei partikuläre Integrale v_1 und v_2 der Differential-Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = f_2v^2 - (f_1 - g_2)v - g_1$$

in die Gleichungen

$$w_1 = x - v_1y, \quad w_2 = x - v_2y$$

einsetzt. Die Funktionen w_1 und w_2 sind dann die allgemeinen Integrale der linearen Differential-Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{dw_1}{dt} + (f_1 - v_1f_2)w_1 = h_1 - v_1h_2,$$

$$\frac{dw_2}{dt} + (f_1 - v_2f_2)w_2 = h_1 - v_2h_2.$$

[§ 117, Gl. (1.) bis (10.)]

255.) Zur Integration der Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y),$$

bei der $y = y_0$ für $x = x_0$ werden soll, setze man für hinreichend kleine Werte von $x - x_0 = h$

$$y' = y_0 + \varphi(x_0, y_0) . h, \quad y'' = y_0 + \varphi(x. y') . h;$$

dann wird

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left[\varphi(x_0, y_0) + 4\varphi\left(\frac{x_0 + x}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}\right) + \varphi(x, y'')\right]$$

der zu x zugeordnete Näherungswert von y.

[§ 118, Gl. 1.), (14.), (17.) und (24.)]

256.) Zur Integration der simultanen Differential-Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z),$$

bei denen $y = y_0$ und $z = z_0$ werden soll für $x = x_0$, setze man für hinreichend kleine Werte von $x - x_0 = h$

$$y' = y_0 + \varphi(x_0, y_0, z_0) . h, \qquad z' = z_0 + \psi(x_0, y_0, z_0) . h,$$

$$y'' = y_0 + \varphi(x, y', z') . h, \qquad z'' = z_0 + \psi(x, y', z') . h;$$

dann werden

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left[\varphi(x_0, y_0, z_0) + 4\varphi\left(\frac{x_0 + x}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}, \frac{z_0 + z'}{2}\right) + \varphi(x, y'', z'')\right]$$

und

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{6}\left[\psi(x_0, y_0, z_0) + 4\psi\left(\frac{x_0 + x}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}, \frac{z_0 + z'}{2}\right) + \psi(x, y'', z'')\right]$$

die zu x zugeordneten Näherungswerte von y und z.

[§ 120, Gl. (1.), (12.), (13.), (18.), (19.), (27.) und (28.)]

Alphabetisches Verzeichnis über die Bedeutung der in den Formeln benutzten Buchstaben.

(Mitunter wird derselbe Buchstabe auch in verschiedener Bedeutung benutzt.)

$A, A_1, A_2, \ldots$ willkürliche Konstante.
$B, B_1, B_2, \ldots$ willkürliche Konstante.
$C, C_1, C_2, \ldots$ willkürliche Konstante, insbesondere Integrations-Konstante.
$E(k, \varphi)$ elliptisches Normalintegral zweiter Gattung.
$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$.
F Funktion.
F Flächeninhalt einer ebenen Figur.
$F(k, \varphi)$ elliptisches Normalintegral erster Gattung.
J Integral.
$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$.
N Normale.
O Flächeninhalt einer krummen Oberfläche.
S Flächeninhalt eines Kurven-Sektors.
$\int$ (aus S entstanden) Integral.
Sn Subnormale.
St Subtangente.
T Tangente.[1]
U Umfang.
V Volumen eines Körpers.
X Funktion der einzigen Veränderlichen x.
Y Funktion der einzigen Veränderlichen y.

$a, a_1, a_2, \ldots$ willkürliche Konstante.
b Basis eines Logarithmen-Systems.

$c, c_1, c_2, \ldots$ willkürliche Konstante.
d und ∂ Differential.
e Basis der natürlichen Logarithmen.
f Funktion.
$f_1, f_2, f_3, \ldots$ konstante Faktoren.
g Funktion.
h Höhe, insbesondere Höhe eines Paralleltrapezes.
$i = \sqrt{-1}$.
$k = \sin\alpha$ Modul der elliptischen Normalintegrale.
ln Logarithmus naturalis.
$m = \operatorname{tg}\alpha$ Richtungstangente.
m Ordnung einer Differential-Gleichung.
n Grad einer ganzen rationalen Funktion oder einer Gleichung.
$p = \frac{dy}{dx}$.
q Quotient, insbesondere Quotient bei geometrischen Progressionen.
$q = \frac{d^2y}{dx^2}$.
r Radiusvektor.
s Bogenlänge bei ebenen Kurven und bei Kurven doppelter Krümmung.
t unabhängige Veränderliche, insbesondere bei Parameterdarstellung.
u, v abhängige oder unabhängige Veränderliche, insbesondere bei der Substitution und der partiellen Integration.
v integrierender Faktor.
x Abszisse eines Punktes P.
y Ordinate eines Punktes P.
x, y, z Koordinaten eines Punktes P im Raume.

α Winkel, den eine Gerade, insbesondere die Tangente mit der positiven Richtung der X-Achse bildet.
α Hilfswinkel bei elliptischen Integralen ($\sin\alpha = k$).
γ Winkel, den schiefwinklige Koordinaten miteinander bilden.
ϑ, ε verschwindend kleine Größen.
$\varepsilon = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ Hilfsgröße bei elliptischen Integralen.
$\zeta = \frac{1+\varepsilon^4}{2\varepsilon^2} = \frac{2-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$ Hilfsgröße bei elliptischen Integralen.
η Ordinate des Kreismittelpunktes.
Θ unbestimmte Größe zwischen 0 und 1.
μ Winkel, den die Tangente mit dem Radiusvektor bildet.
ξ Abszisse des Kreismittelpunktes.
π Umfang des Kreises mit dem Durchmesser 1.
ϱ Halbmesser des Kreises, insbesondere des Krümmungskreises.
φ Argument; Winkel, den der Radiusvektor mit der Anfangsrichtung bildet.

Alphabetisches Inhaltsverzeichnis.

(Die Ziffern geben die Seitenzahlen an.)



Druckfehler.

Seite 329, Zeile 8 v. u. lies $\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b f(x, t)dx$ statt $\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b f(x, t)dt$.



Druck von Gebauer-Schwetschke Druckerei und Verlag m. b. H., Halle a. S.

